



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

## Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

## À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>









56

Soc 1991 d. 89  
1666-99(5)











MÉMOIRES  
DE  
L'ACADEMIE  
ROYALE  
DES SCIENCES.

---

Depuis 1666. jusqu'à 1699.

---

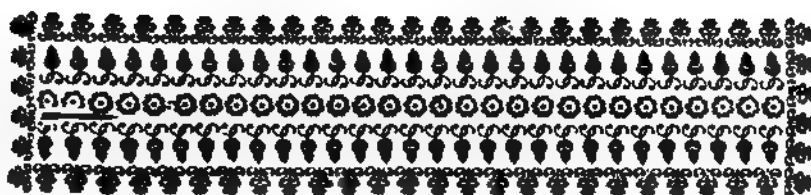
T O M E V.

A PARIS,  
PAR LA COMPAGNIE DES LIBRAIRES.  

---

M. DCC. XXIX.  
AVEC PRIVILEGE DU ROY.





# T A B L E DES MATIERES

CONTENUËS DANS CE VOLUME.

<i>METHODE pour trouver la Solution des Problèmes par les Exclusions.</i> Par M. FRENICLE DE BESSY. Pag. 1	
<i>Abregé des Combinaisons.</i> Par le même.	87
<i>Traité des Triangles rectangles en Nombre.</i> Par le même.	
I <sup>re</sup> Partie.	127
II <sup>e</sup> Partie.	181
<i>Des Quarrez ou Tables Magiques.</i> Par le même.	209
<i>Table Generale des Quarrez Magiques de quatre.</i> Par le même.	303
<i>Resolution des quatre principaux Problèmes d'Architecture.</i> Par M. BLONDEL.	355





LES divers Ouvrages de M. FRENICLE que l'on a rassemblé dans ce Volume ont été tirez du Volume *infolio* imprimé au Louvre en 1693. par les soins de M. DE LA HIRE. Nous avons rapporté dans l'Histoire la maniere dont ces differens Traitez vinrent entre les mains de M. DE LA HIRE, & ce qui l'engagea à les publier, ainsi qu'il le dit lui-même dans une Préface qu'il mit à la tête du Recueil qu'il en fit.

La premiere Partie du *Traité des Triangles rectangles en Nombres*, avoit été imprimée dès l'année 1676. *in douze*, & réimprimée avec la seconde en 1677. au Louvre, avec les *Problèmes d'Architecture* de M. BLONDEL, & quelques autres Ouvrages de MM. de l'Académie dont on fit un Recueil *infolio* forme d'*Atlas*.

**A P A R I S,**

Chez { **GABRIEL MARTIN**, rue S. Jacques, à l'Etoile.  
**FRANÇOIS MONTALANT**, Quay des Augustins.  
**JEAN-BAPTISTE COIGNARD** Fils, Imprimeur du Roy  
& de l'Académie Française, rue S. Jacques.  
**HIPPOLYTE-LOUIS GUERIN**, rue S. Jacques, à Saint  
Thomas d'Aquin, vis-à-vis Saint Yves.

**M E T H O D E**  
**POUR LA SOLUTION .**  
**DES PROBLÈMES**  
**PAR LES EXCLUSIONS.**

*Par M. FRENICLE.*



# M E T H O D E

## POUR TROUVER

### LA SOLUTION

### DES PROBLÈMES

### PAR LES EXCLUSIONS.

**U**OIQUE les questions doivent être examinées  
diversement suivant la diversité de leur sujet,  
on peut néanmoins y observer quelques règles  
qui conviennent à toutes en général, & qui  
peuvent en faciliter la recherche.

On doit toujours connoître quelque propriété de ce  
qui est requis dans la question ; car sans cela il seroit im-  
possible de rien trouver, si ce n'est que le problème ou la  
question proposée se donne à connoître par elle-même.  
Comme si l'on demandoit quelque chose touchant les  
*Rec. de l'Ac. Tom. V.* A



## 2 METHODE DES EXCLUSIONS.

nombres qui sont la somme de deux quarréz ou des côtez d'un triangle : pourvû qu'on sçache le moyen de faire des quarréz & des triangles , il sera facile de sçavoir leur somme sans qu'il soit besoin d'avoir aucune autre propriété desdites sommes. De sorte qu'il suffit de connoître ce qui est proposé ou par soi-même , comme les sommes susdites , on par quelque propriété. Comme si l'on demandoit quelque particularité touchant les hypoténuses des triangles rectangles dont les côtez sont des nombres entiers : car pour y parvenir il sera nécessaire d'avoir quelque propriété desdites hypoténuses par le moyen desquelles on les puisse avoir toutes.

Que si l'on connoît plusieurs propriétés de la chose proposée , on se servira de celle qui conduit plus facilement à la question , & par de moindres nombres. Car il faut remarquer que le principal but & subtilité de cette méthode , consiste principalement à racourcir le chemin , & à choisir de certains détours qui en ôtent la longueur & les plus grandes difficultés.

Mais parce qu'ordinairement chaque question se traite diversément suivant les différentes propriétés dont il se faut servir , il seroit impossible de donner des règles pour tous les divers cas qu'on pourroit rencontrer. C'est pourquoi l'on a jugé plus à propos de donner des exemples qui seront plus utiles pour faire entendre cette méthode , après avoir expliqué quelques règles générales qu'on peut observer pour parvenir à la solution du problème.

1<sup>o</sup>. Si l'on connoît en général ce qui est proposé , mais non pas le particulier qu'on propose , il faut par le moyen de plusieurs particuliers connus trouver quelque règle qui conviennent à tous , & par son moyen on trouvera ce qui est requis.

Par exemple , si l'on demande quels sont les quarréz dont la somme est l'hypoténuse du triangle 57 , 176 , 185.

Puisqu'on sçait en général le moyen de faire des trian-

gles, il en faut construire plusieurs dont on sçaura les quarrez, comme le triangle 3, 4, 5, qui a 4 & 1 pour ses quarrez; 5, 12, 13, qui a 9 & 4; 8, 15, 17, qui a 16 & 1: ou bien même on se contentera au commencement de quelqu'un de ces triangles, & puis l'on cherchera quelque voye par laquelle avec 3, 4, 5, par exemple, on puisse trouver 4 & 1, & l'ayant trouvée l'on regardera si elle convient aux autres triangles, & par ce moyen l'on trouvera ce qui est requis.

Ainsi ayant trouvé que prenant la somme & la différence des deux côtez impairs 5 & 3, qui sont 8 & 2, leur moitié 4 & 1 donne les quarrez requis, & trouvant que la même chose convient aux autres triangles 5, 12, 13; 8, 15, 17, &c. j'observerai la même regle pour le triangle proposé 57, 176, 185, en prenant la somme & la différence des deux côtez impairs 57 & 185, qui sont 242 & 128, leur moitié 121 & 64, donnera les quarrez requis.

2<sup>o</sup>. Mais si l'on ne connoît point ce qui est proposé ni en général ni en particulier, il en faut chercher les proprieté par ce que l'on a de connu. Et pour cet effet il faut construire & faire des nombres semblables à celui qui est requis en toutes les façons possibles, & sans en obmettre aucun, en commençant par le plus petit, & continuant tant qu'on en ait quelque nombre considérable, somme dix ou douze, ou plus selon la nature de la question; car quelquefois trois ou quatre suffiront, & dans d'autres rencontres il en faudra plusieurs avant qu'on ait découvert ce que l'on cherche.

Par exemple, si l'on demandoit combien de fois quelque nombre donné est la somme de deux quarrez, je suppose que je n'aye rien de donné, sinon le moyen de faire des quarrez, & de les assembler deux à deux pour avoir leur somme: il faudra voir d'abord si les nombres qui sont la somme de deux quarrez ont quelque propriété parti-

culiere, afin de pouvoir connoître si le nombre donné est la somme de deux quarrés, & si quelque nombre peut être plusieurs fois la somme de deux quarrés. Et après qu'on aura découvert des nombres qui sont la somme de plusieurs couples de quarrés, & le moyen d'en trouver autant qu'on voudra, on se servira de la premiere regle pour en faire leur générale, par laquelle on puisse trouver ce qui est requis.

Mais pour remarquer quelque propriété desdits nombres qui sont la somme de deux quarrés, j'assemble les quarrés deux à deux, comme 4 & 1 ; 9 & 1 ; 9 & 4 ; 16 & 1 ; 16 & 4 ; 16 & 9 , &c. tant que j'en aye quelque multitude notable ; & considérant leurs sommes 5 , 10 , 13 , 17 , 20 , 25 , &c. je regarde si j'y pourrai découvrir quelque propriété qui ne convienne point aux autres nombres, comme l'on montrera plus au long dans l'exemple que l'on donnera dans la suite.

3°. Pour n'obmettre aucun nombre de ceux qu'on veut avoir, il faut établir quelque ordre pour ne se point égarer dans cette perquisition ; & cet ordre doit être le plus simple & le moins embrouillé qu'il sera possible, & tel que par son moyen l'on puisse poursuivre à faire les nombres aussi avant qu'on voudra sans aucune confusion.

Il faut aussi que cette recherche soit la plus courte & la plus facile qu'il se pourra faire, & pour y parvenir on se servira de deux moyens principaux.

La recherche sera courte si l'on considère le moins de nombres que la nature de la question pourra porter.

Elle sera facile si l'on se sert des moindres nombres possibles.

4°. Pour le premier moyen, qui est de faire la perquisition courte, on se servira de l'*Exclusion*. Par l'*Exclusion* on obmet les nombres que l'on aura reconnus inutiles, & qui ne servent de rien à la question, & dont on se peut très-bien passer, comme sont presque toujours les multi.

7°. Le second moyen par lequel la perquisition se rendra facile , est en se servant des moindres nombres qu'on pourra ; il se peut nommer *diminution*. Il y a plusieurs voyes pour parvenir à cette diminution, aussi-bien qu'à l'exclusion , comme sont les suivantes.

En cherchant ou en choisissant quelque propriété , qui fasse que ce qui est requis se puisse trouver par de moindres nombres que ceux que l'on trouve par quelqu'autre propriété.

Par exemple , si l'on cherche les hypoténuses des triangles rectangles , on les trouveroit suivant la propriété qu'elles ont , qui est que leur quarré est la somme de deux quarez : mais on les trouvera beaucoup plus facilement & avec des nombres bien moindres, si l'on se sert de la propriété suivante , qui est que la somme de deux quarez inégaux est une hypoténuse.

Car par la premiere propriété on trouve , par exemple, l'hypoténuse 5 , parce que les nombres 9 & 16 joints ensemble font 25 , quarré de 5. Mais par la seconde je trouverai le même nombre 5 en joignant ensemble 4 & 3 ; ce qui est beaucoup plus facile & plus court.

8°. Quelquefois aussi après avoir trouvé une voye pour rencontrer le nombre requis , & ayant déterminé qu'il faut chercher quelque autre nombre pour avoir le requis , ce second se trouvera encore par un troisième , & ce troisième par un quatrième , ce qui sert quelquefois dans les problèmes impossibles pour en démontrer l'impossibilité. Comme si l'on trouve que pour avoir le 3<sup>e</sup> ou le 4<sup>e</sup> il se faille servir du premier , on verra évidemment l'impossibilité de la question. Que si elle ne paroît pas fort clairement , cela fait au moins que pour des nombres de deux ou trois lettres qu'on examine , étant par après appliquez à la question , les nombres qui en proviendront auront au moins dix ou douze lettres , & par ce même moyen on rejette aussi une grande multitude de nombres superflus,

## 8 METHODE DES EXCLUSIONS.

9<sup>o</sup> Que si la question demande plus d'un nombre, comme si l'on requiert un triangle dont l'hypoténuse soit un quarré, & l'enceinte aussi un quarré, on voit qu'il y a deux nombres auxquels on attribue la propriété d'être quarréz. En ce cas on recherchera les moyens de faire chacun d'iceux séparément; & pour cela on se servira des moyens cy-dessus déduits; puis on conferera les propriétés de chacun des nombres trouvez l'une avec l'autre, & l'on remarquera si celles de l'un peuvent compatir avec celles de l'autre, car si une des propriétés d'un des nombres détruiroit celles de l'autre, ou quelqueune d'icelles, la question seroit impossible.

10<sup>o</sup> Si en la recherche on a trouvé plusieurs nombres tels qu'il est requis, on remarquera leurs propriétés particulières, qui les font distinguer d'avec les autres nombres, & qui soient communes à tous les nombres d'une même espèce, en considérant si tout ce qui a ladite propriété, a aussi l'autre propriété qui étoit requise. Par exemple, après avoir remarqué que les nombres premiers qui surpassent de l'unité un multiple de 4, font la somme de deux quarréz, je regarderai si tous les nombres premiers qui font la somme de deux quarréz, surpassent de l'unité un multiple de 4; & voyant que plusieurs desdits nombres de suite à commencer par le moindre & sans en obmettre aucun, ont cette condition, comme sont 5, 13, 17, 29, &c. je conclus que ladite propriété convient à tous les autres premiers, qui surpassent de l'unité un multiple de 4.

Quelquefois aussi on trouve certaines exceptions auxquelles il faut avoir égard, & considérer tout ce qui doit être compris dans lesdites exceptions, en remarquant leur origine & d'où elles proviennent.

Il faut remarquer que cette recherche ne sert principalement qu'aux questions possibles, qu'elle trouve ordinairement sans beaucoup de travail, ne se servant pour la plupart d'autre démonstration que de la construction:

## METHODE DES EXCLUSIONS. 9

au moins c'est-là son principal but. C'est pourquoi, le plus souvent aux questions impossibles elle donnera bien des voyes pour aller bien avant, & rechercher avec peu de travail jusqu'à des nombres fort grands, encore qu'on ne puisse pas arriver au but désiré, à cause de l'impossibilité de ce qui est proposé.

Il arrive aussi par fois, qu'en recherchant des voyes plus courtes & plus faciles, & voulant essayer tous les moyens de parvenir au but désiré, on trouve des contradictions & absurditez qui font voir l'impossibilité.

### P R E M I E R E X E M P L E.

**D**Eux quarrez étant donnez, trouver le triangle qui est formé desdits quarrez; par exemple,  $64$  &  $25$  étant donnez, on demande le triangle.

Cette question suppose qu'on sçache que les triangles sont formez par le moyen de deux quarrez, dont la somme est l'hypoténuse; & partant par le premier précepte, je chercherai quelques-uns des premiers triangles dont je sçaurai les quarrez, comme  $3, 4, 5$ , qui est formé par les quarrez  $4$  &  $1$ : j'essayerai donc à trouver lesdits  $3, 4, 5$ , par le moyen de  $4$  &  $1$ . Et premierement je voi que la somme de  $4$  &  $1$ , est l'hypoténuse  $5$ , & la difference des mêmes  $4$  &  $1$ , est le côté impair  $3$ , reste donc à trouver le côté pair  $4$ . Je voi bien que le produit de  $4$  par  $1$  donne  $4$ , mais cela ne pourroit pas arriver aux autres quarrez, parce que d'ordinaire le produit de deux nombres est plus grand que leur somme; & partant, si le côté pair étoit le produit des deux quarrez, il seroit presque toujours plus grand que la somme, qui est l'hypoténuse; ce qui ne se peut.

Il faut donc former  $4$  par une autre voye: & puisque les quarrez ne le donnent pas facilement, j'aurai recours à leurs racines  $2$  &  $1$ , dont le produit est  $2$ , le double duquel est  $4$ .

*Rec. de l'Ac. Tom. V,*

B

Je considere maintenant si la même chose se fait & se trouve aux autres triangles.

Ainsi ayant 9 & 4, qui font le triangle 5, 12, 13, je voi que la somme desdits 9 & 4 est l'hypoténuse 13, & leur différence est le côté impair 5. Pour le côté pair je prens les racines desdits quarrez, qui sont 3 & 2, leur produit est 6, dont le double qui est 12 est le côté pair dudit triangle.

J'examinerai encore la même chose aux triangles suivans 8, 15, 17, qui provient de 16 & 1, & à 20, 21, 29, qui est fait par 25 & 4, ce qui me donne à connoître que cette regle convient à tous les triangles, puisqu'elle est propre à ceux que nous venons d'examiner, qui sont assez differens les uns des autres, sinon les deux premiers 3, 4, 5, & 5, 12, 13, qui se ressemblent en ce que le grand côté n'est different de l'hypoténuse que de l'unité.

Je viendrai donc aux quarrez proposez 64 & 25; & leur appliquant ladite regle, je trouverai le triangle 39, 80, 89.

## S E C O N D E X E M P L E.

**U**N quarré étant donné, trouver un autre quarré, qui étant joint avec le donné, fasse un troisiéme quarré.

On donne par exemple 64.

Je cherche deux quarrez, qui étant joints ensemble, fassent un quarré, comme sont 16 & 9, dont la somme est 25.

Puis je cherche quelque voye par le moyen de laquelle je trouve 9 avec 64; car ici il faut choisir le quarré pair 16, puisque le donné, sçavoir 64, est pair: ou si je ne puis trouver 9 facilement, je chercherai la racine 3.

Si j'ôte 1 de la racine de 16, sçavoir de 4, il restera 3, racine de 9: je regarde donc aux autres quarrez pairs si la même chose arrivera.

Je prens par exemple 36, dont la racine 6 étant diminuée d'1, reste 5; le quarré duquel, sçavoir 25, étant joint à 36, donne 61 qui n'est point quarré: ce qui me donne à connoître que cette regle n'est pas la vraye, puis qu'elle n'est pas générale, quoiqu'il pourroit arriver en d'autres questions, que certains quarez n'auroient pas la propriété requise. Mais je trouve ici que 36 étant joint au quarré 64, donne 100, qui est un quarré, & partant ledit 36 n'est pas exclus d'avoir ladite propriété.

Je cherche donc quelque autre convenance de 9 à 16; & parce que 4 y étoit propre dans la premiere regle, je regarde si je ne pourrai point tirer 4 de 16 autrement qu'en le considérant comme racine de 16.

Je voi que 4 est le quart de 16, je le considererai donc en cette qualité, & par même moyen j'éprouverai la même chose au susdit 36 dont le quart est 9, duquel ôtant 1, reste 8, dont le quarré 64 étant joint à 36, donne 100, qui est un quarré: ce qui me fait présumer que la regle est bonne, & on en pourra être entierement assuré en l'essayant sur d'autres quarez.

Je prens donc le quart du quarré donné 64, qui est 16, dont ôté 1, reste 15, le quarré duquel 225 étant joint à 64, donne 289 quarré de 17, qui surpasse ledit quart 16 de la même unité.

Mais je voi aussi que le même 64 étant joint à 36, fait un quarré; & partant afin que la regle soit plus parfaite, il sera bon de donner un moyen pour trouver tous les quarez auxquels un quarré étant joint, donne un autre quarré. Je l'éprouve à 64, & ayant pris son quart 16, je cherche le moyen de trouver par icelui la racine de 36 qui est 6. Ce 6 est la moitié moins 2 de 16: or pour avoir la moitié il faut diviser par 2; de sorte que ce 2 pourroit passer pour partie de 16, & dans cette considération on a pû aussi prendre l'unité quand on l'a ôté de 16.



## 11 METHODE DES EXCLUSIONS.

De même donc que j'ai pris la somme & la différence de 16 & 1, qui sont comme parties relatives de 16 pour avoir 17 & 15, qui sont les racines des quarréz requis : de même aussi je prendrai 2 & 8 pour parties relatives du même 16, la somme & la différence desquelles est 10 & 6, dont les quarréz 100 & 36 sont tels qu'il est requis ; car joignant 36 à 64, on a 100.

Je prendrai garde après si la même chose arrive aux autres quarréz qui ont plus de parties.

Je prens donc 144, & cherche les quarréz ausquels étant joint on peut avoir un quarré.

Son quart est 36. Les parties relatives de 36 sont 1, 36 ] 2, 18 ] 3, 12 ] & 4, 9 : il n'y en a point d'autres, car 6 & 6 sont semblables ; ce qui fait qu'ils n'ont point de différence dont on se puisse servir.

Je prens la somme & la différence de chaque couple desdites parties, & trouve 37, 35 ] 20, 16 ] 15, 9 ] & 13, 5 & partant 144 étant joint au quarré de 35, qui est 1225, fait 1369, quarré de 37.

Le même 144 étant joint à 256, quarré de 16, donne 400, quarré de 20.

144 avec 81, quarré de 9, donne 225, quarré de 15.

Et enfin 144 avec 25, quarré de 5, donne 169, quarré de 13.

Pour voir si 144 ne se peut joindre qu'à 4 quarréz pour faire un quarré, & 64 à 2 seulement ; je considere que lors qu'un quarré étant joint à un autre quarré, fait un quarré, les racines de ces trois quarréz sont les côtez d'un triangle. Je verrai donc à combien de triangles la racine du quarré donné sert de côté ; & je trouve que 8, racine de 64, ne sert de côté qu'à deux triangles ; & 12 racine de 144, ne sert qu'à quatre. Puis donc que j'ai trouvé la même chose ausdits quarréz par l'examen des parties de leur quart, j'infererai que la regle est bonne. Que si ces deux exemples n'en donnent pas une entiere

assurance , on le pourra encore éprouver sur d'autres quarez.

Mais si on ne sçavoit pas à combien de triangles un nombre donné sert de côté , il faudroit examiner lesdits quarez d'une autre sorte , sçavoir en joignant le donné avec plusieurs quarez , pour voir si la somme feroit un quarré ; & pour y parvenir on se pourra servir des exclusions dont on a cy-devant parlé ; & voici comme on y procedera ; prenant 144 pour exemple.

Je considère premierement si cet examen a des bornes , ou si on peut examiner utilement lesdits quarez à l'infini ; & pour ce qu'il faut ajouter à 144 un quarré pour avoir un autre quarré , il s'ensuit que 144 doit être la difference de deux quarez.

Je considère donc quelle doit être la difference de deux quarez , & je trouve que les quarez allant toujours en augmentant , leurs differences augmentent aussi à mesure : de sorte que deux quarez , dont les racines ont pareille difference que celles de deux autres quarez , n'auront pas entr'eux pareille difference ; mais les quarez les plus grands auront plus grande difference : ainsi 25 & 64 , dont les racines 5 & 8 ont 3 pour difference , different plus entre eux que 4 & 25 , dont les racines 2 & 5 ont pareille difference qui est 3.

Puis donc que les differences augmentent toujours , il s'ensuit que 144 a des bornes , & qu'il ne faut pas poursuivre l'examen que jusqu'à certains quarez.

Or le quarré proposé étant pair , il ne peut pas être different de deux quarez dont les racines ne different que de l'unité , parce que de ces deux quarez l'un étant pair & l'autre impair , la difference seroit impaire.

Mais dans les 4 couples de quarez qu'on a trouvez ausquels 144 sert de difference , on a ceux de 35 & 37 , qui sont les plus grands ausquels ledit 144 puisse servir de difference ; car puisque lesdites racines doivent avoir

#### 14 METHODE DES EXCLUSIONS.

au moins 2 de difference , si on prenoit deux autres nombres plus grands que 35 & 37 , & qui eussent une pareille difference , il est certain que la difference de leurs quarrez seroit plus grande que celle des quarrez de 35 & 37 , qui est 144.

Il faut donc à 144 ajouter tous les quarrez jusqu'à celui de 35 , & voir si quelques-unes des regles des exclusions auront ici lieu.

Et premierement celle qui exclut les multiples ne peut pas être ici employée , puisque 144 peut aussi bien être la difference de deux quarrez composez entr'eux , que premiers entr'eux.

Mais on aura égard à la cinquième regle qui considere les finales , lesquelles dans les quarrez sont 1, 4, 5, 6, 9 & 0.

Si à 144 on ajoute un carré finissant par 1 , la somme finira par 5 ; mais 5 est toujours précédé de 2 , dans les quarrez , & partant il faudra que ledit 1 soit précédé de 8 , afin que ce 8 étant joint à la pénultième lettre 4 , on ait 2 pour pénultième ; & partant si le carré qu'on ajoute finit par 1 , il doit au moins finir par 81.

4 étant joint à 4 donne 8 , qui n'est point une finale carrée , & partant on n'ajoutera point à 144 les quarrez qui finissent par 4.

Pareillement les quarrez qui finissent par 9 , ne pourront être ajoutez à 144 , parce que la somme auroit 3 pour finale , qui partant ne seroit point carrée.

Mais on pourra joindre à 144 les quarrez qui finiront par 5 & 0.

On y pourra joindre aussi les quarrez finissans par 6 , pourvû qu'ils finissent par 56 , afin que la somme ait 00 pour finale.

Cela posé , il ne faudra point ajouter à 144 les quarrez 1 , 4 , 9 & 16 , pour les causes déduites , ni le carré qui suit 144 , sçavoir 169 dont la difference à 144 est 25.

Après 25 il faudra venir à 36 , 49 & 64 , qu'il faut laiss-

fer pour les mêmes causes cy-dessus déduites.

81 étant joint à 144 donne 225, quarré de 15.

100 étant joint à 144 donne 244, qui n'est point quarré.

121, 169, 196, doivent être laissez à cause des finales.

225 joint à 144, donne 369, qui n'est point quarré.

256 joint à 144, donne 400, quarré de 20.

289, 324, 361, seront laissez à cause des finales.

400 & 144 donnent 544, qui n'est point quarré.

441, 484, 529, 576, 676, 729, 784, 841, 961, 1024 & 1089, seront aussi laissez à cause des finales.

625 joint à 144 donne 769, qui n'est point quarré.

900 joint à 144 donne 1044, qui n'est point quarré.

1156 joint à 144 donne 1300, qui n'est point quarré.

Enfin 1225, quarré de 35, joint à 144, donne 1369, quarré de 37. Nous n'avons donc que les 4 couples de quarez cy-devant trouvez, ausquels 144 serve de difference.

Jusqu'ici on a examiné la question en supposant un quarré pair donné : mais qui voudra voir tout ce qui dépend de la question, doit considérer la méthode de trouver la même chose, le quarré donné étant impair ; par exemple, 81 étant donné, trouver un quarré qui étant joint avec icelui fasse un autre quarré.

Je prens pour cet effet quelque quarré connu, comme 9, auquel je sçai qu'ajoutant 16 on a 25.

Je cherche donc un moyen pour trouver 16, ou sa racine 4 avec le quarré donné 9.

Je voi d'abord qu'ôtant 1 de 9, & prenant la moitié du reste, on aura 4. Je considererai donc la même chose aux autres quarez impairs.

Ainsi je trouve qu'ôtant 1 de 25 reste 24, dont la moitié est 12, le quarré duquel 144 étant joint à 25, donne 169, quarré de 13.

La même chose arrivera aussi à 49 & à 81, car celui-cy étant joint à 1600, quarré de 40, donne 1681 quarré de 41.

## 16 METHODE DES EXCLUSIONS.

On pourra aussi considérer que les quarrés impairs dont la racine n'est pas un nombre premier, peuvent être joints avec plusieurs quarrés pour faire un quarré.

Ainsi examinant 81 comme on a fait cy-devant 144, on trouvera qu'étant joint audit 144, il fera 225 quarré de 15.

Il faudra donc trouver une voye pour rencontrer 144, ou sa racine 12, par le moyen de 81.

Or puisque nous sçavons que les quarrés dont la racine est un nombre premier, ne peuvent être joints qu'avec un seul quarré pour faire un quarré, comme on peut voir à 9, 25, 49, &c. & que ceux dont la racine est composée peuvent être joints avec plusieurs, cela fait présumer que les parties desdits quarrés sont cause de cela; car 9, par exemple, ne peut être fait par multiplication de nombres differens, que par 1 & 9; de même en est-il de 25 qui n'a que 1 & 25, & ainsi des autres. Mais 81 peut être fait par 1 & 81, & par 3 & 27.

A cause de 1 & 81 on trouve le quarré de 40 & celui de 41; car on voit qu'ôtant 1 de 81 la moitié du reste est 40, de même ajoutant 1 à 81 la moitié de la somme est 41.

On agira donc de même aux autres parties de 81, sçavoir 3 & 27, prenant la moitié de leur somme & de leur difference. La somme est 30, la difference 24, la moitié desquelles est 15 & 12: on verra donc si ajoutant à 81 le quarré de 12 on aura celui de 15, ce qui se trouve être ainsi.

On éprouvera la même chose sur quelqu'autre quarré, dont la racine sera composée, comme sur 225 quarré de 15.

Les parties relatives de 225 sont 1, 225 ] 3, 75, ] 5, 45, & 9, 25.

La moitié de la somme & de la difference desdites parties sont 113, 112, ] 39, 36, ] 25, 20, ] & 17, 8.

Partant si on ajoute 225 au quarré de 112, on aura le quarré de 113.

225

225 joint au quarré de 36, donne celui de 39.

225 étant joint au quarré de 20, donne celui de 25.

Et enfin 225, avec le quarré de 8, donne celui de 17.

TROISIEME EXEMPLE.

UN nombre étant donné, déterminer s'il est hypotenuse de quelque triangle, & quels sont les deux côtez dudit triangle.

Afin de donner facilement la solution de cette question, dans laquelle si l'on proposoit quelque nombre particulier, comme si l'on demandoit si 221 est hypotenuse; il faut voir si on pourra remarquer quelque sorte de nombres affectez particulièrement aux hypoténuses; & pour y parvenir, je me servirai du second précepte, puisque je ne sçai pas encore les propriétés particulières des hypoténuses, & que ce sont elles qu'il faut chercher. Mais il faut sçavoir ce que c'est qu'une hypotenuse, & quel moyen on a d'en trouver quelqu'une.

Que la propriété suivante soit donnée.

Le quarré de l'hypotenuse d'un triangle rectangle vaut autant que les quarrés des deux autres côtez du triangle.

Partant si l'on joint chaque quarré à chaque quarré, on aura les quarrés de toutes les hypoténuses, sçavoir quand la somme des deux quarrés viendra à être quarrée.

Je cherche donc par le second précepte toutes les hypoténuses sans en obmettre aucune, commençant par la moindre, & pour y parvenir j'assemble tous les quarrés.

Mais de peur de s'embarasser, & pour n'obmettre aucune hypotenuse, je forme quelque ordre par le troisième précepte, par lequel je puisse poursuivre l'assemblage desdits quarrés aussi loin que je voudrai, & tel aussi (autant que faire se pourra) qu'on puisse s'arrêter où on voudra, sans que le travail qu'on aura commencé oblige à continuer bien avant, & aussi sans qu'on soit obligé (en cas qu'on voulut poursuivre la recherche plus avant) de

# 18 METHODE DES EXCLUSIONS.

reprendre ce qu'on auroit quitté. Ce qui se doit entendre, si cela se peut faire commodément.

† 4	1	5
9	1	10
† 9	4	13
† 16	1	17
16	4	20
† 16	9	25 & 5
25	1	26
† 25	4	29
25	9	34
† 25	16	41
† 36	1	37
36	4	40
36	9	45
36	16	52
† 36	25	61
49	1	50
† 49	4	53
49	9	58
† 49	16	65
49	25	74
† 49	36	85
† 64	1	65
64	4	68
† 64	9	73
64	16	80
† 64	25	89
64	36	100 & 10
† 64	49	113

Par exemple, si pour assembler lesdits quarrez on ajoutoit au premier carré 1 tous les autres quarrez jusqu'à celui de 200, & que par après on vint à les ajouter à 4, puis à 9, on s'obligerait, pour avoir toutes les hypoténuses moindres, de parcourir presque tous les quarrez, & on entreprendroit un grand travail sans peur - être en avoir besoin.

Au contraire, si après avoir assemblé tous lesdits quarrez l'un à l'autre, on vouloit pousser la recherche plus avant, il faudroit reprendre ce qu'on auroit laissé, car il faudroit recommencer à 1, & lui ajouter les quarrez plus grands que celui de 200, ce qui apporteroit quelque désordre. Il vaudra donc mieux prendre un autre ordre, comme cy-après.

Je prens le carré 4, & lui ajoute 1.

Puis je viens à 9, & lui ajoute tous les moindres, commençant à 1.

Puis je prens 16, & lui ajoute les quarrez moindres 1, 4, 9, & je mets la somme ensuite de chaque couple de quarrez, comme on voit ici. Et continuant en cette façon autant loin qu'on voudra, je remarque les couples dont la somme est quarrée, parce que la racine de ce

81	1	82	quarré est l'hypoténuse d'un triangle.
† 81	4	85	Et par le moyen de cette addition on
81	9	90	trouvera des hypoténuses, & aucune ne
† 81	16	97	pourra être obmise.
81	25	106	Mais parce que je voi qu'il arrive peu
81	36	117	souvent que la somme soit un quarré, je
81	49	130	considere s'il n'y a rien de superflu dans
† 81	64	145	cette Table.

Les nombres qu'on veut avoir doivent être quarrés: je considererai donc quelque propriété du quarré, comme que tout quarré est pairément pair, ou pairément pair  $+1$ .

Mais si on ajoute ensemble deux quarrés impairs, comme 9 & 1, 25 & 9, la somme sera impairement paire; parce que les deux quarrés étant chacun un pairément pair  $+1$ , les deux ensemble feront un pairément pair  $+2$ , qui est un impairement pair.

De là on conclura qu'il est superflu d'ajouter ensemble deux quarrés impairs, car leur somme étant impairement paire, ne peut pas être quarrée.

Je considere aussi suivant le quatrième précepte si les quarrés composés entr'eux peuvent être exclus, comme étant multiples d'autres couples de quarrés premiers entr'eux.

Je trouve que les triangles étant multipliés par quelque nombre que ce soit, donnent toujours d'autres triangles, car la proportion des côtes ne change point; & si deux quarrés étant joints ensemble font un quarré, si on multiplie lesdits quarrés par quelque quarré, il est certain que la somme de ces multiples sera encore un quarré, qui sera mesuré par le même quarré qui aura multiplié les deux autres.

Il faudra donc retrancher de la Table les quarrés qui sont de même ordre, & ceux qui ont une commune mesure.



# 20 METHODE DES EXCLUSIONS.

Reste donc de poursuivre la Table , en joignant les quarrez premiers entr'eux , & de divers ordres , lesquels

aussi je marquerai en la Table précédente , afin de les distinguer des autres.

On pourroit par après avoir égard aux finales , ainsi qu'il est montré au cinquième précepte ; car on voit que dans cette seconde Table , quoiqu'il y ait déjà un grand raccourcissement ; néanmoins si on vouloit ôter toutes les finales inutiles , il y en auroit encore un beaucoup plus grand.

On pourroit ensuite considérer quelque propriété des quarrez , comme que ceux qui ne sont pas mesurez par 3 , surpassent de l'unité un multiple de 3 . Mais parce qu'on a déjà exclu les quarrez qui ont une commune mesure , il s'ensuit qu'il n'y aura aucune des sommes susdites qui soit mesurée par 3 ; car pour être telle il faudroit que chacun des quarrez fut multiple de 3 , puisque les quarrez sont ou multiples de 3 , ou multiples de  $3 + 1$  ; partant si chacun des quarrez surpassé de l'unité un multiple de 3 , la somme sera multiple de  $3 + 2$  , ou multiple de  $3 - 1$  , & partant elle ne pourra pas être carrée.

Il faudra donc que des deux quarrez que l'on ajoute , l'un soit

100	1	101
100	9	109
100	49	149
100	81	181
<hr/>		
121	4	125
121	16	137
121	36	157
121	64	185
121	100	221
<hr/>		
144	1	145
144	25	169 & 13
144	49	193
144	121	265
<hr/>		
169	4	173
169	16	185
169	36	205
169	64	233
169	100	269
169	144	313
<hr/>		
196	1	197
196	9	205
196	25	221
196	81	277
196	121	317
196	169	365
<hr/>		
225	4	229
225	16	241
225	64	289 & 17
225	196	421

256	1	257	multiple de 3, & l'autre multiple
256	9	265	de 3 + 1, ce qui exclut encore
256	25	281	beaucoup d'additions.
256	49	305	Mais avant que de continuer
256	81	337	ladite table suivant les règles des-
256	121	377	dités exclusions, il faut voir si les
256	169	425	sommes quarrées qu'on a trouvées
256	225	481	ne pourront rien apprendre tou-

chant ce qui est proposé, & si on ne pourra point trouver quelque propriété desdites hypoténuses, outre celle en vertu de laquelle on les a trouvées jusques ici.

Je trouve ici 25, 100, 169, & 289, qui entre lesdites sommes sont quarrées, mais 100 est du nombre de celles qui ont été rejettées, parce qu'il provient de deux quarrés qui ont une commune mesure.

Les racines de ces nombres, sçavoir 5, 10, 13, 17, feront donc hypoténuses de triangles rectangles dont les deux autres côtes seront les racines des quarrés qu'on a assemblez pour avoir lesdits quarrés 25, 100, 169, 289.

Ainsi 25 étant la somme des quarrés 16 & 9, les racines des trois quarrés 25, 16, 9, qui sont 5, 4, 3, seront les côtes d'un triangle rectangle.

Mais en considérant ma première table, je vois qu'elle contient lesdits nombres 5, 10, 13, 17, que j'ai trouvé être hypoténuses, & qu'ils sont de suite dans la colonne où sont les sommes des quarrés; car 4 & 1 donnent 5, ] 9 & 1 donnent 10, ] 9 & 4 donnent 13, ] & 17 vient de 16 & 1: il se pourroit donc faire que non seulement les quarrés des hypoténuses sont la somme de deux quarrés, mais aussi que les hypoténuses mêmes sont pareillement la somme de deux quarrés, ce qu'il faut examiner.

Je voy déjà que 5, 13 & 17, sont hypoténuses; & de plus j'ai dans la table plusieurs multiples desdits 5, 13 & 17, qui sont pareillement hypoténuses, comme 10,

20, 40, 45, 26, 34, &c. & qui sont aussi la somme de deux quarez.

Il faut donc voir si les autres nombres premiers de la table sont pareillement hypoténuses, sçavoir 29, 41, 37, 61, &c.

Mais parce qu'il seroit trop long d'examiner si les quarez desdits nombres sont la somme de deux quarez, je cherche quelqu'autre voye qui n'oblige point de considérer lesdits quarez.

Cette voye sera de satisfaire à la seconde partie de la question, sçavoir de donner les deux autres côtez du triangle, ce qui se trouvera par la premiere regle, puisqu'on a les quarez dont l'hypoténuse est la somme, & qu'on sçait les côtez de quelques triangles, sçavoir de ceux dont 5, 13 & 17 sont hypoténuses. Car par la table susdite on voit que 5 est hypoténuse, & que 3 & 4 sont les côtez, parce que 25 quarré de 5, est la somme de 9 & 16, quarez de 3 & 4; de même on trouvera que 5 & 12 sont les côtez du triangle dont 13 est hypoténuse, & que 8 & 15 sont les côtez du triangle 8, 15, 17.

Cela supposé on requiert une voye ou regle par laquelle on puisse trouver lesdits côtez, sçachant seulement l'hypoténuse & les deux quarez dont elle est la somme.

Cette regle se trouvera par le premier exemple qui a été donné ci-devant; & l'appliquant à tous les nombres de la table, je trouve les côtez des triangles dont ils sont hypoténuses. Par exemple, 29 est la somme de 25 & 4, la difference desdits quarez qui est 21 est le côté impair; si donc 29 est hypoténuse, & 21 l'un des côtez de son triangle, il faudra que le quarré de 21 étant ôté de celui de 29, il reste un quarré dont la racine soit l'autre côté du triangle. J'ôte donc 441 quarré de 21, de 841 quarré de 29, reste 400 quarré de 20, qui est l'autre côté, & partant 29 est hypoténuse. La même chose se pourra examiner aux autres hypoténuses suivantes, & même aussi aux

multiples ; car si en les prenant de suite & sans aucun choix , on trouve la même chose à toutes , je conclus que ladite regle est générale , sçavoir que la somme de deux quarez inégaux est l'hypotenuse d'un triangle rectangle , dont les côtez sont tels nombres qu'on voudra.

Mais il ne faut pas se contenter de cela , car il faut examiner la converse , sçavoir si toute hypotenuse est la somme de deux quarez.

J'ai ici de deux sortes d'hypoténuses, sçavoir de primitives , qui sont nombres premiers , ou au moins qui servent à des triangles dont les côtez n'ont point de commune mesure , & d'autres qui sont multiples d'autres hypoténuses primitives, & dont les côtez ne sont pas premiers entr'eux, mais qui se peuvent mesurer par un même nombre.

Pour ce qui est des hypoténuses primitives , je vois ici plusieurs nombres qui servent d'hypotenuse à des triangles fort differens , comme 3 , 4 , 5 , ] 8 , 15 , 17 , ] 20 , 21 , 29 , ] 28 , 45 , 53 , &c. qui sont tous la somme de deux quarez ; partant il n'y a aucune apparence qu'il y ait d'autres nombres premiers qui soient hypoténuses , & qui ne soient point la somme de deux quarez ; car les uns ne peuvent pas avoir plutôt cette propriété que les autres , puisqu'elle se trouve en plusieurs triangles fort differens. Que si on s'en vouloit assurer davantage , il faudroit examiner quelques-uns des autres nombres premiers en les prenant de suite , comme 7 , 11 , 19 , 23 , & voir si leurs quarez sont la somme de deux quarez ; ce qui se pourra faire , en ôtant , par exemple , de 529 carré de 23 , les quarez qui sont moindres , & considerant si le reste sera carré , en se servant pour cet effet des finales des quarez. Mais on trouvera toujours que les nombres premiers qui ne sont point la somme de deux quarez , ont un carré qui n'est point aussi la somme de deux quarez : ainsi parce que 23 n'est point la somme de deux quarez , son carré 529 ne la sera pas aussi.

## 24 METHODE DES EXCLUSIONS.

Reste donc à examiner les multiples, & pour cet effet je prens quelque hypotenuse primitive, comme 5, & je la multiplie par plusieurs nombres pris de suite sans aucun choix, & sans en omettre aucun, comme par 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c. & j'aurai 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, &c. lesquels derniers nombres sont de nécessité hypoténuses, puisqu'ils sont multiples de 5, car on a trouvé que multipliant un triangle par quelque nombre que ce fût, on a encore un triangle dont les côtez ont entr'eux même proportion.

Je regarde par après en la premiere table où sont les assemblages de tous les quarrez, tant ceux qui sont premiers entr'eux, que ceux qui ont une commune mesure, & tant ceux de même ordre, que de divers ordres.

En cette table je trouve bien quelques-uns desdits nombres, comme 10, 20, 25, 40, 45, mais je n'y trouve pas les autres, sçavoir 15, 30, 35, d'où je conclus que toute hypotenuse n'est pas la somme de deux quarrez. Et considerant quelle difference il peut y avoir entre les hypoténuses qui sont la somme de deux quarrez & celles qui ne le sont pas, je trouve que les premieres sont ou bien multiples d'une hypotenuse par un carré comme 20 & 45, ou par un double carré comme 10 & 40, ou qu'elles ne peuvent être mesurées que par des hypoténuses comme 25; & passant outre en ladite table, on trouveroit encore 50, 65, & 85: mais ces trois dernieres ont encore cela de particulier, qu'en vertu des quarrez dont elles sont la somme, elles servent d'hypotenuse à des triangles primitifs.

Les autres hypoténuses qui ne se trouvent point dans ladite table, & partant qui ne sont point la somme de deux quarrez, comme 15, 30, 35, 55, sont multiples d'hypoténuses par des nombres qui ne sont ni quarrez, ni doubles quarrez, ni hypoténuses, car les trois premieres sont multiples de 5, par 3, 6 & 7.

Mais

Mais il faut voir si on ne pourra point découvrir quel-  
qu'autre propriété des hypoténuses ; & pour y parvenir ,  
je considère les seules hypoténuses primitives , laissant-là  
les multiples qui n'ont autre chose que ce qu'elles em-  
pruntent de leurs primitives , dont voici quelques-unes.

5 , 13 , 17 , 25 , 29 , 37 , 41 , 53 , 61 , 65 , 73 , 85 ,  
89 , 97 , 101 , 109 .

Je vois premièrement que tous les nombres premiers  
ne sont pas en ce rang , & qu'il y a aussi des nombres com-  
posez , mêlez parmi , mais non pas tous , car on n'y trouve  
point 21 , 49 , & autres.

Afin donc de débrouiller un peu ces nombres , je les sé-  
pare en premiers & composez , & je regarde quelles sont  
les parties des composez , 25 est le carré de 5 , 65 a pour  
parties 5 & 13 , ] & 85 a 5 & 17 .

Je considère que lesdits nombres 5 , 13 & 17 sont com-  
pris entre les nombres premiers qui sont hypoténuses :  
d'où je conclus que les nombres composez de seules hy-  
poténuses sont aussi hypoténuses primitives , de même  
que les nombres premiers dont ils sont composez .

Reste donc à considérer les nombres premiers susdits ,  
5 , 13 , 17 . Je regarde aussi quels sont les autres nom-  
bres premiers qui ne se trouvent point en ma liste . Ces  
nombres sont 3 , 7 , 11 , 19 , 23 , 31 , 43 , 47 , 59 , 67 ,  
71 , &c. je compare les uns avec les autres pour voir si  
les premiers n'ont point quelque propriété qui ne soit  
point aux derniers , & je trouve que les hypoténuses ,  
sçavoir , 5 , 13 , 17 , &c. surpassent toutes de l'unité un  
multiple de 4 , & que les derniers 3 , 7 , 11 , &c. sont  
tous moindres de l'unité qu'un multiple de 4 , d'où on  
tirera ce théorème .

Tout nombre premier qui surpasse de l'unité un mul-  
tiple de 4 , est hypoténuse ; & tout nombre premier qui  
est hypoténuse , surpasse de l'unité un multiple de 4 .

Par cette propriété il sera facile de résoudre le pro-

## 26 METHODE DES EXCLUSIONS.

blême, en divisant le nombre donné en ses parties s'il en a, & voyant si quelqu'une d'icelles est un nombre premier qui surpasse de l'unité un multiple de 4.

Si on suppose que toute hypoténuse primitive est la somme de deux quarrés de divers ordres, la conséquence est bien facile à tirer, que cette hypoténuse surpasse de l'unité un multiple de 4; car tout quarré impair surpasse de l'unité un multiple de 4, (il n'est pas besoin d'en excepter 1) & partant un quarré impair étant joint avec un pair, (qui est toujours pairement pair) fera un pairement pair  $\rightarrow 1$ .

Pour ce qui est de trouver le triangle, on verra par ce qui a été dit si le nombre donné est la somme de deux quarrés, & on cherchera quels sont lesdits quarrés, en ôtant dudit nombre le quarré prochainement moindre, & puis le suivant; & voyant à chaque soustraction si ce qui reste est quarré, ce qui est déduit ailleurs plus au long, & ayant les deux quarrés dont le nombre est la somme, on aura le triangle comme cy-devant.

La précédente perquisition auroit pû être conduite d'une autre sorte, car puisqu'il faut que deux quarrés joints ensemble fassent un quarré, je prendrai tous les quarrés l'un après l'autre, & verrai par le second exemple quel quarré il lui faut ajouter pour faire un autre quarré; car par ce moyen on auroit promptement les quarrés de toutes les hypoténuses, tant primitives que multiples sans en excepter aucune. Et afin de n'avoir point deux fois les mêmes nombres, il ne faudra remarquer que les quarrés qui sont moindres que celui qu'on examinera.

Par exemple, ayant 16, son quart est 4; les parties relatives de 4 sont 1 & 4; leur différence est 3, qui est moindre que 4 racine de 16; & partant je retiendrai le quarré 9, qui étant joint à 16 donne 25, quarré de l'hypoténuse 5.

## QUATRIÈME EXEMPLE.

UN nombre composé étant donné avec les parties premières & analogiques, déterminer à combien de triangles il sert d'hypoténuse.

Puisque le nombre est composé il servira d'hypoténuse à quelques triangles multiples; & s'il est composé de seules hypoténuses, il servira aussi à des triangles primitifs: mais parce que les multiples proviennent nécessairement de primitifs, on s'arrêtera premièrement aux seuls primitifs.

Je trouve dans ma table quelques nombres composés, comme 25, 65, 85, & je trouve que 25 ne sert qu'à un seul triangle primitif, non plus que les nombres premiers: mais 65 & 85 servent chacun à deux triangles primitifs.

Il faut donc qu'il y ait quelque ressemblance entre 25 & les nombres premiers, qui ne soit pas entre 65 ou 85, & lesdits nombres premiers.

Je trouve que 25 ne peut être mesuré que par un seul nombre premier, non plus que les nombres premiers; mais 65 & 85 se mesurent chacun par deux nombres, celui-là par 5 & 13, & celui-ci par 5 & 17.

Et de-là il s'ensuivra que les puissances des nombres premiers ne serviront d'hypoténuse qu'à un seul triangle primitif. Je l'examine à 125 & 625 puissances de 5, & je le trouve ainsi, car chacun desdits nombres n'est qu'une seule fois la somme de deux quarrés premiers entr'eux: d'où je conclus la vérité dudit théorème.

Mais les nombres qui se mesurent par deux nombres premiers differens, (comme 65 qui se mesure par 5 & 13) servent d'hypoténuse à deux triangles primitifs, puisqu'ils sont deux fois la somme de deux quarrés premiers entr'eux.

De-là il s'ensuit que si on multiplie une hypoténuse par un nombre qui la mesure, le produit ne servira pas d'hyp-



## 28 METHODE DES EXCLUSIONS.

potenuse à plus de triangles primitifs; par exemple, 325 ne doit servir d'hypotenuse primitive qu'à deux triangles, non plus que 65 : car encore que 325 soit mesuré par 5 & 25, ] & 65 par 5 seulement, néanmoins l'un & l'autre n'est mesuré que par les deux nombres premiers 5 & 13, joint què les quarrez & les autres puissances qui ont un nombre premier pour racine, ne servent d'hypotenuse qu'à un seul triangle primitif.

Cette remarque sera confirmée par l'examen qu'on fera de 325, par lequel on trouvera qu'il n'est que deux fois la somme de deux quarrez premiers entr'eux, & partant ne sert d'hypotenuse qu'à deux triangles primitifs.

Je compose par après un nombre de trois hypoténuses premières, & pour plus de facilité je prens les moindres, sçavoir 5, 13, 17.

Leur produit est 1105, je regarde combien de fois il est la somme de deux quarrez premiers entr'eux, ce qui se fera ôtant de 1105 le carré prochainement moindre, sçavoir 1089, le reste sera 16 qui est un carré; & partant 1105 est la somme des deux quarrez 1089. & 16.

J'ôte par après du même 1105 l'autre carré précédent, sçavoir 1024, reste 81 qui est encore un carré; & ainsi continuant on trouvera que 1105 est quatre fois la somme de deux quarrez : d'où je conclus qu'il sert d'hypotenuse à quatre triangles primitifs.

On pourroit trouver lesdits quarrez d'une autre sorte, sçavoir ôtant le premier carré 1089, & au reste 16 ajoutant 65, qui est la somme de 33 & 32, racines dudit 1089, & du carré prochainement moindre.

Et à la somme 81 ajoutant 63 qui est la somme des deux racines moindres chacune de l'unité que les précédentes, & ainsi continuant tant que ladite somme sera moindre que le reste, ce qui arrive à la dernière somme 529, qui étant ôtée de 1105 reste 576; car si on passoit outre,

16	4
65	
<hr/>	
81	9
63	
<hr/>	

la somme seroit plus grande que le reste. 144 12

Autant de fois qu'on a un quarré pour ladite 61

somme, y comprenant même le premier nombre 205

trouvé 16, autant de fois le nombre est la som- 59

me de deux quarrés : mais il faudra prendre gar- 264

de s'ils sont tous premiers entr'eux, ce qui se 57

connoitra si aucun d'iceux ne se mesure par quel- 321

qu'une des parties du nombre, qui sont ici 5, 55

13, 17 : mais on a parlé de ceci ailleurs. 376

Je vois donc qu'un nombre qui ne se mesure 53

que par un seul nombre premier, ne sert d'hypo- 429

ténuse primitive qu'à un seul triangle. S'il se me- 51

sure par deux nombres premiers, il sert à deux 480

triangles. S'il se mesure par trois nombres pre- 49

miers, il sert à quatre triangles. 529 23

Il faut donc voir quel rapport 1, 2, 4, a avec 2 ; partant il faudroit que le nombre qui auroit quatre

1, 2, 3. nombres, & 1, 2, 4, se suivent en l'ordre des 529 23

Je vois que 1, 2, 3, se suivent en l'ordre des 529 23

nombres, & 1, 2, 4, se suivent en l'analogie de 529 23

2 ; partant il faudroit que le nombre qui auroit quatre 529 23

nombres premiers fût huit fois hypoténuse, & celui qui en 529 23

auroit cinq fût seize fois hypoténuse : car de même que 529 23

4 est le troisième nombre de l'analogie de 2, & partant a 529 23

rapport à 3 ; de même 8 est le quatrième, & 16 est le cin- 529 23

quième. 529 23

Pour s'assurer davantage de cette verité, il faut re- 529 23

chercher quelle raison ou convenance on peut apporter 529 23

de cette proportion. 529 23

Puisque les nombres composez servent à plus de trian- 529 23

gles que les premiers, il faut que cette augmentation pro- 529 23

vienne des parties. Or ces parties doivent être premieres 529 23

entr'elles, autrement les puissances auroient plus de trian- 529 23

gles que leurs racines. 529 23

Cela ne provient donc pas simplement de la multitude 529 23

des parties, mais des parties premieres seulement : mais 529 23

ces parties premieres ne doivent pas être prises simplement selon leur multitude, puisque la multitude des triangles n'est pas égale à la multitude desdites parties premieres.

Reste donc à considerer lesdites parties en tant qu'elles composent le nombre : il les faut donc prendre deux à deux, en telle sorte toutefois qu'elles soient premieres entr'elles, car autrement elles ne donneroient pas des quarez premiers entr'eux ; & parce qu'ayant pris une des parties, si on veut faire le nombre, l'autre partie vient nécessairement ensuite, on nommera ces parties relatives ; par exemple, si le nombre est 1105, dont les parties premieres sont 5, 13, 17, quand on prendra 5 pour une des parties, on prendra 13 & 17, (c'est à-dire le produit de 13 par 17) pour la partie relative audit 5.

Il faut donc voir en combien de façons on peut faire chaque nombre par deux parties relatives premieres entr'elles.

Et premierement les nombres premiers, & leurs puissances ne peuvent être faits que d'une sorte, sçavoir en prenant l'unité pour une des parties, & le nombre entier pour l'autre ; ainsi 5 ne peut être fait que par 1 & 5. La même chose arrive aux puissances, car 125 cube de 5 ne peut aussi être fait que d'une façon, sçavoir par 1 & 125, car si on prenoit 5 & 25, les parties ne seroient pas premieres entr'elles ainsi qu'il est requis.

Les nombres qui sont mesurez par deux nombres premiers comme 65, qui a 5 & 13 pour parties, peuvent être faits en deux façons, sçavoir en prenant 1 d'un côté & le produit de 5 & 13 de l'autre, & en prenant 5 d'un côté & 13 de l'autre pour la seconde façon.

Le nombre qui a trois parties, comme 1105 qui a 5, 13, 17, se fait en quatre façons ; sçavoir 1 par 5, 13 & 17, ] 5 par 13 & 17, ] 13 par 5 & 17, ] 17 par 5 & 13.

Si le nombre avoit quatre parties premieres, comme

32045, qui a 5, 13, 17, 29, il se feroit en huit façons. On prendra 1 d'un côté, par 5, 13, 17 & 29, ou le nombre entier, puis 5 par 13, 17 & 29, ] 13 par 5, 17, & 29, ] 17 par 5, 13 & 29, ] 29 par 5, 13 & 17, ] 5 & 13 par 17 & 29, ] 5 & 17 par 13 & 29, ] 5 par 29, 13 & 17, qui sont en tout huit façons de faire le nombre donné.

De la même maniere on trouvera 16 façons avec cinq parties, & trente-deux façons avec six, &c.

Ayant ainsi trouvé les primitifs, on viendra aux multiples, & pour les trouver il faudra compter les primitifs de chacune des parties : ainsi ayant 65 dont les parties sont 5 & 13, chacune desdites parties sert à un primitif, & partant 65 servira à deux multiples, & en tout à quatre triangles.

Si on donnoit 325 dont les parties sont 25, 13, de ces deux il faut faire toutes les autres, commençant par celles qui n'ont qu'une partie, & prenant aussi leurs puissances, puis celles qui ont deux parties ; & ainsi on aura 5, 25, 13 & 65, ou 5 par 13, les trois premières donnent chacune un triangle, & la dernière qui a deux nombres différens en donne deux, & partant ledit 325 aura cinq multiples, qui avec les deux primitifs font en tout sept triangles.

Ayant ces quantitez, je chercherai les moyens de trouver les autres sans avoir la peine de les compter ; & voici comment on raisonnera pour cet effet..

La multitude des triangles auxquels un nombre sert d'hypoténuse, n'augmente pas pour la grandeur des parties, mais seulement pour leur multitude ; par exemple, le nombre qui sera fait de 13 & 17, n'aura pas plus de triangles que celui qui proviendra de 5 & 13, car l'un & l'autre n'a que deux nombres premiers : mais si on prenoit 325, qui est fait de 25 & 13, il aura plus de parties, & partant plus de triangles que 65, qui n'a que 5 & 13 comme on vient d'examiner ; & partant cette multitude de

parties vient ou de la grandeur des puissances, ou de la multitude des parties premières & de leurs puissances.

Il faudra donc dans l'examen prendre seulement le nombre qui dénote la puissance, sans se soucier de quel nombre il est puissance, puisque sa quantité n'y fait rien.

Ayant donc trouvé que le produit de 5 par 13 a quatre triangles, je cherche les exposans desdites parties premières, ou de leurs puissances; & je trouve 1 & 1: je chercherai donc un moyen de rencontrer 4 par le moyen de 1 & 1.

Si je double chacun des exposans 1 & 1, j'aurai 2 & 2; dont la somme sera 4, qui est le nombre requis.

Il faut donc voir quelque'autre exemple, pour voir si la même chose arrivera.

3252 pour parties premières & analogiques 25 & 13; & sert d'hypoténuse à sept triangles.

Les exposans desdites parties sont 2 & 1, il est manifeste que le double d'iceux, sçavoir 4 & 2 étans joints ne feront pas un nombre impair tel qu'est 7, & partant la règle premièrement trouvée n'est pas bonne. Il faudra donc chercher un autre rapport entre 1, 1 & 4.

Je trouve que le double du produit de 1 par 1, étant joint aux mêmes 1 & 1, donne 4.

La même chose se fera en cherchant 7 par le moyen de 2 & 1, car le double du produit est 4, qui étant joint à 2 & 1 donne 7.

J'éprouverai encore cette règle sur d'autres nombres, & je trouve qu'elle convient à tous.

Mais si le nombre se mesuroit par plusieurs nombres premiers, & qu'il y en eût plus de deux, cela pourroit apporter quelque difficulté; par exemple, si on donnoit 1105 qui se mesure par 5, 13, 17, & qui a 1, 1, 1, pour exposant de ses parties; il faut par le moyen d'iceux trouver 13, car il sert d'hypoténuse à treize triangles.

Si on prenoit le double du produit des trois exposans,  
&

& qu'on lui ajoûtât les trois exposans, on n'auroit que 9, ce n'est donc pas la règle qu'il faut suivre.

Je prendrai donc les exposans deux à deux, & premièrement avec 1 & 1 je trouverai 4. Je retiendrai ce 4 comme s'il étoit exposant, & le comparerai avec le 1 qui reste.

Le double du produit de 1 & 4 est 8, auquel joignant les mêmes 1 & 4, on aura 13 comme il est requis.

Pour s'assurer davantage de cette règle, on prendra quelque grand nombre, comme le produit du cube de 5 par le carré de 13 & par 17.

Les exposans desdites parties sont 1, 2, 3.

Je prens le double du produit de 1 & 2, & lui ajoûte les mêmes 1 & 2 pour avoir 7.

Puis je prens le double du produit dudit 7 par 3 qui reste, & lui ajoûte les mêmes 7 & 3 pour avoir 52.

Je dis donc que le nombre donné sert d'hypoténuse à cinquante-deux triangles.

Je chercherai par une autre voye si ledit nombre a cinquante-deux triangles, sçavoir en comptant toutes les par-

A.	1	b. q. par C. cub.
B.	1	a. par b. par C. cub.
B. q.	1	a. par C. cub.
C.	1	a. par b. q. par c. q.
C. q.	1	a. par b. q. par C.
C. cub.	1	a. par b. q.
A. par B.	2	b. par C. cub.
A. par B. q.	2	C. cub.
A. par C.	2	b. q. par C. q.
A. par C. q.	2	b. q. par C.
A. par C. cub.	2	b. q.
B. par C.	2	a. par b. par C. q.
B. par C. q.	2	a. par b. par C.
B. par C. cub.	2	a. par b.
B. q. par C.	2	a. par C. q.
B. q. par C. q.	2	a. par C.
B. q. par C. cub.	2	a.
A. par B. par C.	4	b. par C. q.
A. par B. par C. q.	4	b. par C.
A. par B. par C. cub.	4	b.
A. par B. q. par C.	4	C. q.
A. par B. q. par C. q.	4	C.
A. par B. q. par C. cub.	4	o. primitifs.

Somme 52

ties, & les triangles primitifs qui appartiennent à chacune.

Pour faire cela plus aisément, on prendra seulement les puissances, puisque la diversité des nombres premiers n'y fait rien.

Je pose donc que le nombre soit A. par B. q. par C. cub.

Je considere lesdites parties en toutes les façons possibles, prenant premièrement celles qui ne servent qu'à un seul triangle primitif, sçavoir celles où il n'y a qu'une seule puissance ou racine; puis celles qui seront faites de deux différentes puissances, & qui servent à deux triangles; & enfin celles qui contiennent trois puissances, & qui servent à quatre triangles comme on voit cy-dessus.

Les parties sont premièrement en grosses lettres, puis ensuite la multitude des triangles primitifs de ladite partie. Et derriere en petites lettres est la partie relative, qui est le nombre de multiplicité, sçavoir le nombre par lequel le triangle est multiple. Par exemple A. par C. q. sert à deux triangles primitifs, lesquels seront multipliez par b. q. par C. Et supposant que C. cub. soit 125, que B. q. soit 169, & que A. soit 17, on aura 425. Pour A. par C. q. qui servira d'hypotenuse à deux triangles qu'il faudra multiplier par 845, qui est b. q. par C.

#### C I N Q U I E M E E X E M P L E.

**U**N nombre étant donné, déterminer combien de fois il est la somme de deux quarez.

Il faut premièrement voir si on ne trouvera point quelque propriété particuliere aux nombres qui sont la somme de deux quarez, afin qu'on puisse connoître plus facilement si le nombre est la somme de deux quarez.

Si on n'avoit rien de connu, & qu'on ne sçût point que la somme de deux quarez inégaux est une hypotenuse, il faudroit assembler les quarez, & faire une table des sommes, comme on voit au troisième exemple.

Cela fait , je considere plusieurs desdites sommes prises de suite , comme 5 , 10 , 13 , 17 , 20 , 25 , 26 , 29 , 34 , 41 , 37 , 40 , 45 , 52 , 61 , 50 , 53 , &c. & je regarde si elles n'ont rien de semblable entr'elles que les autres nombres n'ayent point.

Et parce que je vois diverses sortes de nombres , je les sépare par classes selon leurs diversitez.

Et premièrement , je trouve des nombres pairs & des impairs , des nombres premiers & des composez , des impairs premiers & des composez , des pairs dont les uns sont pairement pairs , & les autres impairement pairs.

Je considère premièrement les nombres premiers comme les plus simples , & je trouve 5 , 13 , 17 , 29 , 37 , 41 , 61 , 53.

Je regarde quels sont les autres nombres premiers non compris en cette table , & j'aurai 3 , 7 , 11 , 19 , 23 , 31 , 43 , 47 , 59 ; j'examine s'il y a quelque difference entr'eux , & si les précédens ont quelque chose qui soit commune à tous , & qui ne convienne à aucun des derniers.

Je trouve que 5 , 13 , 17 , & les autres qui sont la somme de deux quarez , surpassent de l'unité un multiple de 4 , ou bien qu'ils sont pairement pairs  $+1$  , & les autres nombres , sçavoir 3 , 7 , 11 , &c. sont tous pairement pairs  $-1$ .

Voilà pour ce qui est des nombres premiers.

Quant aux composez , puisqu'ils sont de diverses sortes , il faut voir d'où peut provenir cette diversité , & si ce ne seroit point de la differente façon d'assembler les quarez.

Et sur cet assemblage , je trouve que les nombres premiers sont tous faits de deux quarez premiers entr'eux & de divers ordre.

Et que si on assemble deux quarez impairs premiers entr'eux , on aura pour la somme un impairement pair qui sera double d'un des nombres ci-dessus pairement pair  $+1$ .



### 36 METHODE DES EXCLUSIONS.

Et par les autres assemblages on trouvera les autres sommes composées.

Il faudra par-après considérer les parties de ces nombres composez, & je trouve de deux sortes de compositions; car les uns n'ont point d'autres parties que des nombres premiers pairement pairs  $+1$ , ou leurs puissances, comme 25, 65, 85. Les autres ont pour parties lesdits nombres premiers, & d'autres qui sont pairement pairs  $-1$ , ou qui sont de l'analogie de 1. Et considérant ces autres nombres qui ne sont point la somme de deux quarez, je trouve qu'ils sont tous ou quarez, ou doubles quarez; par exemple, 10 a pour parties 2 & 5, desquels 5 est la somme de deux quarez, & 2 est double quarré.

20 a pour parties 4 & 5, desquelles 4 est un quarré.

45 a pour parties 9 & 5, desquelles 9 est quarré.

De là je conclurai que tout nombre premier pairement pair  $+1$ , est la somme de deux quarez; & que lesdits nombres premiers étant multipliez par un quarré, ou par un double quarré, donnent des nombres qui sont aussi sommes de deux quarez.

Il faut maintenant considérer s'il peut y avoir des nombres qui soient plusieurs fois la somme de deux quarez.

On voit par la table que lesdits nombres premiers ne sont qu'une fois chacun la somme de deux quarez.

Pour les nombres composez nous en avons remarqué de deux sortes, dont les uns sont multiples d'un nombre, qui est la somme de deux quarez par un qui ne l'est point, comme 45 qui est multiple de 5 par 9; quand on ne verroit point par la table qu'il n'est point plus de fois la somme de deux quarez que son primitif; la raison montre assez que 45, par exemple, dont les parties premières & analogiques sont 5 & 9, ne peut pas avoir plus de compositions que son primitif 5; car puisque de ses deux parties 5 & 9, l'une, sçavoir 5, est la somme de deux quarez, & l'autre qui est 9 ne l'est point, il est certain que ledit 9 ne

lui pourra communiquer ce qu'il n'a point ; mais seulement parce qu'il est quarré, il n'empêchera point que la propriété de 5 ne passe en 45, puisqu'un quarré multipliant un quarré fait un quarré, & aussi 9 multipliant 4 & 1 dont la somme est 5, donnera les deux autres quarez 36 & 9 dont la somme sera 45, mais il ne lui pourra pas ajouter de nouvelle composition, ni le faire être somme de deux autres quarez que des multiples par 9, de ceux dont 5 est la somme.

Reste donc que le nombre qui est plusieurs fois la somme de deux quarez, soit composé de seuls nombres premiers pairement pairs  $+1$ , ou au moins qu'il soit multiple d'un nombre composé desdits nombres premiers seulement.

Mais pour examiner les differens nombres composez, il faut commencer par les plus simples, sçavoir par ceux qui ne se mesurent que par un seul nombre premier, comme sont les puissances dont la racine est un nombre premier pairement pair  $+1$ .

Je trouve que 25 quarré de 5, n'est qu'une seule fois la somme de deux quarez.

125 cube de 5 est deux fois la somme de deux quarez.

625 qq. de 5 l'est aussi deux fois.

Il sera facile de voir combien de fois chacun de ces petits nombres est la somme de deux quarez, en ôtant les quarez moindres, comme on voit au quatrième exemple.

Or on voit que chacun desdits nombres qui sont puissances d'un nombre premier, n'est qu'une seule fois la somme de deux quarez premiers entr'eux ; de sorte qu'il ne reste plus qu'à voir combien de fois il est la somme de deux quarez composez entr'eux, c'est-à-dire, qui ont une commune mesure ; ce qui se fera aisément comme il s'ensuit.

Il faut voir combien de fois le nombre se peut diviser en deux parties, dont l'une soit un quarré, & compter combien de fois chacune des sommes relatives est la som-

me de deux quarrez premiers entr'eux ; car autant de fois le nombre donné est la somme de deux quarrez multiples, & qui ont l'autre partie relative, qui est un carré pour commune mesure.

Par-là on voit qu'un carré, dont la racine est un nombre premier, n'est qu'une fois la somme de deux quarrez non plus que sa racine. Que le cube & le qq. sont chacun deux fois la somme de deux quarrez.

Que la cinquième & sixième puissance sont chacune trois fois la somme de deux quarrez, & ainsi continuant.

D'où il sera facile de faire une règle pour trouver combien de fois chaque puissance, dont la racine est un nombre premier, est la somme de deux quarrez ; sçavoir en prenant les exposans desdites puissances, & considerant de quelle façon on tirera 1 des exposans 1 & 2, & comment on aura 2 par 3 & 4, &c. Car on voit que si on prend la moitié de l'exposant lorsqu'il est pair, ou le milieu lorsqu'il est impair, on aura ce qu'on cherche.

Il faut maintenant voir ce qui appartient aux nombres qui sont mesurez par plusieurs nombres premiers, qui surpassent de l'unité un multiple de 4.

Je trouve dans la table 65 & 85, dont le premier a 5 & 13 pour parties, & le second 5 & 17, & chacun desdits nombres est deux fois la somme de deux quarrez premiers entr'eux. Pour des quarrez multiples il n'y en a point, parce qu'aucun desdits nombres n'a de carré pour partie.

On trouvera aussi que si le nombre donné a pour parties trois nombres premiers comme 1105, qui est produit par 5, 13, 17, il sera quatre fois la somme de deux quarrez premiers entr'eux, comme on a vû au quatrième exemple, & il ne peut être la somme de deux quarrez multiples, parce qu'il n'a point de partie carrée. On verra audit quatrième exemple combien de fois chaque nombre est la somme de deux quarrez premiers entr'eux, car ils le sont autant de fois qu'ils sont hypoténuses primitives, comme il a été dit.

Mais si le nombre donné peut être mesuré par quelque quarré, il sera la somme de quarez multiples autant de fois que la partie relative est la somme de deux quarez primitifs. Et pour avoir une règle par laquelle je puisse trouver la multitude des couples de quarez, sans avoir la peine de les déchiffrer tous par la considération de toutes les parties quarrées; je chercherai, par ce qui a été dit, la multitude des couples de quarez de plusieurs nombres, & après en avoir quelques-uns, je verrai quelle règle on pourra donner qui leur convienne à tous; & afin d'éviter la difficulté de cette recherche, je choisirai les moindres nombres, sçavoir ceux qui ne sont mesurez que par deux nombres premiers.

Ainsi je trouve qu'un nombre composé de deux nombres premiers, comme 65, dont les parties sont 5 & 13, est deux fois seulement la somme de deux quarez.

Si les parties du nombre sont un quarré & une racine, il sera trois fois la somme de deux quarez, car il aura deux primitifs & un multiple.

Si les parties sont un cube & une racine, il sera quatre fois la somme de deux quarez.

Si les parties sont un quarré quarré & une racine, il sera cinq fois.

Si les parties sont deux quarez, il sera quatre fois la somme de deux quarez.

Si c'est un quarré & un cube, il sera six fois, &c.

Je vois ici que la grandeur des parties ne fait rien à la multitude des couples de quarez; par exemple, 17 ou son quarré 289, pour être plus grand que 5 ou son quarré 25, n'est pas pour cela plus de fois la somme de deux quarez; mais l'augmentation des puissances augmente cette multitude: ainsi une cinquième puissance donne trois couples, & un quarré n'en a qu'une.

Il faudra donc considérer seulement lesdites puissances, lesquelles seront commodément représentées par leurs exposans.

Je ferai donc une petite table des parties de quelques nombres, auxquelles on mettra les exposans desdites parties au lieu d'icelles parties, comme on voit ici.

Car par exemple, 1, 2 signifient que les parties du nombre sont une racine, ou nombre premier, & un quarré; & ensuite on met 3 séparé d'une ligne, qui montre que le nombre dont les parties sont un quarré, & un nombre premier, est trois fois la somme de deux quarréz.

1	1	2
1	2	3
1	3	4
1	4	5
1	5	6
<hr/>		<hr/>
2	2	4
2	3	6
2	4	7
2	5	9
2	6	10
<hr/>		<hr/>
3	3	8
3	4	10
3	5	12
3	6	14

Or voici comme on trouvera ladite multitude de couples de quarréz. Par exemple, on veut sçavoir combien de fois un nombre, dont les parties sont un quarré & une cinquième puissance, est la somme de deux quarréz.

Premièrement, parce qu'il se mesure par deux nombres premiers, je conclus qu'il est deux fois la somme de deux quarréz premiers entr'eux.

Reste donc à trouver les couples des quarréz multiples.

Pour les trouver je divise le nombre en deux parties relatives, l'une desquelles soit un quarré, & ce en toutes les façons possibles.

Pour le faire avec plus de facilité, je nommerai les parties, que l'une soit A. q. & l'autre B. cinquième puissance.

Je prendrai donc A. q. A. q. --- B. 5<sup>me</sup> puiss. | 1  
pour une des parties relatives; l'autre partie sera B. B. q. --- A. q. par B. cub. | 2  
B. qq. -- A. q. par B. | 2  
cinquième puissance, la B. q. par A. q. --- B. cub. | 1  
quelle n'est qu'une fois la B. qq. par A. q. --- B. | 1  
somme de deux quarréz

premiers entr'eux, comme Somme 7

il a été dit, je marque donc 1 ensuite. Puis je prens B. q. pour une des parties: la relative sera A. q. par B. cubé, qui

qui est deux fois la somme de deux quarrez premiers entr'eux : je marque donc 2 ensuite.

Et ainsi continuant à prendre les parties quarrées comme on voit ici , on aura les primitifs de la partie relative , qui donneront autant de multiples au nombre total , puis-que les quarrez primitifs appartenans à la seconde partie , sont tous deux multipliez par la premiere partie qui est un quarré.

On aura donc 7 multiples , qui étant joints aux deux primitifs , qui sont particulièrement affectez au nombre total , font en tout 9 couples de quarrez dont la somme est ledit nombre qui a pour parties un quarré & une cinquième puissance.

Il faut donc de la multitude des couples de plusieurs nombres inferer quelque règle pour trouver ladite multitude.

Or je ne trouve point de règle par laquelle je puisse trouver à tous la multitude des quarrez par l'inspection des exposans des puissances desdites parties.

Aussi lesdits exposans n'expriment pas ladite multitude de couples de quarrez , comme ils faisoient aux hypoténuses pour en exprimer la multitude. Car , par exemple , une cinquième puissance est bien cinq fois hypoténuse , mais elle n'est que trois fois la somme de deux quarrez , & une sixième puissance qui est six fois hypoténuse , n'est aussi que trois fois la somme de deux quarrez.

Exposans.				
1	1	1	1	2
1	2	1	1'	3
1	3	1	2	4
1	4	1	2'	5
1	5	1	3	6
2	2	1'	1'	4
2	3	1'	2	6
2	4	1'	2'	7
2	5	1'	3	9
2	6	1'	3'	10
3	3	2	2	8
3	4	2	2'	10
3	5	2	3	12
3	6	2	3'	14

On mettra donc la multitude desdites couples de quarrez ensuite des exposans , comme on voit ici , pour s'en servir au lieu desdits exposans.

## ♦♦ METHODE DES EXCLUSIONS.

Mais parce que les puissances dont l'exposant est pair, n'ont pas une plus grande multitude de couples de quarrés que la précédente puissance dont l'exposant est impair; il semble qu'il est à propos de ne pas obmettre cette condition, & partant je marque d'un accent le nombre de multitude appartenant aux puissances paires.

Ainsi ensuite des exposans 1, 2, je mets les nombres de multitude 1, 1'; & après les exposans 2, 4, je mets 1', 2', & je me servirai desdits nombres de multitude 1, 1', pour trouver 3 qui est ensuite; & de 1', 2', pour trouver 7 qui est après.

Mais parce que je voi que les mêmes nombres de multitude qui appartiennent aux exposans ne donnent pas le même nombre de multitude pour le nombre donné, & que ceux qui sont marquez, sçavoir ceux dont l'exposant est pair, donnent un plus grand nombre que ceux dont l'exposant est impair, il est manifeste qu'il faut avoir égard à la qualité des exposans, ce qui consiste à voir s'il est pair ou impair; car, par exemple, 1, 2, provenans de 1 & 3 donnent 4; mais les mêmes 1, 2', provenans de 1, 4, donnent 5; & si les mêmes 1', 2, viennent de 2, 3, ils donneront 6; & venant de 2, 4, ils donneront 7.

Exposans.				
1	1	1	1	2
1	2	1	1'	3
1	3	1	2	4
1	4	1	2'	5
1	5	1	3	6
<hr/>		<hr/>		<hr/>
2	2	1'	1'	4
2	3	1'	2	6
2	4	1'	2'	7
2	5	1'	3	9
2	6	1'	3'	10
<hr/>		<hr/>		<hr/>
3	3	2	2	8
3	4	2	2'	10
3	5	2	3	12
3	6	2	3'	14

De là on voit manifestement qu'on ne peut donner une même règle générale, puisque les mêmes nombres 1, 2, donnent quatre nombres différens; mais il faudra distinguer si les exposans dont lesdits 1, 2, ou autres nombres sont dérivez, sont pairs ou impairs.

Cette diversité se peut considérer en trois façons: car ou les deux exposans sont tous deux impairs, ou ils sont

tous deux pairs, ou l'un est pair & l'autre impair.

Je chercherai donc séparément des regles pour chacune de ces trois façons.

Et premierement quand les exposans sont tous deux impairs. Le premier exemple de la Table est quand les exposans des parties du nombre donné sont 1, 1, les nombres de multitude qui leur appartiennent sont aussi 1, 1; je regarde comment je ferai 2 avec 1, 1, & je voi que si on prend la somme desdits 1 & 1 on aura 2.

Je prens un autre exemple, sçavoir le troisieme où les exposans sont 1, 3, & leur nombre de multitude sont 1, 2: or la somme de 1, 2, n'est pas 4 ainsi qu'il seroit requis, & partant ce n'est pas là la regle.

Je chercherai donc 2 avec 1 & 1 d'une autre sorte, & je trouve que le double du produit de 1 par 1 est 2.

Et considérant les autres exemples où les deux exposans sont tous deux impairs, je trouve les nombres qui appartiennent à chacun d'iceux en la même sorte; car le double du produit de 1, 2, qui appartiennent à 1, 3, est 4, & ainsi des autres; d'où je conclus que la regle est bonne.

Je passe aux exposans qui sont tous deux pairs. Le premier exemple est celui dont les exposans sont 2 & 2, leurs nombres sont 1', 1', (sçavoir la moitié d'iceux, & aux exposans impairs le milieu,) je cherche le moyen de faire 4 avec 1 & 1.

Pour suivre le plus que je pourrai la premiere méthode; il faudra que je prenne le produit de 1 par 1, lequel est 1, dont le quadruple sera 4. Mais il n'en ira pas de même aux exposans 2 & 4, car les nombres qui leur appartiennent sçavoir 1' & 2', donneroient 8, & non pas 7, ainsi qu'il est requis.

J'essayerai donc à faire 4 par le moyen des mêmes 1' & 1' du premier exemple d'une autre façon, en suivant encore le plus que faire se pourra la premiere méthode.

On prendra donc encore le produit de 1 par 1, lequel



#### 44 METHODE DES EXCLUSIONS.

est 1 ; son double est 2 , auquel joignant les mêmes 1 & 1 ; on aura 4 , ainsi qu'il est requis.

Je prens ensuite les exposans 2 & 4 : les nombres qui leur appartiennent, sçavoir leur moitié est 1 & 2 , leur produit est 2 dont le double est 4 , auquel joignant les mêmes 1 & 2 , on aura 7 , qui est le nombre qu'il falloit avoir.

J'éprouve la même chose aux exposans 2 & 6, & trouve 10 , d'où je conclus que la regle est bonne.

Je passe par après à la troisième distinction , sçavoir quand l'un des exposans est pair , & l'autre impair. Le premier exemple est quand les exposans sont 1 & 2 , leur milieu & moitié sont 1 & 1' , avec lesquels il faut trouver 3. Je prens comme auparavant le produit de 1 par 1 , qui est 1 , son double est 2.

Or puisque les deux exposans étant impairs on prend simplement le double du produit sans rien ajouter , & lorsque lesdits exposans sont tous deux pairs on ajoute au double du produit les deux nombres qui se sont multipliés , il se pourra faire que quand l'un des exposans est pair & l'autre impair , il faudra seulement ajouter un des nombres au double du produit susdit.

Partant audit produit 2 j'ajoute l'un des nombres , sçavoir 1 pour avoir 3.

Mais parce que chacun des nombres qui se sont multipliés est 1 , je ne puis encore sçavoir si c'est celui qui vient de l'exposant pair , ou celui qui vient de l'impair.

Je prens donc un autre exemple , sçavoir le suivant auquel les exposans sont 1 & 4. Les nombres qui en dépendent sont 1 , 2' , le double de leur produit est 4 ; mais parce qu'il faut avoir 5 , on ajoutera 1 audit 4 : or cet 1 est le nombre qui provient de l'exposant impair , je dirai donc qu'au double du produit il faut ajouter le milieu de l'exposant impair.

Je regarde aux autres exemples si la même chose arri-

vera comme à ceux dont les exposans sont 1, 6, ] 2, 3, ] 1, 5, &c. & je trouve que cette regle convient à tous, d'où je conclus qu'elle est bonne.

Il faut maintenant voir quand le nombre donné sera mesuré par trois nombres premiers differens ; par exemple, si les parties sont un nombre premier, un quarré & un cube, lesquelles soient A. B. q. & C. cub.

Je les mets en deux B. q. ---- A. par C. cub. | 2  
parties relatives, en tel C. q. --- A. par C. par B. q. | 4  
le sorte que l'une soit B. q. par C. q. ---- A. par C. | 2  
un quarré, & je prens

les primitifs de la partie relative au quarré que je mets ensuite. Par exemple, prenant C. q. pour une des parties, la relative sera A. par C. par B. q. laquelle contenant trois sortes de nombres premiers, elle sera quatre fois la somme de deux quarréz premiers entr'eux ; je mets donc 4 ensuite, & ainsi des autres.

Et assemblant tous lesdits primitifs des parties qui seront multiples au nombre total, je trouve huit multiples, auxquels joignant les quatre primitifs dudit nombre total, on aura en tout douze couples de quarréz, desquels le nombre donné est la somme.

Il faut donc trouver 12 par le moyen des exposans 1, 2, 3, ou des nombres qui leur appartiennent 1, 1', 2.

Et premierement de 1 & 1' j'ai 3. Je prendrai donc 3 au lieu de 1, 1', & ainsi j'aurai 3 & 2 : leur produit est 6 dont le double est 12, qui est la multitude requise des couples de quarréz.

On pourroit ici trouver quelque difficulté sur le 3 qui provient de 1 & 1', sçavoir s'il doit être pris comme venant d'un exposant pair ou d'un impair, puisqu'il provient de tous les deux ensemble ; mais la regle nous montre que l'impair prévaut ici, car autrement il faudroit ajouter un des nombres au double du produit 12.

Mais ici il faut considérer que l'exposant pair montre

que l'exposé est quarré, & l'exposant impair montre que l'exposé n'est pas quarré: si donc le nombre de multitude est celui qui provient de plusieurs exposans, ou qui est la moitié ou milieu d'un d'icels exposans, ce nombre de la multitude appartient à un nombre quarré, & il doit être réputé provenir d'un pair: mais si ledit nombre de multitude appartient à nombre non quarré, il doit être réputé comme provenant d'un impair. Si donc entre les parties analogiques d'un nombre, il s'en trouve une qui ne soit point quarrée, le nombre ne sera point quarré, & les parties non quarrées auront leurs exposans impairs.

D'où il s'ensuit qu'entre plusieurs exposans, s'il y en a quelqu'un qui soit impair, le nombre qui est produit par les parties à qui appartiennent lesdits exposans, suit la loy des exposans impairs.

Ainsi en notre exemple, ayant premierement travaillé sur les exposans 1 & 2, qui donnent 3 pour le nombre de la multitude, ledit 3 doit être réputé comme provenant d'un exposant impair, parce qu'entre les exposans dont il provient il y en a un impair, ce qui fait que le nombre qui est trois fois la somme de deux quarrés n'est pas quarré, & partant son exposant doit être réputé impair.

On trouvera le même nombre 12 en mêlant autrement lesdits exposans. Comme si je multiplie à part les nombres 1, 2, provenans des exposans 1 & 3, j'aurai 4. L'autre exposant est 2, son nombre est 1', je multiplie donc 1' par 4, le produit est 4, dont le double est 8, auquel il faut ajouter le nombre qui provient de l'exposant impair, sçavoir 4, puisque l'autre nombre 1' provient d'un exposant pair, & on aura 12 comme cy-devant.

#### SIXIEME EXEMPLE.

**T**rouver tous les triangles qui ont un nombre donné pour différence de leurs moindres côtez.

Afin de trouver tout ce qui dépend de la connoissance

des nombres qui servent de difference aux côtez des triangles, je fais plusieurs triangles primitifs de suite, & je prens leur difference, en laissant les multiples, parce qu'ils ne peuvent rien avoir qui ne vienne des primitifs.

On voit ici tous les triangles primitifs dont les hypoténuses sont moindres que 100, & après eux est la difference de leurs moindres côtez.

3	4	5	1
5	12	13	7
8	15	17	7
7	24	25	17
20	21	29	1
12	35	37	23
9	40	41	31
28	45	53	17
11	60	61	49
16	63	65	49
33	56	65	23
48	55	73	7
13	84	85	71
36	77	85	41
39	80	89	41
65	72	97	7

Maintenant il faut voir comment on pourra trouver tous les triangles, la difference des moindres côtez étant donnée.

Je prendrai par exemple 7, & par son moyen je chercherai une regle pour trouver les triangles 5, 12, 13 & 8, 15, 17. Mais parce que 7 est nombre premier, & qu'il sert de difference à plusieurs triangles, il faut de nécessité qu'il y ait quelqu'autre propriété par laquelle on puisse trouver lesdits triangles, autrement ils ne se pourroient pas trouver; car quoique je sçache que 7 est different de l'unité d'un multiple de 8, cela ne me donne autre chose, sinon que 7 est proche du premier octonaire, ce qui ne pourra pas suffire pour trouver les deux triangles susdits, & les autres qui sont encore ensuite.

Oren considérant 7, je voi qu'il est la difference entre 1 & 8, & entre 2 & 9, sçavoir entre un quarré & un double quarré. Je regarderai donc si les autres nombres qui servent de difference entre les moindres côtez d'un triangle sont aussi la difference d'un quarré & d'un double quarré.

Et sans examiner 1 qui sert de difference entre 1, 2, & 8, 9, & autres, je viens à 17 qui sert de difference entre 1 & 18, & entre 8 & 25; de même 23 sert de difference entre 2 & 25, & entre 9 & 32, & chacune desdites couples contient un quarré & un double quarré.

De plus, je remarque qu'à chacune de ces couples il y a un des nombres moindres que la difference d'entr'eux; ainsi à la couple 9, 32, le moindre nombre 9 est moindre que 23 qui en est la difference.

Je verrai donc si par cette propriété je trouverai que 7 est la difference entre les moindres côtez des deux triangles 5, 12, 13, & 8, 15, 17.

Voici comme il faut s'y prendre.

7 sert de difference entre 1 & 8, & entre 2 & 9. Je prens leurs racines qui sont 1, 2", & 1", 3. Je marque les racines des doubles quarez, afin de les connoître d'avec celles des quarez, car on voit bien qu'il faut comparer la racine du double quarré avec le nombre dont elle provient d'une autre manière que celle du quarré simple, & qu'elles doivent produire un effet different l'une de l'autre.

Je mets donc 7, & ensuite les racines des deux couples susdites, comme on voit ici; sçavoir 1, 2", & 1", 3.

7	1	2"	2	3
	1"	3	1	4

Je considère par après les deux triangles qu'il faut trouver, sçavoir 5, 12, 13, & 8, 15, 17, je prens les quarez dont ils proviennent, qui sont 4, 9; & 1, 16.

Leurs racines sont 2 & 3, ] & 1, 4, que j'écris aussi ensuite.

Car

Car il faut remarquer que d'ordinaire la solution se trouve plus aisément par le moyen des racines que par les quarrez, de sorte que quand on aura des quarrez, si on ne trouve pas aisément par leur moyen ce qu'on cherche, on l'examinera par les racines, ce qui sert aussi à rendre la recherche plus facile par la septième règle, sçavoir en se servant de moindres nombres.

Il faut donc par le moyen de 1, 2", & 1", 3, trouver 2, 3, & 1, 4, sçavoir par les racines des quarrez & doubles quarrez dont 7 est la différence, trouver les racines des quarrez qui font les triangles qui ont 7 de différence entre leurs moindres côtes.

Je voi que 1", 2", sont les racines des moindres quarrez desdits triangles, & les deux grandes 3 & 4, se pourront trouver prenant en croix la somme de 1", 2", & de 1, 3.

On pourroit dire aussi que la

7	1'	2"	2	3
	1"	3'	1	4

donnent 2 & 4, qui sont les racines des quarrez pairs des triangles; & la somme & la différence de 1", 2", donnent 1 & 3, qui sont les racines des quarrez impairs.

Mais on pourroit encore se servir d'une seule couple pour un triangle; sçavoir si on prend la racine du double carré pour une des racines, & la somme des deux pour l'autre.

Ainsi à la première couple 1', 2", ] 2 sera une des racines requises, & 3 qui est la somme de 1 & 2 sera l'autre.

Et à l'autre couple 1", 3', ] 1 sera l'une des racines, & la somme de 1, 3, sçavoir 4, sera l'autre.

Et cette dernière façon si elle est bonne, comme il y a quelque apparence, sera plus commode, puisque chaque couple donne un triangle.

Ce qui me fait présumer qu'elle est bonne, est que les autres ne peuvent pas servir pour les triangles qui ont 1 de

# 50 METHODE DES EXCLUSIONS.

différence entre leurs côtes ; car 1 est la différence entre le carré & double carré 1, 2, le moindre desquels sçavoir 1 n'est pas plus grand que ladite différence 1.

Voici donc comme je l'examinerai à 1.

Les racines du carré & double carré susdit sont 1' & 1'', donc 1 sera une des racines, (sçavoir prenant la racine du double carré) & 2 qui est la somme des deux racines 1' & 1'' sera l'autre racine : on aura donc 1, 2, dont les carrés 1, 4, donnent le triangle 3, 4, 5, qui a 1 de différence entre ses moindres côtes.

Le même 1 est encore la différence entre le carré, & le double carré 8 & 9, dont les racines sont 2'', 3'.

On aura donc pour les racines des carrés 2 & 5, sçavoir la racine du double carré, & la somme des deux.

Ledits 2 & 5 donneront le triangle 20, 21, 29, qui a 1 de différence entre ses moindres côtes.

Il faut maintenant examiner les deux premières règles sur 17. Les carrés & doubles carrés dont il est la différence sont 1, 18, & 8, 25. Leurs racines sont 1', 3'', & 2'', 5'.

Je les dispose comme auparavant.

Par la première règle, je prendrai 17 

1'	3''	3	5
2'	5'	2	6

3 & 2 pour les racines des moindres carrés requis, & les sommes de 2'', 3'', & de 1', 5', pour les autres ; mais on ne pourra pas faire par ce moyen les triangles requis, car on auroit les carrés de 3 & 5, & de 2, 6, qui donneroient des triangles auxquels les trois côtes seroient pairs, & partant la différence qui seroit paire ne seroit pas 17.

Que si on vouloit accoupler autrement 5 & 6, & qu'on prit 2, 5, & 3, 6, on n'auroit pas aussi le triangle requis, car les carrés de 3 & 6 étant multiples de 3, donneroient un triangle auquel tous les côtes seroient mesurés par 3, & partant la différence des côtes ne pourroit pas être 17, puisqu'elle-même seroit aussi mesurée par 3, & partant

la premiere façon de trouver les triangles n'est pas bonne. Venons à la seconde.

La somme & la difference de  $1', 5'$ , sont les racines des quarrez pairs, & la somme & la difference de  $2'', 3''$ , sont les racines des quarrez impairs: mais cette regle ne réussit pas non plus que la premiere, quoiqu'elle ait plus d'apparence d'être bonne, car par la premiere, après qu'on a pris  $2'', 3''$ , pour les racines des moindres quarrez, on prend par après les sommes de  $2'', 3''$ , & de  $1', 5'$ , pour les racines des deux autres quarrez; d'avoir pris  $2''$  pour un triangle, &  $3''$  pour l'autre, cela va bien, parce qu'il y a de la ressemblance entre  $2''$  &  $3''$ : mais de prendre par après la somme de  $2'', 3''$ , pour un des triangles, & celle de  $1', 5'$ , pour l'autre, ce sont des façons différentes, parce que  $2'', 3''$ , sont racines de doubles quarrez, &  $1', 5'$ , de quarrez simples.

La seconde façon n'a pas cette répugnance, les racines de chaque triangle étant égales à la somme & à la difference de  $1', 5'$ , & de  $2'', 3''$ ; néanmoins parce que l'on prend pour le premier la difference des racines des quarrez simples & la somme de celles des doubles quarrez, & le contraire pour le second triangle; cette diversité fait qu'elle ne réussit pas.

La troisième voye est plus réguliere, & les triangles se trouvent par des façons entierement semblables, aussi est-ce la vraye méthode de trouver les triangles.

On se sert de chaque couple à part, prenant la racine du double  $17$ 

$1$	$3''$
$2''$	$5$

$3$	$4$
$2$	$7$

 carré pour la moindre racine, & la somme des deux quarrez pour l'autre.

Ainsi  $3$  est la racine du moindre carré d'un des triangles, &  $4$  qui est la somme de  $3''$  &  $1$ , est l'autre racine.

Les deux racines sont donc  $3$  &  $4$ , qui donnent le triangle  $7, 24, 25$ , qui a  $17$ , pour difference de ses côtes.



## 32 METHODE DES EXCLUSIONS.

L'autre triangle se trouvera de la même manière, sçavoir prenant la racine du double quarré 2 pour celle du moindre quarré, & la somme de 2 & 5 sçavoir 7, pour racine de l'autre quarré. On aura donc 2 & 7 pour racines, qui donnent le triangle 28, 45, 53, qui a 17 de difference entre ses côtez.

La même chose se fera aux autres nombres, car des couples de 23, sçavoir de 3, 4<sup>n</sup>, & 1<sup>n</sup>, 5, on trouvera les triangles 33, 56, 65, & 12, 35, 37, qui ont 23 de difference entre leurs côtez.

23	3 1 <sup>n</sup>	4 <sup>n</sup> 5	4 1	7 6
----	---------------------	---------------------	--------	--------

31	1 3 <sup>n</sup>	4 <sup>n</sup> 7	3 3	5 10
----	---------------------	---------------------	--------	---------

Et des couples de 31 on trouvera les triangles 9, 40, 41, & 60, 91, 109, qui ont 31 de difference, d'où l'on peut inférer que la regle est bonne.

Voilà donc le moyen de trouver les triangles qui ont un nombre donné pour difference de leurs côtez, mais la question demande tous lesdits triangles.

Il faut donc voir combien il y en doit avoir, & s'il y en a quelque nombre déterminé; & pour cet effet j'ai recours à la Table qu'on a faite en commençant d'examiner la question, dans laquelle je voi qu'un même nombre sert à plusieurs triangles, car il y en a 4 qui ont 7 pour difference.

Je considère aussi qu'il n'y a point de répugnance qu'un même nombre serve de difference aux moindres côtez d'une infinité de triangles, vû même qu'il y en a une infinité qui n'ont que 1 de difference entre le grand côté & l'hypotenuse, & je conclus qu'il se pourroit bien faire aussi qu'il y auroit une infinité de triangles qui auroient un même nombre pour difference de leurs moindres côtez.

Et ce qui me confirme en cette opinion, est que je voi quatre triangles qui ont un nombre premier, sçavoir 7 pour difference. Or les nombres premiers ne sont pas si abondans, lorsque la chose est limitée; comme on voit que les

mêmes nombres sont aussi la somme des susdits côtez des triangles : mais parce que cela est limité , & qu'il est impossible qu'ils soient la somme des côtez d'une infinité de triangles , on voit que les nombres premiers comme 7 , 17 , &c. ne sont chacun la somme des côtez que d'un seul triangle.

Or si chaque nombre sert de difference entre les moindres côtez d'une infinité de triangles , il est nécessaire qu'il y ait quelque progression qui conduise à cette infinité de triangles ; & s'il y a une progression , & qu'on sçache les deux moindres termes , & la difference des nombres de ladite progression , on la pourra poursuivre aussi loin qu'on voudra.

Je cherche donc dans ma Table deux triangles qui aient une même difference entre leurs moindres côtez , & je prens les triangles les plus proches. Ainsi 5 , 12 , 13 , & 8 , 15 , 17 , ont tous deux 7 , de difference entre leurs côtez.

Il faudroit voir si on pourroit avec le moindre faire le plus grand : mais parce que les racines des quarrez qui font le triangle sont plus simples que les côtez du même triangle , je prens lesdites racines qui sont 2 , 3 , & 1 , 4 ; mais on ne peut pas trouver une suite qui avec 2 , 3 , donne 1 , 4 , ou avec 1 , 4 , donne 2 , 3 , & qui continuë à l'infini en augmentant : car si on prend 2 , 3 , pour le premier terme , & qu'on trouve 1 au second , cela iroit en diminuant ; de même qui prendroit 1 , 4 , pour le premier , le second auroit 3 pour la plus grande racine qui seroit moindre que la plus grande du précédent , & ainsi on iroit encore en diminuant.

Il faut donc afin que la progression aille en augmentant , que chacun des termes augmente , ou au moins que le grand terme augmente , & que le moindre ne diminue point.

Je conclus de là que les deux triangles susdits sont

chacun le commencement de quelque progression.

Il faut donc prendre dans la table quelque autre triangle plus grand qui ait pareil nombre de 7, pour difference entre ses moindres côtez. Je trouve 48, 55, 73.

Les racines des quarrez dont il provient sont 3 & 8.

Mais parce qu'on ne voit pas d'où peut provenir ce 3 & 8, sçavoir si c'est de 2, 3, ou de 1, 4, je choisirai plutôt dans la table une autre difference pour l'examiner, puisque j'y vois deux triangles assez éloignez l'un de l'autre qui ont chacun l'unité pour difference entre leurs côtez.

Joint aussi que pour plus grande facilité la méthode requiert qu'on se serve du moindre nombre possible en l'examen. Mais (pour retourner à notre 7) si on vouloit juger duquel des deux triangles dépend 48, 55, 73, sçavoir si c'est de 5, 12, 13, ou de 8, 15, 17, il faudroit voir si c'est le premier qu'on rencontre après les deux susdits, & s'il n'y en a point dont les côtez soient moindres, & parce que je trouve que c'est le moindre après les deux susdits, je conclurai qu'il provient du moindre des deux premiers, sçavoir de 5, 12, 13, qui est moindre que 8, 15, 17.

Je trouve donc 3, 4, 5, qui a 1 de difference, & ensuite 20, 21, 29. Les racines de leurs quarrez sont 1, 2, & 2, 5.

Je les dispose comme on voit ici, & je regarde

1	2
2	5
5	12

comment je pourrai de 1, 2, tirer 2, 5. Et premierement je vois que le moindre nombre de la seconde couple est égal au plus grand de la premiere, car chacun d'iceux est 2.

Reste donc à faire 5 avec 2, & 1. Le 5 est la somme des trois nombres que j'ai déjà, sçavoir de 2, 2, & 1, ou (ce qui est la même chose) il est la somme du moindre nombre 1, & du double de 2 qui est le plus grand.

Je continuë par-après cette progression de la même sorte, prenant le plus grand nombre 5 pour le moindre de la couple suivante, & pour avoir le plus grand j'ajoute 2 au double de 5 pour avoir 12.

1	2	3	4	5
2	5	20	21	29
5	12	119	120	169
12	29	696	697	985

J'ai donc 5 & 12 dont les quarréz donnent le triangle 119, 120, 169, qui a 1 de difference entre ses moindres côtez.

De la même façon avec 5 & 12, on fera 12, 29, qui donneront le triangle 696, 697, 985.

J'appliquerai par-après cette méthode aux autres nombres.

2	3	5	12	13	1	4	8	15	17
3	8	48	55	73	4	9	65	72	97
8	19	297	304	425	9	22	396	403	565

Et avec 2, 3, je ferai les racines 3 & 8; prenant 3 pour la moindre, & la somme de 2, & du double de 3 pour la plus grande, qui donneront le triangle 48, 55, 73.

Et avec 3 & 8, on fera 8 & 19, & son triangle 297, 304, 425.

Semblablement avec 1 & 4 on fera 4 & 9 & son triangle 65, 72, 97, & avec 4 & 9, on fera 9, 22, & son triangle 396, 403, 565.

Et ainsi à toutes sortes de nombres, pourvû qu'on sçache un des triangles, on trouvera les autres, mais il faut aussi avoir égard aux multiples.

Or ces multiples sont faciles à trouver quand on sçait les primitifs, & ce qu'on doit ici remarquer est que tout nombre excepté 1, sert de difference entre les moindres côtez d'un infinité de triangles multiples, parce que tout nombre est multiple de 1, lequel 1 sert de difference entre les moindres côtez d'un triangle.

Ainsi 7 sert de difference entre les côtez des triangles

## 56 METHODE DES EXCLUSIONS.

5, 12, 13, & 8; 15, 17, & de ceux qui en proviennent; mais outre cela parce que 7 est multiple de 1, il sera encore la difference des côtez des triangles multiples par 7, de 3, 4, 5, de 20, 21, 29, & de leur suite; sçavoir de 21, 28, 35, ] 140, 147, 203, & des autres.

Il en est de même des autres nombres, & s'ils étoient composez, il y auroit beaucoup plus de multiples; au moins il y auroit plus de principes dont ils proviennent.

Il y a plusieurs autres choses à considerer sur ce sujet; dont on a parlé au discours des triangles au chapitre qui traite de la somme & de la difference des deux moindres côtez: mais ceci suffira pour faire découvrir le reste.

### TROUVER UN TRIANGLE auquel tant l'hypotenuse que la somme des deux autres côtez soit un quarré.

Voici le triangle.

4687298610289 hypotenuse.

4565486027761 côté impair.

1061652293520 côté pair.

C'est la question que l'exemple 7 suivant nous enseigne à chercher par tant de moyens.

### TROUVER UN TRIANGLE duquel l'aire ajoutée aux deux petits côtez fasse un quarré.

Voici le triangle.

205769.

190281.

78320.

### TROUVER UN TRIANGLE dont l'aire jointe à l'hypotenuse donne un quarré.

C'est 17, 144, 145.

TROUVER

**T R O U V E R U N T R I A N G L E .**  
*dont l'aire jointe au petit côté fasse un triangle.*

C'est 3, 4, 5, ] 16, 30, 34.

Et le troisiéme est 105, 208, 233.

**S E P T I E M E E X E M P L E .**

**T**R O U V E R un triangle auquel tant l'hypotenuse que la somme des deux autres côtez soit un quarré.

Puisque la question requiert deux choses, sçavoir l'hypotenuse quarrée & la somme des deux côtez aussi quarrée, je chercherai les moyens de faire chacun séparément, & je verrai si l'un étant quarré l'autre le peut être aussi, suivant ce qui a été dit au neuvième précepte.

Je chercherai premièrement tous les triangles qui ont un quarré pour la somme de leurs moindres côtez.

Je suppose donc qu'on ait examiné quels nombres doivent être la somme des deux moindres côtez des triangles, & qu'on ait trouvé que ce sont des nombres premiers differens de l'unité d'un multiple de 8, ou qui sont composez desdits nombres premiers seulement.

Je prens donc les quarréz desdits nombres, sçavoir de 7, 17, 23, 31, &c. & je cherche leurs triangles pour voir si quelqu'un d'entr'eux aura un quarré pour son hypotenuse.

Pour avoir lesdits triangles il faut avoir les couples de quarréz & doubles quarréz, dont la difference est la somme des deux moindres côtez du triangle. Et parce que tous les nombres dont on se doit servir sont quarréz, il faut voir si par le moyen de leurs racines, on ne pourra point trouver les couples de quarréz, & doubles quarréz qui leur appartiennent.

Pour trouver cela on se servira des méthodes ordinaires, prenant des nombres connus; par exemple, je sçais que 7 est la difference de 1, 8, & de 2, 9, dont les racines

# 58 METHODE DES EXCLUSIONS.

sont 1, 2", & 1", 3. Je sçais aussi que son quarré 49 est la difference de 1, 50, & de 32, 81, dont les racines sont 1, 5", & 4", 9.

Il faut donc par le moyen de 1, 2", & 1",  

1	2"	1	5"
1"	3	4"	9

 3, trouver 1, 5", & 4", 9. On donneroit  
 bien plusieurs moyens de passer de l'un à  
 l'autre, mais ils ne conviennent pas aux autres nombres.  
 En voici un qui convient à tous.

Je prens le produit des deux couples, sçavoir de 1 par 2, & de 1 par 3, pour avoir 2 & 3. Leur somme est 5 qui est le côté du double quarré, leur difference est 1 qui est le côté du quarré de la même couple. On aura donc 1, 5", pour une des couples.

L'autre se trouvera aisément, sçavoir en prenant la difference de 1 & 5 pour côté du double quarré de l'autre couple, & la somme des racines des doubles quarréz, sçavoir de 4" & 5" pour la racine du quarré de la dite seconde couple.

On aura donc ainsi les deux couples, 1, 5", & 4", 9.

J'éprouve la même chose aux autres nombres comme 17 & 23, & je trouve que cela y revient.

Je fais donc une table assez grande de plusieurs quatrèz qui sont la somme des deux moindres côtez d'un triangle, comme on peut voir ci-après; & afin de trouver commodément les couples de quarréz & doubles quarréz dont ils sont la difference, je mets leurs racines avec leurs couples aussi; comme près de 49 je mets 7 avec les couples 1, 2", & 1", 3, afin qu'on puisse trouver plus facilement les couples de 49 par le moyen de celles de 7, car les racines étant moindres que leurs quarréz, leurs couples se trouveront aussi plus facilement que celles des quarréz.



*T A B L E D E S Q U A R R E Z  
qui font la somme des moindres cōtez des triangles.*

7 1 2" 1" 3	49 1 5" 4" 9	79 7 8" 1" 9	6241 47 65" 18" 83	151 7 10" 3" 13	22801 31 109" 78" 187
17 1 3" 2" 5	289 7 13" 6" 19	89 3 7" 4" 11	7921 23 65" 42" 107	161 1 9" 8" 17	25921 127 145" 18" 163
23 3 4" 1" 5	529 7 17" 10" 27	97 1 7" 6" 13	9409 71 85" 14" 99	9 11" 2" 13	73 125" 52" 177
31 1 4" 3" 7	961 17 25" 8" 33	103 5 8" 3" 11	10609 7 73" 66" 139	167 11 12" 1" 13	27889 119 145" 26" 171
41 3 5" 2" 7	1681 1 29" 28" 57	113 7 9" 2" 11	12769 41 85" 44" 129	191 3 10" 7" 17	36481 89 149" 60" 209
47 5 6" 1" 7	2209 23 37" 14" 51	119 3 8" 5" 13	14161 41 89" 48" 137	193 7 11" 4" 15	37249 17 137" 120" 257
49 1 5" 4" 9	2401 31 41" 10" 51	127 9 10" 1" 11	16129 79 101" 22" 123	199 1 10" 9" 19	39601 161 181" 20" 201
71 1 6" 5" 11	5041 49 61" 12" 73	127 1 8" 7" 15	16129 97 113" 16" 129	217 11 13" 2" 15	47089 113 173" 60" 233
73 5 7" 2" 9	5329 17 55" 36" 89	137 5 9" 4" 13	18769 7 97" 90" 187	5 11" 6" 17	47 157" 110" 267

H ij



223 13 14" 1" 15	49729 167 197" 30" 227	289 7 13" 6" 19	83521 23 205" 182" 387	383 3 14" 11" 25	146689 233 317" 84" 401
233 3 11" 8" 19	54289 119 185" 66" 251	311 9 14" 5" 19	96721 31 221" 190" 411	391 1 14" 13" 27	152881 337 365" 28" 393
239 7 12" 5" 17	57121 1 169" 168" 337	313 5 13" 8" 21	97969 103 233" 130" 363	11 16" 5" 21	71 281" 210" 491
241 1 11" 10" 21	58081 199 221" 22" 243	329 3 13" 10" 23	108241 191 269" 78" 347	401 7 15" 8" 23	160801 79 289" 210" 499
257 9 13" 4" 17	66049 49 185" 136" 321	11 15" 4" 19	89 241" 152" 393	409 13 17" 4" 21	167281 137 305" 168" 473
263 5 12" 7" 19	69169 73 193" 120" 313	337 1 13" 12" 25	113469 287 313" 26" 339	431 9 16" 7" 23	185761 17 305" 288" 593
271 11 14" 3" 17	73441 103 205" 102" 307	343 13 16" 3" 19	117649 151 265" 114" 379	433 17 19" 2" 21	187489 281 365" 84" 449
281 13 15" 2" 17	78961 161 229" 68" 297	353 15 17" 2" 19	124609 217 293" 76" 369	439 19 20" 1" 21	192721 359 401" 42" 443
287 1 12" 11" 23	82369 241 265" 24" 289	359 17 18" 1" 19	128881 287 325" 38" 363	449 1 15" 14" 29	201601 391 421" 30" 451
15 16" 1" 17	223 257" 34" 291	367 5 14" 9" 23	134689 137 277" 140" 417	17 11 17" 6" 23	208849 49 325" 276" 601

463	214369	487	237169		
7 16"	113 337"	5 16"	217 377"	9 17"	47 353"
9" 25	224" 561	11" 27	160" 537	8" 25	306" 659
479	229441	497	247009	503	253009
13 18"	119 349"	15 19"	193 377"	3 16"	329 425"
5" 23	230" 579	4" 23	184" 561	13" 29	96" 521

Je vois par-après comment on fera le triangle par le moyen desdites couples ; par exemple 7 est la somme des côtez du triangle 3, 4, 5, les racines des quarrez qui donnent ledit triangle sont 1 & 2, je cherche donc comment avec les couples susdites, sçavoir avec 1, 2", & 1", 3, je ferai 1 & 2.

Je trouve que les racines des doubles quarrez desdites couples sont les racines des quarrez du triangle ; je prens par-après un autre nombre comme 17, dont les couples sont 1, 3", & 2", 5, & je trouve aussi que prenant 3 & 2 pour les racines des quarrez qui doivent composer le triangle, elles donneront 5, 12, 13, qui a 17 pour la somme de ses moindres côtez.

Voyons maintenant ce qu'il faut pour faire que l'hypotenuse soit quarrée. Il est nécessaire que les deux quarrez dont elle est la somme soient les côtez d'un triangle ; car puisque le quarré de l'hypotenuse est la somme des quarrez des deux autres côtez d'un triangle, les racines desdits quarrez qui sont la somme d'un quarré d'hypotenuse sont les côtez d'un triangle.

Or les racines des doubles quarrez de chaque couple sont les racines des quarrez dont la somme doit être une hypotenuse quarrée. Il s'ensuit donc que lesdites racines des doubles quarrez doivent être les côtez d'un triangle.

Il ne sera donc point besoin de former les triangles qui ont les quarrez susdits pour la somme de leurs moindres côtez, puisqu'on n'a besoin d'autre chose que de voir si l'hypotenuse est quarrée. Et on connoitra si elle est quar-

## 62 METHODE DES EXCLUSIONS.

rée en considérant les racines des doubles quarrez susdits, & voyant s'ils peuvent être les deux côtez d'un triangle.

On ne considère ici que les triangles primitifs, parce que les multiples se réduisent à un primitif; & parce que le primitif est moindre que son multiple, s'il y en a quelqu'un qui ait les qualitez requises, il se trouvera auparavant ledit multiple.

Pour voir si les racines des doubles quarrez (qui appartiennent aux quarrez susdits qui sont la somme des côtez d'un triangle) sont les côtez d'un triangle, il faut considérer quelques propriétés des côtez des triangles suivant le sixième précepte.

1<sup>o</sup>. Le côté pair de tout triangle primitif doit être parement pair, & partant toutes les couples qui sont ici auxquelles il se trouve un impairément pair, doivent être exclus, comme on voit aux couples de 289, 529, 2209, 2401, &c.

2<sup>o</sup>. L'un des deux côtez de chaque triangle doit être mesuré par 3 : or le plus grand des deux nombres susdits ne peut pas être mesuré par 3, ni aussi être pair, lorsque la somme des deux moindres côtez est un carré, car le côté impair étant la différence des deux quarrez, si le plus grand des deux est pair & le moindre impair, ce moindre sera parement pair + 1, car tout carré impair est parement pair + 1, & partant étant ôté du carré pair il restera un parement pair - 1, pour le côté impair. Et si on ajoute par après ce côté impair au côté pair qui est parement pair, la somme sera un parement pair - 1, & partant ne sera pas un carré; par exemple, le triangle qui sera fait par les quarrez de 5 & 12, ne pourra pas avoir un carré pour la somme de ses côtez, car le côté impair sera la différence de 25 & 144, quarrez de 5 & 12, & ce côté impair sera parement pair - 1, sçavoir 119, puisque pour l'avoir il faut ôter un parement pair + 1, sçavoir 25 du parement pair 144. Si donc on ajoute le parement pair

11, qui est 119, au côté pair du triangle, sçavoir à 120 qui est parement pair, la somme sera un parement pair 11, & partant ce ne sera pas un quarre.

On montrera de la même façon que si le plus grand des deux quarrez qui font le triangle est mesuré par 3, la somme des deux moindres côtez ne sera point un quarre.

Que les racines desdits quarrez soient comme devant 5 & 12, pour avoir le côté impair on ôtera 25 de 144; or 25 est multiple de 3 11, car tout quarre qui n'est point mesuré par 3 surpasse de l'unité un multiple de 3.

Si donc on ôte un multiple de 3 11 d'un multiple de 3, sçavoir 25 de 144, restera 119 qui sera ternaire 11.

Le côté impair sera donc ternaire 11, lequel étant ajouté au côté pair 120, qui nécessairement est multiple de 3, la somme desdits côtez sera multiple de 3 11, & partant ne sera point quarre.

Puis donc que le plus grand des deux nombres suffits, qui sont racines des doubles quarrez, & qui doivent aussi être côtez de triangles, n'est point mesuré par 3 ni par 4, il faudra de nécessité que le moindre des deux soit mesuré par 3 & 4, puisqu'il faut que les côtez des triangles doivent contenir 3 & 4. Le moindre doit donc être mesuré par 12.

Il faudra donc rejeter toutes les couples auxquelles la racine du moindre double quarre ne se mesure pas par 12.

Et le premier qui n'est point excepté par les deux règles précédentes est 5041, quarre de 72, qui a 12 pour la racine du moindre de ses doubles quarrez.

3°. Le grand côté de tout triangle est composé, & se mesure par deux nombres premiers, si on en excepte 3, 4, 5, & quelques-uns de ses multiples: mais lorsque le grand côté est impair comme il est toujours ici, il n'y a aucune exception.

Et partant il faudra exclure tous les quarrez (qui font la somme des côtez des triangles) qui ont un nombre premier ou la puissance pour la racine du plus grand double quarre.

#### 64. METHODE DES EXCLUSIONS.

Ainsi 5041, quarré de 71, sera aussi exclus, parce que le plus grand de ses doubles quarez a 61 pour racine, de même 5329 sera exclus, parce que 53 est la grande racine, & que 61 & 53 sont nombres premiers.

Les nombres ou quarez suivans, sçavoir 6241, 7921 & 9409, seront aussi exclus, car ils ont bien un nombre composé pour leur grande racine, mais la moindre n'est pas mesurée par 12.

Comme aussi 57121 sera exclus, quoique la moindre racine 168 soit mesurée par 12, car la grande racine 169 est le quarré d'un nombre premier.

Il ne restera donc à examiner que les nombres ou quarez, dont la moindre des racines des doubles quarez est mesurée par 12, & la grande est mesurée par deux nombres premiers, car puisque les racines des doubles quarez doivent être les côtez d'un triangle, elles doivent avoir les deux suivantes conditions qui appartiennent aux côtez des triangles tels qu'il est ici requis.

On aura aussi égard aux finales des côtez des triangles, & par l'examen qu'on fera desdits triangles on trouvera que lorsque le côté pair finit par 2 ou 8, l'impair finit toujours par 5.

Quand il finit par 4 ou 6, l'impair finit par 3 ou 7.

Quand il finit par 0, l'impair finit par 1 ou 9.

Par les règles précédentes on excluroit la plupart des nombres susdits, & il ne resteroit que 24, 265, qui appartiennent à 82369, quarré de 287; puis 168, 305, appartenans à 167281, ] 288, 305, appartenans à 185761, ] 84, 365, qui appartiennent à 187489, ] 276, 325, qui dépendent de 208849, & 96, 425, qui viennent de 53009. Mais examinant lesdits nombres par les finales on rejettera 24, 265, ] 84, 365, ] 276, 325, ] & 96, 425, parce que les finales 4 & 5, ] & 6, 5, ne sont point ensemble aux côtez des triangles.

Reste donc les couples 168, 305, & 288, 305 qu'il faut

faut examiner, & voir si leurs quarréz étant joints ensemble font un quarré; mais il se trouve que non, & partant ils ne feront point les côtez d'un triangle, & l'hypoténuse des triangles ne sera point quarrée.

Or le plus grand quarré de la table est 253009, & partant on sera assuré qu'il n'y a aucun quarré qui soit la somme des deux côtez d'un triangle qui ait son hypoténuse quarrée, s'il n'est plus grand que ledit 253009 quarré de 503.

Mais on pourroit traiter cette question d'une autre sorte, & au lieu de faire une table des quarréz qui sont la somme des côtez d'un triangle, on en pourroit faire une qui contiendrait tous les quarréz qui sont hypoténuses.

Or parce que la méthode enseigne de se servir des moindres nombres possibles, & aussi de retrancher tout ce qui est inutile, comme on voit par le troisième précepte, je cherche les moyens de faire lesdits racourcissemens & exclusions.

Pour amoindrir les nombres on se servira des racines au lieu des quarréz des hypoténuses, & par le moyen du triangle qui a ladite racine pour hypoténuse, on aura le triangle qui a le quarré de ladite hypoténuse; par exemple, avec 3, 4, 5, je ferai le triangle qui a 25 pour hypoténuse, car ledit triangle est fait par les quarréz de 3 & 4, qui sont côtez dudit triangle 3, 4, 5.

Mais pour n'avoir point la peine de prendre lesdits quarréz de 3 & 4, je chercherai quelque autre méthode pour trouver 7 & 24 (qui sont côtez du triangle qui a 25 quarré de 5 pour hypoténuse,) par le moyen desdits 3 & 4.

Et premièrement 24 est le double du produit de 3 & 4, reste donc à trouver 7. Si je prens la somme desdits 3 & 4 j'aurai 7, il faut donc voir à quelqu'autre triangle si cela réussira de même.

Au triangle 5, 12, 13, la somme de 5 & 12 est 17, mais 17 n'est pas côté du triangle qui a 169 quarré de 13 pour

hypotenuse. Ledit triangle est 119, 120, 169. Je regarde si 17 mesure 119, & je trouve qu'il le mesure, le quotient est 7, lequel 7 est la difference de 5 à 12.

Je dis donc que si on multiplie la somme des deux côtés par leur difference, on aura le côté impair du triangle qui aura pour hypotenuse le quarré de l'hypotenuse du premier triangle.

Et je vois que la même chose arrive au premier triangle 3, 4, 5, car 7 qui est la somme de 3 & 4, étant multiplié par la difference 1 donne 7 pour côté du triangle, qui a 25 quarré de 5 pour hypotenuse, sçavoir de 7, 24, 25.

De cette façon on aura les côtés des triangles dont l'hypotenuse est quarrée, par le moyen de tous les triangles, & ayant lesdits côtés on aura leur somme : reste donc à voir si cette somme sera quarrée.

Mais afin de n'avoir point la peine d'examiner tous les triangles, il se faut servir de l'autre moyen qui est de retrancher tout ce qui est inutile ; ce qui se fera en considérant quelques propriétés du quarré, puisque ladite somme des côtés doit être un quarré : par exemple, tout quarré impair (tel qu'est ladite somme) surpasse de l'unité un pairment pair.

De là on inferera que les triangles dont le moindre côté sera impair, ne pourront pas donner de triangle qui ait un quarré pour la somme de ses côtés, & partant on ne prendra que les triangles dont le moindre côté sera pair.

Et de cette autre propriété, que tout quarré non divisible par 3 surpasse de l'unité un multiple de 3, on inferera que le moindre côté doit être mesuré par 3, & partant il ne faudra considérer que les triangles dont le moindre côté sera mesuré par 12.

La façon dont on trouvera ces deux exclusions a été traitée au commencement du présent exemple, & partant on ne la repetera point ici ; car les côtés des triangles dont on parle ici sont les mêmes nombres qui doivent ser-

vir de racine aux doubles quarréz appartenans aux sommes quarrées susdites, & on a montré que la moindre des deux racines susdites doit être mesurée par 12.

Je prens donc tous les triangles dont le moindre côté est mesuré par 12. Et on pourroit les mettre tous de suite commençant par 12, 35, 37, } 24, 143, 145, } 36, 77, 85, } 36, 323, 325, &c. mais parce qu'on a déjà examiné cette question par une autre voye, sçavoir par la somme des côtez, & qu'on l'a poursuivie jusqu'à faire que la somme des côtez de triangle fust 253009, on commencera par des hypoténuses qui donneront à peu près ladite somme, ou plutôt moins, afin que dans l'inégalité desdites sommes, qui sont souvent en proportion fort différente avec l'hypoténuse, on n'en omette aucune.

Je commencerai donc par les hypoténuses quarrées dont la racine n'est point moindre que 400, & suivrai l'ordre desdites hypoténuses, les choisissant dans une table que je suppose être faite desdites hypoténuses, desquelles il ne faut prendre que les racines, comme il a été dit.

Que si on n'avoit point travaillé à la question par la voye précédente, ou qu'on n'eût point de table desdites hypoténuses, il faudroit prendre les triangles dont le moindre côté se mesure par 12, & poursuivre, comme on vient de le montrer, & pratiquer les exclusions dont on parlera ci-après.

On peut considerer les finales, & voir quelles elles doivent être, afin que la somme des côtez du triangle qu'on fera soit un quarré.

Et premièrement quand le côté pair du triangle est 2 ou 8, l'impair doit finir par 5. Si le pair finit par 0, l'impair peut avoir 1 ou 9 pour finale, & en toutes les façons susdites les finales n'empêchent point que la somme des côtez du triangle qui sera produit du premier qui est ici considéré, ne soit un quarré.



# 68 METHODE DES EXCLUSIONS.

Mais si le côté pair du premier triangle finit par 6, le côté impair doit finir par 3. Et si ledit côté pair finit par 4, l'impair doit avoir 7 pour finale; autrement si 6 étoit avec 7, & 4 avec 3, la somme des côtez du triangle qui seroit produit, n'auroit pas une finale quarrée; ce qu'on montrera comme il s'enfuit.

120	391	409	Pour faire avec le premier
84	437	445	triangle celui dont l'hypotenuse
168	425	457 +	est quarrée, on multiplie pour le
132	475	493	côté impair la somme des deux
-336	377	505	côtez par leur difference; & pour
396	403	565	le côté pair on prend le double du
276	493	565 +	produit des mêmes côtez. Si donc
48	575	577	les côtez finissent par 6 & 7, la
140	551	601	somme d'iceux finira par 3, car 7
-336	527	625	& 6 sont 13, & la difference finira
300	589	661	par 1, car le côté pair étant le
-156	667	685	moindre côté, il le faudra ôter
108	725	733 +	de 7.
216	713	745	Le produit de 1 par 3, sçavoir
468	595	757	de la somme par la difference sera
432	665	793	3, & telle sera la finale du côté
168	775	793	impair du triangle requis.
540	629	829 +	Pour le côté pair il faudroit
-504	703	865	prendre le produit des mêmes fi-
348	805	877	nales 6 & 7 qui finira par 2, & son
60	899	901	double finira par 4, partant le
420	851	949	côté pair finira par 4, lequel étant
-696	697	985	joint avec le côté impair qui finit
372	925	997 +	par 3, la somme des deux finira
660	779	1021	par 7, qui n'est point une finale
192	1015	1033	quarrée; car les quarez impairs
132	1085	1093	ont pour finale 1, 9, ou 25, &
744	817	1105	partant la somme des deux côtez
576	943	1105	ne sera point un quarré.

264 1073 1105 On montrera de même que si  
 528 1025 1153 les côtez du premier triangle fi-  
 204 1147 1165 nissoient par 4 & 3, la somme des  
 660 989 1189 côtez du triangle qui en seroit  
 612 1075 1237 produit finiroit aussi par 7, & par-  
 tant elle ne seroit point quarree,

On voit ici plusieurs triangles qui ont tous leur moi-  
 dre côté divisible par 12, & qui sont destinez pour faire  
 des triangles qui ayent pour hypotenuse le quarré de l'hy-  
 potenuse de ceux-ci. Mais on en exclura ceux qui n'ont pas  
 les finales de leurs côtez ainsi qu'il est requis, & qui sont  
 marquées — devant leur moindre côté, comme sont 336,  
 377, ] 336, 527, ] 156, 667, ] 504, 703, ] &c. car le  
 6 se doit trouver avec le 3, ] & le 4 avec le 7.

Il y a encore une autre exclusion, mais elle est tirée de  
 la premiere partie de cet exemple, & de l'autre table.

Les côtez des triangles qui sont en cette table-ci, sont  
 les mêmes qui devroient être les racines des doubles quar-  
 rez de la table précédente, car lescites racines doivent  
 être les côtez d'un triangle, & leurs quarrés doivent faire  
 le triangle qui a les deux conditions susdites.

Or on a montré que la plus grande des deux susdites ra-  
 cines doit être impair, mais je veux ici montrer qu'elle est  
 hypotenuse primitive.

Puisque le quarré qui est la somme des côtez d'un trian-  
 gle, est la difference d'un quarré & d'un double quarré,  
 & qu'en la table susdite il y a toujours deux couples des-  
 dits quarrés & doubles quarrés, en l'une desquels le dou-  
 ble quarré est plus grand que le quarré, & en l'autre il est  
 moindre, il s'ensuit que le plus grand double quarré des  
 deux est la somme de deux quarrés: par exemple, 49 est  
 la difference de 1, 50, & de 32, 81, & partant dans la  
 couple dont le double quarré est plus grand que le quarré  
 49, ledit double quarré qui est 50 est la somme de deux  
 quarrés, sçavoir de 1 & 49, d'où il s'ensuit qu'il est hypo-

tenue : mais voyons quelle hypotenuse. Le carré qui sert de somme aux côtes comme 49, est toujours impair, & partant l'autre carré sera aussi impair, puisqu'ensemble ils doivent faire un double carré qui est pair, ce sont donc deux carrés impairs qui sont premiers entr'eux, car s'ils avoient une commune mesure, le double carré l'auroit aussi, & le triangle seroit multiple, mais on suppose qu'il soit primitif.

Puis donc que les deux carrés, qui joints ensemble font le double carré, sont impairs & premiers entr'eux, leur somme sera le double d'une hypotenuse primitive, comme on a dit ailleurs : mais la même somme est un double carré, & partant la racine de ce double carré sera hypotenuse primitive.

Le grand côté des triangles de la table précédente doit donc être l'hypotenuse d'un triangle, & partant parement pair plus 1.

Je marque donc les triangles dont le grand côté est hypotenuse, la marque est  $+$  & rejette les autres dont le grand côté est parement pair  $-$ , comme 120, 391, 409, &c. & ceux auxquels ledit côté étant parement pair  $+$ , n'est pas néanmoins hypotenuse comme 84, 437, 445, &c.

Il n'y a donc que six triangles qui ne soient point exclus, sçavoir 168, 425, 457, ] 276, 493, 565, ] 108, 725, 733, ] 540, 629, 829, ] 372, 925, 997, ] 528, 1025, 1153, desquels triangles il faudra faire ceux qui auront pour hypotenuse le carré de leur hypotenuse. Ainsi avec 168, 425, 457, on fera le triangle dont l'hypotenuse sera le carré de 457 ; mais on n'a besoin que de la somme des côtes dudit triangle, pour voir si c'est un carré : par exemple, on prendra pour le côté pair dudit triangle le double du produit de 168 par 425, qui fera 142800, l'impair se trouvera multipliant la somme de 168 & 425 par leur différence, sçavoir 593 par 257, le produit 152401 est le côté impair, qui étant joint au côté

pair 142800 donne 2950201 pour la somme des côtez, qui n'est point un quarré, ainsi qu'il paroîtra en prenant la racine par la voye ordinaire, & par la même façon on trouvera que les autres cinq triangles ne donnent pas des triangles dont la somme des côtez soit un quarré.

## HUITIEME EXEMPLE.

**T**ROUVER un triangle dont l'hypoténuse & l'enceinte soient quarrées.

Je cherche quelque voye pour trouver l'enceinte des triangles, autrement qu'en ajoutant les côtez. Je trouve qu'on la peut avoir en multipliant la somme des racines des quarréz qui font le triangle, par le double de la plus grande racine. Ainsi au triangle 3, 4, 5, les racines sont 2 & 1, leur somme est 3, qui multipliée par 4 (double de la plus grande racine 2) donne 12, pour l'enceinte dudit triangle.

De cette propriété je conclurai que pour faire que l'enceinte soit un quarré, il faut que la somme des deux racines soit un quarré, & que la plus grande racine soit un double quarré, afin que venant à multiplier ladite somme (qui est un quarré) par un autre quarré (qui sera le double de la plus grande racine,) on ait un quarré pour l'enceinte. Ainsi prenant pour les deux racines 18 & 7 qui ensemble font 25, on multipliera ladite somme 25 par 36 double de 18, & on aura 900 pour l'enceinte du triangle 252, 275, 373.

Maintenant il faut voir ce qui est nécessaire pour faire que l'hypoténuse soit quarrée, ou bien supposant que l'hypoténuse de ce triangle soit quarrée, je regarde ce qu'on en peut déduire.

Je voi que si l'hypoténuse est quarrée, les racines des quarréz dont elle est la somme doivent être les côtez d'un triangle.

Mais parce qu'il faut qu'un même triangle ait l'hypote-

nusé quarrée, & l'enceinte quarrée, je joins ensemble les deux susdites conditions, & partant il faudra trouver un triangle dont le grand côté soit double quarré, & la somme des deux moindres côtez soit un quarré.

Pour faire que le côté pair soit double quarré, il faut que le triangle soit fait de deux qq. parce que leurs racines doivent être quarrées: il faudra donc trouver un triangle fait par deux qq. qui ait un quarré pour la somme de ses moindres côtez.

Or les nombres qui sont la somme des deux côtez d'un triangle sont deux fois la difference d'un quarré, & d'un double quarré, & les racines des deux doubles quarréz sont aussi les racines des quarréz qui font le triangle: mais les quarréz qui font le triangle sont des qq. partant leurs racines sont quarrées: il s'ensuit donc que les racines des doubles quarréz susdits sont des quarréz.

On pourra donc se servir ici de la premiere Table de l'exemple précédent qui contient les quarréz qui sont la somme des côtez d'un triangle: il faudroit donc trouver en ladite Table, dans la liste des couples appartenantes aux quarréz, quelque quarré qui eut deux quarréz pour les racines de ses doubles quarréz, ce qui ne se trouve point en toute cette Table: toutefois on ne peut pas être assuré qu'il ne s'en trouve point si on poursuivoit la Table plus loin, puisque cela se trouve bien aux sommes non quarrées, comme à 23 qui a 1 & 4 pour les racines de ses doubles quarréz, & à 137 qui a 4 & 9.

Or cette Table mene fort loin, car par son moyen on entre bien avant dans les nombres d'onze lettres, & voici comme il y faudroit procéder, si on avoit trouvé deux quarréz qui servissent de racine à deux doubles quarréz appartenans à un même nombre.

Par exemple, si les racines des doubles quarréz qui appartiennent à 247009 quarré de 497, sçavoir 306,353, étoient deux quarréz, & qu'on voulut par leur moyen  
faire

faire le triangle qui auroit des quarréz pour son enceinte ; & pour son hypotenuse , voici comme il y faudroit procéder.

Le triangle fait par les quarréz de 306 & 353 auroit pour côté pair 216036 , & pour côté impair 30973 .

Les quarréz de ces deux côtez qui sont 46671553296 & 959326729 étant joint ensemble , donneront une hypotenuse quarrée qui sera 47630880025 .

Or l'enceinte du triangle dont ledit nombre est hypotenuse , se trouvera multipliant la somme des racines 216036 & 30973 , sçavoir 247009 , ( qui est un quarré ; puisque c'est le nombre auquel appartiennent les deux racines premierement prises , sçavoir 306 & 353 , ) par le double de la plus grande , sçavoir par 432072 pour avoir 106725672648 qui sera l'enceinte du triangle , dont l'hypotenuse sera le quarré susdit 47630880025 .

Et cette enceinte seroit aussi un quarré si les deux nombres susdits 306 & 353 étoient quarréz , car cela étant 216036 qui est le double de leur produit seroit un double quarré , & le double de ce nombre , sçavoir 432072 seroit un quarré : si donc on vient à le multiplier par 247009 qui est aussi un quarré , le produit seroit un quarré : or ce produit étant l'enceinte d'un triangle qui a un quarré pour hypotenuse , ledit triangle auroit les deux conditions requises.

On peut encore examiner cette même question d'une autre façon , comme il s'ensuit.

L'enceinte se trouve , comme il a été dit , en multipliant la somme des deux racines par le double de la plus grande des deux ; il faudra donc , afin que l'enceinte soit quarrée , que la somme des deux racines soit un quarré , & la plus grande soit un double quarré , afin que son double soit un quarré . Mais afin que l'hypotenuse soit quarrée , il faut que les racines susdites soient côtez de triangles , afin que leurs quarréz étant joints ensemble fassent le quarré d'une

#### 74 METHODE DES EXCLUSIONS.

hypoténuse : il faudra donc trouver un triangle dont le grand côté soit double quarré , & la somme des deux moindres côtéz soit un quarré.

Puisque le grand côté doit être double quarré, il faut qu'il soit le double d'un quarré pair, car autrement il ne seroit pas parement pair, ainsi qu'il est requis aux côtéz pairs, & partant il aura pour finales 2, 8, ou 0, comme lesdits doubles quarez.

Or quand le côté pair finit par 2 ou 8, l'impair finit toujours par 5, ( ce qui se doit entendre aux primitifs dont nous parlons ici ) & partant la somme des côtéz finit par 7 ou 3 qui ne sont point finales quarrées.

Et partant si le côté impair finit par 2 ou 8, la somme des deux côtéz ne pourra pas être un quarré.

Reste donc que le côté pair finisse par 0, car ainsi l'impair finira par 1 ou 9, & la somme desdits côtéz aura une finale quarrée.

On considérera par après que tout quarré non divisible par 3 surpasse de l'unité un multiple de 3, & partant le double quarré sera ternaire  $+2$  ou  $--1$ . Mais en tout triangle l'un des côtéz se mesure par 3, & partant si le côté pair n'est point ternaire l'impair le sera, & la somme de ces côtéz dont l'un est ternaire, & l'autre ternaire  $--1$  sera aussi ternaire  $--1$ , & partant ce ne sera pas un quarré ainsi qu'il est requis.

Il faut donc que le côté pair soit mesuré par 3 & aussi par 5, afin qu'il finisse par 0; il ne pourra donc être moindre que 1800, double du quarré de 30.

On remarquera aussi que le côté impair doit être ternaire  $+1$ , afin qu'étant joint au côté pair qui est ternaire, il fasse un ternaire  $+1$  qui puisse être quarré.

Or la moitié du côté pair, sçavoir 900 est produite par les racines des deux quarez constitutifs du triangle, lesquelles racines doivent nécessairement être quarrées, afin qu'elles soient premières entr'elles, & l'une d'icelles doit

être mesurée par 9 & l'autre non, puisque le côté pair est mesuré par 9.

Et partant le côté impair étant la différence des deux quarrés desdites racines, il sera la différence de deux qq. le moindre desquels doit être mesuré par 81, & la racine par 9, autrement le côté impair seroit ternaire—1, car puisque l'un des deux qq. doit être mesuré par 3 ou 81, si c'étoit le plus grand qui le fût, donc le moindre qq. seroit ternaire +1, lequel étant ôté du plus grand qui seroit ternaire, resteroit un ternaire—1 pour le dit côté impair.

Ce même côté impair doit être aussi parement pair +1, autrement étant joint au côté pair, il ne seroit pas un parement pair +1, comme doit être la somme pour être quarrée; & partant le susdit moindre qq. qu'on a montré devoir être mesuré par 81, doit être pair; car s'il étoit impair, le grand qq. seroit pair, & leur différence seroit un parement pair—1; car si on ôte un parement pair +1 d'un parement pair, il restera un parement pair—1, & & partant la racine de ce moindre qq. sera au moins 36.

D'ailleurs puisque tout qq. impair surpasse de l'unité un multiple de 16, le côté impair, qui est la différence de deux qq. le plus grand desquels est impair, surpassera aussi de l'unité un multiple de 16, car le qq. pair étant divisible par 16 (comme tout qq. pair doit être,) si on l'ôte d'un multiple de 16 +1, il restera un multiple de 16 +1.

Quand donc on assemblera les deux côtes, sçavoir le pair avec l'impair, si le pair ne se mesure que par 8 comme 1800, (qu'on avoit pris pour le moindre côté pair possible) la somme des deux côtes susdits retiendra aussi cette restriction, & surpassera de l'unité un multiple de 8 & non pas de 16.

Mais les nombres qui sont particulièrement affectez à être la somme des côtes des triangles, different tous de l'unité d'un multiple de 8, & partant leurs quarrés surpasseront de l'unité un multiple de 16, tels sont 49, 129, 529, &c.



De là il s'ensuit que le côté pair doit au moins être mesuré par 16, & partant au lieu de 1800 il faudra prendre son quadruple 7200, double de 3600, quarré de 60, qui est le moindre qui puisse avoir les conditions requises, savoir d'être double quarré, & d'être divisible par 3, 4, & 16.

Mais ledit 7200 se trouvera encore trop petit : car si on prend, comme il a été dit, les parties de la moitié 3600 en telle sorte que la partie paire soit mesurée par 9 ainsi qu'il est requis, on aura pour parties 144 & 25 ; mais la partie paire doit être la moindre comme on a montré cy-devant ; puisqu'elle est la racine d'un qq. pair, qui doit être le moindre des deux.

Si donc 144 est la moindre partie possible, il faut que l'autre soit plus grande, & qu'elle se mesure par 25, & que ce soit un quarré comme 625, qui multiplié par 144 donne 90000 ; dont le double 180000 sera le moindre côté pair qu'on doit examiner.

Mais le côté pair étant tel, & prenant 144 & 625 pour les parties qui doivent faire le triangle, le côté impair se trouvera plus grand que le pair, car ce sera 369889. Or est-il qu'il doit être moindre que le pair, puisque la question requiert que le grand côté soit double quarré, & par conséquent pair.

Il faut donc voir ce qui fait ici que le grand côté est impair. Cela provient de ce que les parties susdites 144 & 625, qui doivent être les racines des quarrés dont le triangle est formé sont trop distantes l'une de l'autre, & sont hors des bornes nécessaires pour faire que le grand côté soit pair.

Il faudra donc prendre des nombres moins différens pour lesdites racines, comme 576 & 625, auxquelles la moindre est toujours paire, & le double du produit desdites racines savoir 720000 sera le côté pair, & l'impair sera 58849.

Or si la somme de ces deux côtez qui est 778849 étoit un quarré, on auroit ce qui est requis; car multipliant ladite somme 778849 par 1440000 double du grand côté 720000, on auroit 1121542560000, qui est l'enceinte du triangle qui est fait par les quarez desdits 720000 & 58849, duquel triangle l'hypotenuse est le quarré de la somme des quarez de 576 & 625; ou si on veut l'hypotenuse dudit triangle est le quarré de l'hypotenuse du triangle, dont les côtez sont 720000 & 58849.

Et l'enceinte susdite 1121542560000 seroit un quarré, puisqu'elle seroit le produit des deux quarez 778849 & 1440000. Mais parce que ledit 778849 ( qui est la somme des côtez 720000 & 58849 ) n'est pas quarré, l'enceinte susdite ne sera pas aussi un quarré.

On voit donc par là que s'il y a des triangles qui aient leur hypotenuse & leur enceinte quarrée, il faut que ladite enceinte soit fort grande, puisque la moindre & première qui ait besoin d'être examinée a treize lettres comme on voit ici.

Qui voudroit passer outre, on pourroit prendre 1225 au lieu de 625, puis on augmenteroit aussi 576 prenant garde toujours que la partie paire soit la moindre, mais que l'impair ne l'excede pas plus que de la raison qu'il y a de 1 à 2. 2 à 1, & que si la partie paire est 1000000, l'impair n'excede pas 2414213.

Cet examen conduiroit fort loin avec peu de nombres.

Et pour examiner lesdits 576 & 1225, je les prens pour racines des quarez qui font un triangle, partant le côté pair sera 1411200, & l'impair sera 1168849, ( qui se trouve multipliant la somme de 576 & 1225 par leur difference, sçavoir 1801 par 649 ) la somme des deux côtez sera 2580049 qui n'est point quarrée, & partant on pourroit passer à un autre; car l'enceinte de l'autre triangle qu'on cherche ne seroit point un quarré, puisqu'elle se trouve multipliant ladite somme 2580049 par

le double du côté pair, sçavoir par 2822400 qui est un quarré.

## N E U V I E' M E   E X E M P L E.

**T** Rois Marchands ont mis ensemble quelque argent pour leur trafic : celui du premier a profité pendant six mois, celui du second pendant neuf mois, & celui du dernier pendant douze mois.

Le premier a reçu 70 livres, tant pour sa mise que pour son gain. Le second 230 livres. Le troisième 180 livres. On demande la mise de chacun.

Ces sortes de questions dépendent de la première règle, car on peut prendre d'autres exemples de même nature dont on aura la solution.

Ainsi je fais une autre question semblable à la première, & je pose que le premier Marchand ait mis 8 livres, & ait gagné 12 livres en six mois ; le second & le troisième doivent profiter à même raison eu égard au temps : si donc le second a mis 6 livres, son gain sera de 9 livres en six mois, & partant si son argent a profité pendant neuf mois, le profit sera de 13 livres 10 sols. Si le troisième a mis 3 livres, le profit en six mois sera de 4 livres 10 sols, & en douze mois de 9 livres.

Donc le premier aura 20 livres, tant pour son profit en six mois que pour sa mise. Le second aura 19 livres 10 sols, pour son profit de neuf mois & pour sa mise. Le troisième aura 12 livres pour son profit en douze mois & pour sa mise.

Il faut donc voir comment avec 20 livres & six mois de temps on trouvera la mise qui est 8 livres, & de même des autres.

C'est la façon ordinaire des questions qui n'ont qu'une solution, ou qui ont tout nombre pour solution comme celle-ci : mais pour celles qui en ont une multitude indéfinie (on entend ici parler des nombres dont il y a ou dont

il peut y avoir une infinité, & qui néanmoins vous mènent bientôt à de fort grands nombres, comme qui demanderoit les nombres parfaits, ou ceux qu'on nomme Amiables) on n'est pas obligé de trouver 8, car ce seroit un grand hazard si on trouvoit 8 parmi tant d'autres nombres qu'on peut donner; & puisque le gain ni la mise ne sont point séparément déterminez, on pourra prendre quel nombre on voudra pour la mise ou pour le gain, car on peut augmenter & diminuer l'un ou l'autre tant qu'on voudra; il suffit seulement de faire que l'argent de chacun profite également en temps égal, & en temps inégal à proportion du temps. Or on peut séparer un nombre en deux parties, qui auront entr'elles telle raison donnée qu'on voudra.

Mais puisqu'en la question proposée la raison de la mise & du gain n'est point donnée, il sera permis de prendre le nombre & la raison à discrétion, puisque la somme de la mise & du profit peut être séparée en deux parties qui auront telle raison qu'on voudra.

Je pose donc que la mise du premier soit de 50 livres, son profit sera donc de 20 livres; il faut donc voir quelle raison il y a de 50 à 20: mais parce que le temps de chacun est différent, il faut diviser le profit par le temps, & pour plus grande facilité je prens le plus grand nombre qui soit commun aux temps des trois Marchands. On aura donc pour le premier Marchand deux termes, pour le second trois termes, & pour le troisième quatre termes.

Je regarde quel profit a fait le premier Marchand en un terme, & je trouve 10 livres. Je considère maintenant quelle raison il y a de la mise 50 au profit d'un terme 10, la raison est quintuple, & le profit est par terme la cinquième partie de la mise.

On posera donc  $\frac{1}{5}$  pour la mise de chacun; & parce que les sommes données contiennent la mise & le gain tout ensemble, il faut assembler le profit avec lesdits  $\frac{1}{5}$ .

## 80 METHODE DES EXCLUSIONS.

Le second Marchand a laissé son argent à profit pendant trois termes, & en chaque terme a gagné la cinquième partie de sa mise; or la mise étant  $\frac{1}{5}$ , la cinquième partie sera  $\frac{1}{25}$  &  $\frac{3}{25}$  pour les trois termes; & parce que les 230 livres qu'a eues le second Marchand contiennent la mise & le gain, il faut assembler les  $\frac{1}{25}$  de la mise, avec les  $\frac{3}{25}$  de gain, & on aura en tout  $\frac{4}{25}$ ; je dirai donc par la règle de proportion :

Si  $\frac{4}{25}$  donnent 230, combien  $\frac{1}{25}$ , ou bien :

Si 8 donnent 230 livres, combien 5. Je multiplie 230 par 5, & je divise le produit 1150 par 8, le quotient 143 livres 15 sols sera la mise du second.

De même pour le troisième Marchand, sa mise étant  $\frac{1}{5}$ , son profit pour quatre termes à raison de  $\frac{1}{25}$  pour terme sera  $\frac{4}{25}$ , qui étant joint à la mise donne  $\frac{9}{25}$  pour la somme qui représente 180. Je trouverai donc par la même règle de proportion que :

Si  $\frac{9}{25}$  ou 9 donnent 180, —  $\frac{1}{25}$  ou 1 donneront 100 pour la mise du troisième Marchand.

Si on avoit pris 60 livres pour la mise du premier Marchand, le profit seroit 10 livres en deux termes, & partant 5 livres par terme, qui est la douzième partie de la mise, & sur cette proportion on trouveroit les mises des autres.

## DIXIEME EXEMPLE.

**T**rouver un triangle dont l'hypoténuse soit quarrée, & dont le moindre côté ait un quarré pour difference avec chacun des deux autres.

Puisque le triangle a deux propriétés différentes, il les faut examiner l'une après l'autre.

1<sup>o</sup> Pour faire que l'hypoténuse soit quarrée, il faut que les racines des quarrés qui la composent soient les deux côtés d'un autre triangle.

2<sup>o</sup>. Pour faire qu'un triangle ait son moindre côté différent d'un quarré de chacun des deux autres, il faut prendre

prendre pour la racine du plus grand des deux quarréz qui le composent , l'hypoténuse d'un triangle & la racine de l'autre quarré sera un des moindres côtez du même triangle , moins la différence de l'hypoténuse & de l'autre côté. Ainsi ayant choisi le triangle 3 , 4 , 5 , l'hypoténuse 5 sera la racine du grand quarré , & pour l'autre racine j'ôte d'un des cotez comme de 3 la différence de 4 à 5 , ou de 4 la différence de 3 à 5 , & restera 2. On a donc 5 & 2 dont les quarréz font le triangle 20 , 21 , 29 , qui a la condition requise. On peut voir cela dans le discours des triangles.

Mais lesdites racines 5 & 2 doivent être les deux côtez d'un triangle , si on veut que l'hypoténuse qui sera faite de leurs quarréz soit un quarré.

Il faut donc trouver un triangle dont le moyen côté soit l'hypoténuse d'un autre triangle , & le moindre côté soit un des côtez de cet autre triangle moins la différence de ladite hypoténuse & de son autre côté, De sorte que si 5 & 2 étoient les deux côtez d'un triangle , on auroit ce qu'on cherche , parce que le moyen côté 5 est l'hypoténuse du triangle 3 , 4 , 5 , & le moindre côté 2 est un des côtez dudit triangle 3 , 4 , 5 , moins la différence de l'autre côté & de l'hypoténuse.

Je chercherai par après en la Table des triangles , si je trouverai un triangle qui ait ses deux côtez tels qu'il est requis.

Et pour abréger & exclure les superflus , je voi que le grand côté doit être une hypoténuse , je ne m'arrêterai donc qu'aux triangles dont le grand côté sera impair & hypoténuse primitive , car les hypoténuses multiples ne doivent point ici être considérées , à raison que le triangle dont elles sont hypoténuses est multiple , & le triangle auquel elles serviroient de côté seroit aussi multiple ; or nous n'avons dans la Table que des primitifs , & il ne serviroit de rien aussi de considérer les multiples,

## 82 METHODE DES EXCLUSIONS.

Or il y a beaucoup de manieres pour connoître si un nombre n'est point hypotenuse : mais il ne se faut servir que de celles qui donnent d'abord à connoître que le nombre n'est point hypotenuse , comme s'il est pairement pair -- 1 ; & s'il est divisible par 3 , on rejettera donc les triangles auxquels le côté impair est petit côté, & ceux aussi auxquels ledit côté impair est mesuré par 3 , & ceux auxquels il est pairement pair -- 1.

Je considère aussi quel doit être l'autre côté du triangle , & je trouve qu'il doit être moindre que la moitié du moyen côté qui doit être hypotenuse , comme on voit à 5 & 2 , & cela est facile à juger par la construction de 2.

*Les côtés impairs sont dans la seconde colonne de la Table après l'hypotenuse.*

Avec cela j'examine les triangles de la Table , & je regarde ceux dont le grand côté est impair , & surpasse de l'unité un pairement pair.

Le premier est celui qui a 21 pour grand côté : mais parce que 21 est mesuré par 3 , je passe outre. Je laisse aussi 45 , & puis 77 , parce qu'on voit sans peine qu'il est divisible par 7 , lequel 7 n'étant point hypotenuse , ses multiples ne seront point aussi hypotenusés primitives.

Le premier qu'on trouve qui doive être examiné est 221 , son autre côté est 60 , je trouve que 221 est hypotenuse des triangles 221 , 21 , 220 , & de 221 , 171 , 140. Mais d'abord je trouve du défaut à tous les deux, car puisque 60 doit être moindre que l'un & l'autre des côtés du triangle auquel 221 sert d'hypotenuse , le triangle 221 , 21 , 220 , n'y pourra pas servir.

Dans l'autre triangle 171 étant pairement pair -- 1 , si on l'ôte de 221 , qui étant hypotenuse doit toujours être pairement pair -- 1 , il restera un impairement pair , qui étant ôté d'un pairement pair , sçavoir du côté pair 140 , restera un impairement pair , lequel partant ne pourra pas être le côté pair d'un triangle tel qu'est 60. Il faut donc :

1°. Que le grand côté du triangle serve d'hypotenuse à un autre triangle.

2°. Que le petit côté qui est pair, soit moindre que la moitié du grand côté.

3°. Que le second triangle auquel le grand côté du premier sert d'hypoténuse, ait son moindre côté plus grand que le moindre côté du premier.

4°. Que ledit second triangle ait un pairement pair  $+1$ , pour son côté impair.

Le premier triangle qui ait toutes ces conditions est 457, 425, 168, car le grand côté 425 est l'hypoténuse d'un autre triangle, & le petit côté 168 est moindre que la moitié de 425; de plus 425 sert d'hypoténuse au triangle 425, 297, 304, auquel le moindre côté 297 est plus grand que 168, & le côté impair 297 est pairement pair  $+1$ .

Mais on pourroit encore donner une autre condition au second triangle, auquel il faut, qu'ôtant 304 de 425, & ôtant ce qui reste de 297, il reste enfin 168; mais ledit 168 doit nécessairement être divisible par 3, & desdits trois côtés 425, 297, 304, il ne sçauroit y avoir que l'un des deux moindres divisible par 3; & partant afin que la dernière différence ou reste soit mesuré par 3, il faut que les deux autres, comme 425, 304, excèdent 3 d'une même quantité, car ainsi leur différence sera mesurée par 3, & cette différence étant par après ôtée du troisième côté qui est aussi mesuré par 3, le dernier reste sera mesuré par 3, & cette cinquième condition ne se trouve pas dans ledit triangle 425, 297, 304, car 304 surpasse un ternaire de l'unité, & 425 le surpasse de 2.

Passant outre à chercher les triangles, on trouve 725 qui sert de côté au triangle 733, 725, 308, & d'hypoténuse au triangle 725, 333, 644, lesquels ont les cinq conditions requises; car pour la cinquième 644 surpasse de 2 un ternaire aussi-bien que l'hypoténuse 725; mais si on considère les finales, on verra que cela ne peut réussir, c'est-à-dire, que si on ôte 333 de 725, & qu'on ôte le



#### 84 METHODE DES EXCLUSIONS.

reste de 644, il ne peut pas rester 108 comme il seroit besoin, ce qui se connoîtra ôtant seulement les dernières lettres: car si on ôte le 3 de 333, du 5 de 725, il restera 2, lequel étant ôté du 4 de 644, restera 2, mais il faudroit qu'il restât 8 pour avoir la finale de 108.

La considération de ces finales est fort facile, & montre d'abord l'impossibilité quand elle provient de là. On peut aussi juger de cette façon de recherche qu'en travaillant on trouve toujours de nouvelles facilités & abrégés.

Mais passant outre à la recherche, on trouvera 925 au triangle 997, 925, 372, qui a aussi les quatre premières conditions avec celui qui a 925 pour hypoténuse, sçavoir 925, 533, 756: mais ce dernier n'a pas la cinquième, joint que les finales y répugnent comme au précédent.

Le même empêchement se trouve aussi à 1261, 1189, 410, & à son correspondant 1189, 989, 660.

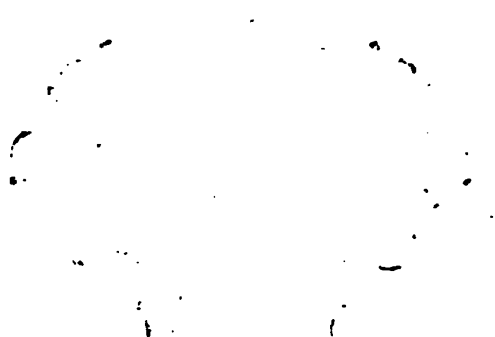
Enfin on trouve 1517 au triangle 1525, 1517, 156, & son correspondant 1517, 165, 1508, qui sont les premiers qui ont toutes les conditions requises, & même les finales s'accordent bien à ce qui est requis. On éprouvera donc si ôtant de 165 la différence de 1508 à 1517, on aura 156; j'ôte 1508 de 1517, reste 9, lequel étant ôté de 165, reste 156, ainsi qu'il est requis.

On a donc trouvé un triangle dont le moyen côté, sçavoir 1517, est hypoténuse d'un autre triangle, & dont le moindre côté 156 est moindre que l'un des côtés du second triangle de la différence de l'autre côté à l'hypoténuse, car 156 est moindre que 165 de 9, lequel 9 est la différence de l'autre côté 1508, & de l'hypoténuse 1517; ce qu'il falloit trouver.

Ayant ce triangle 156, 1517, 1525, on aura celui qui est requis prenant les côtés de celui-ci pour les racines des quarrés qu'il compose, les quarrés de 156 & 1517 font 24336 & 2301289, qui donnent le triangle 473304, 2276953, 2325625, auquel l'hypoténuse est un quarré

**METHODE DES EXCLUSIONS. 85**

dont la racine est 1525, & le moindre côté 4733042 un  
quarré pour difference avec chacun des deux autres, car  
la difference avec le moyen côté est 1803649 quarré de  
1343, & avec l'hypotenuse 1852321 quarré de 1361.  
Ainsi qu'il étoit requis.



# A B R E G É

## D E S

# COMBINAISONS.

**O**N appelle Combinaison le divers assemblages de plusieurs choses.

Il y en a de deux sortes principales, chacune desquelles se divise encore en d'autres. De ces deux jointes ensemble on en fait une troisième qui est mêlé de ces deux, & encore une quatrième qu'on nommera multiple, parce qu'elle se fait par la multiplication de chacune de ces sortes.

La premiere sera nommée combinaison d'ordre, la deuxième combinaison de changement, la troisième mêlée, & la quatrième multiple.

La combinaison d'ordre contient les façons différentes dont on peut arranger & disposer plusieurs choses; par exemple, en combien de sortes on peut arranger quelque multitude de soldats, ou combien on peut faire de nombre differens avec quelques chiffres, ou combien on peut faire d'Anagrammes de quelque nom, soit qu'elles se puissent prononcer, ou qu'elles ne le puissent; & ce qu'on observe en ceci, & qui est la propriété particulière de cette combinaison, est que les choses une fois prises ne doivent point être changées; comme si on prend cette diction *Jagues*, on considérera la variété des dispositions que peuvent recevoir les six lettres de cette diction, sans qu'il soit permis de mettre quelque autre lettre nouvelle outre ces six, ou d'en omettre quelqu'une.

Cette combinaison a plusieurs cas, ou une infinité, qui se réduiront à deux.

Le premier & le principal est quand toutes les choses combinées sont différentes, comme lors qu'il est question d'arranger des hommes, pas un desquels ne se peut trouver en deux lieux : ou lors qu'on fait les Anagrammes de quelque diction, dont toutes les lettres sont différentes, comme *Charité*.

Le second, qui dépend du premier, est quand parmi les choses combinées, il y en a de semblables, comme il arrive en faisant les Anagrammes des diction qui ont quelque lettres semblables : par exemple, si on vouloit sçavoir combien on peut faire d'Anagrammes de cette diction *Pierre*, entre les six lettres de laquelle il y a deux *e*, & deux *r* qui se ressemblent.

*Combinaison d'ordre.*

L'ordre des choses différentes se trouve comme il s'enfuit.

On multiplie la combinaison de la multitude précédente par le nombre de la multitude donnée : ainsi pour avoir l'ordre de six choses, il faut multiplier l'ordre de 5 choses par 6 ; & pour avoir l'ordre de 5, on multipliera celui de 4 par 5 ; & pour celui de 4, on prendra le produit de l'ordre de 3 par 4 ; de même pour celui de 3, on multipliera l'ordre de 2 par 3. Or l'Ordre de 2 ne peut être que 2, car deux choses ne souffrent que deux dispositions différentes, sçavoir en mettant au premier lieu celle qui auparavant étoit au second, comme *B, A.* & *A, B.* On pourroit dire aussi que la combinaison de deux choses se trouve en multipliant celle de 1, qui est 1 par 2.



1	1
2	2
6	3
24	4
120	5
720	6
5040	7
40320	8
362880	9
3628800	10
39916800	11
479001600	12
6217020800	13
87178291200	14
1307674368000	15
20922789888000	16
355687428096000	17
6402373705728000	18
121645100408832000	19
2432902008176640000	20
51090942171709440000	21
112400072777607680000	22

On trouve  
cette combinaison  
pour savoir jus-  
qu'à 64. in  
lib. Harmoni-  
con, de P. Mer-  
fenne, pag. 116,  
& 117.

Si on veut donc trouver l'ordre de quelque multitude, il faudra chercher celui des multitudes précédentes, & faire la Table de toutes, comme on voit ici.

La colonne qui est du côté droit contient le nombre de la multitude des choses dont on veut sçavoir l'ordre, c'est-à-dire la différente façon de les arranger : celle qui est du côté gauche contient l'ordre.

Je mets donc premièrement 1, tant à droite qu'à gauche, parce que l'ordre d'une chose n'est qu'un ; puis je mets du côté droit le nombre suivant 2, par lequel je multiplie l'ordre du précédent, sçavoir 1, pour avoir 2.

Je mets après 3 au-dessous de 2 à droit, & par ce nom-

*Rec. de l'Ac. Tom. V.*

M

90 ABREGE' DES COMBINAISONS.

bre je multiplie l'ordre de 2, sçavoir 2; & on aura 6, qu'il faudra mettre près de 3: ensuite j'écris 4 dessous 3, & je multiplie par ce 4 l'ordre de 3, sçavoir 6, pour avoir 24, & ainsi de suite comme on voit en la Table.

*obie* Voici la differente disposition qu'on peut donner  
*obei* à quatre choses, afin de faire voir de quelle façon  
*oibe* on les arrangera pour n'omettre aucune disposi-  
*oieb* tion. On se proposera premierement quelque or-  
*oebi* dre, comme en ces quatre lettres *o, b, i, e*. La  
*oeib* premiere soit *o*, la seconde *b*, &c. il faut en rete-  
*boie* nant la premiere changer l'ordre des dernieres.  
*boei* Ainsi, ayant placé & disposé les quatre lettres se-  
*bioe* lon cet ordre, je retiens *o* que je laisse toujours au  
*bico* premier lieu, & je change les trois autres *b, i, e*,  
*beoi* en toutes les façons possibles qui sont 6, & pour  
*beio* ces 6, on observera encore la même regle; & ainsi  
*iobe* parce que je trouve *b*, le premier des 3, je le re-  
*ioeb* tiens, & je change les deux autres *i, e*, en toutes  
*iboe* les sortes, qui sont 2, sçavoir *i, e*, & *e, i*.

Cela fait je change le *b*, & en son lieu je mets  
*ieob* la lettre suivante, sçavoir la troisième qui est *i*, &  
*iebo* on aura *o, i*, & ensuite je mets les deux autres  
*eobi* *b, e*, dans leurs deux rangs, & enfin après *o* je mets  
*eoib* la quatrième lettre, sçavoir *e*, & je change encore  
*eboi* les deux autres *b, i*, en leurs deux façons.

Et parce que la quatrième lettre est la dernière,  
*ebio* & qu'on ne peut plus en mettre d'autre au second  
*eiob* lieu, je change la premiere lettre *o*, & en sa place  
*eibo* je mets la seconde *b*, & ensuite les trois autres selon  
leur ordre, sçavoir la premiere au second lieu, puis la troi-  
sième & quatrième, & la seconde lettre *b*, demeurant ainsi  
au premier lieu, on fera les six changemens des autres trois,  
sçavoir de *o, i, e*, comme auparavant. Cela étant fait, on  
mettra la troisième lettre *i* au premier lieu, & on fera en-  
core les six variations des trois autres, *o, b, e*, & enfin on

mettra la dernière *e* au commencement, pendant que les trois autres *a, b, i*, seront arrangées en six façons.

S'il y avoit cinq lettres différentes comme *Tobie*, on auroit en la même manière que ci-dévant les vingt-quatre changemens de *a, b, i, e*, le *T* demeurant toujours le premier; puis on ôteroit le *T* du premier lieu, & en sa place on mettroit *a*, après lequel on mettroit *T, b, i, e*, en vingt-quatre sortes; puis la troisième lettre *b* tiendrait le premier lieu, & enfin la quatrième & la cinquième.

De même, si on avoit six lettres, on feroit le changement des cinq dernières en cent vingt façons, & mettant chacune des six lettres au premier lieu, on aura six fois 120, sçavoir 720, pour les divers arrangemens des six choses.

Pour sept lettres on fera les 720 changemens des six dernières, qui seront recommencés sept fois, à cause des sept lettres qui doivent occuper le premier lieu.

On trouvera de la même sorte les diverses situations pour les autres multitudes, ce qui donne assez à connoître la construction de la table précédente, & la raison pour laquelle il faut multiplier tous les nombres & leurs produits depuis l'unité jusqu'au nombre de la multitude requise, pour avoir la combinaison de quelque multitude: car ayant à disposer plusieurs choses d'un ordre différent, on commence à operer sur les trois dernières; & gardant la première des trois, on range les deux dernières en deux façons: & parce qu'il y a trois lettres différentes, on mettra chacune des trois pour la première, & après chacune on mettra les deux autres en deux façons. D'où il s'ensuit que pour avoir la combinaison de trois choses, il faut multiplier 2 par 3, dont le produit est 6.

Si on vient après à considérer quatre choses, on a montré comme les trois dernières se peuvent varier en six façons: mais parce que chacune de ces quatre choses peut tenir le premier lieu, & que les trois qui resteront se va-



## 92 ABREGE' DES COMBINAISONS.

rient en six sortès, il faudra multiplier 6 par 4, pour avoir la varieté de l'ordre de quatre choses, qui sera 24.

De même, si on a cinq choses, chacune doit être mise la premiere, & à chacune de ces situations les quatre dernieres seront rangées en vingt-quatre sortes: il faut donc multiplier 24 par 5. Pour avoir l'ordre de cinq choses, qui sera 120; & ainsi de suite, il faudra multiplier la combinaison précédente par le nombre de la multitude donnée; & cela est une preuve évidente qui sert de démonstration pour la construction de la table.

Mais lorsque dans une diction il y a plusieurs lettres semblables, comme en cette diction, *Beauté*; il est certain qu'il n'y aura pas tant de varietez en l'ordre, que si toutes les six lettres étoient différentes; & que les deux *e* qui s'y rencontrent diminuent la multitude de ces varietez.

En ce cas, il faudra prendre la combinaison de l'ordre des lettres selon leur multitude, & la diviser par l'ordre qui appartient à la multitude des semblables: ainsi, pour sçavoir combien on peut faire d'anagrammes de la diction *Beauté*, on prendra la combinaison de l'ordre de six choses, qui est 720; & parce que dans la diction il y a deux lettres semblables, on divisera 720 par la combinaison de deux choses, qui est 2, le quotient 360 sera la multitude des anagrammes requises.

*ebene* De même pour cette diction, *Ebene*, on prendra 120, qui est la combinaison de 5, à cause de ses cinq lettres: mais parce que parmi ces cinq lettres il y en a trois semblables, je divise 120 par la combinaison de 3, sçavoir par 6, & le quotient 20 sera la multitude des anagrammes de cette diction.

*eeben* On voit ici les 20 varietez de ces cinq lettres, qui pourront donner à connoître comment on pourra faire les varietez des situations, quand les choses ne sont pas toutes différentes.

*eenbe*  
*enebe*

*gnceeb* Que s'il y avoit plusieurs sortes de lettres sem-  
*beene* blables, il faudroit diviser la combinaison de tou-  
*beeen* tes les lettres par celle de chaque sorte de sem-  
*benee* blable, comme aux dictions, *Pierre & George*,  
*bnnee* auxquelles il y a six lettres, mais deux d'une sor-  
*nebee* te & deux d'une autre.

*neebe* Je prendrai la combinaison de 6, sçavoir 720,  
*neeeb* & la diviserai par celle de 2, & le quotient 360  
*nbeee* encore par celle de 2, & j'aurai 180: ou bien je  
 multiplierai la combinaison de 2 par celle de 2,  
 le produit sera 4, par lequel je diviserai 720, & le quo-  
 tient sera 180.

Pour avoir la combinaison ou la multitude des ana-  
 grammes de la diction, *Ananas*, je vois qu'elle a six let-  
 tres: je prens donc 720, qui est la combinaison de 6; &  
 parce qu'entre ces lettres il y en a trois d'une sorte & deux  
 d'une autre, je divise 720 par la combinaison de 3, sçavoir  
 par 6, & le quotient 120 par celle de 2, sçavoir par 2, &  
 j'aurai 60: ou bien je multiplie la combinaison de 3 par  
 celle de 2, sçavoir 6 par 2, & par le produit 12 je divise la  
 combinaison de la multitude des lettres, sçavoir 720, le  
 quotient 60 donnera la multitude des varietez des lettres  
 de cette diction.

Il semble que l'ordre demanderoit qu'on traitât ensuite  
 de la combinaison de changement ou de choix: mais par-  
 ce qu'on trouve les varietez par le moyen de la mêlée, on  
 traitera premièrement de celle-ci, & on commencera par  
 celle qu'on nomme générale.

#### *Combinaison générale.*

Cette combinaison est celle qui a été appelée mêlée,  
 parce qu'elle contient tant l'ordre que le changement des  
 choses. On la peut aussi diviser en deux especes, comme  
 les autres, sçavoir si on considere les choses toutes diffe-  
 rentes, ou bien si on suppose qu'elles puissent être toutes

semblables, ou qu'il y en puisse avoir plusieurs semblables.

Cette dernière combinaison est la plus universelle de toutes, puisqu'elle comprend toute seule tout ce qui est compris dans toutes les autres; car on y considère l'ordre comme en la première, & on prend les choses dans une plus grande multitude, comme en la seconde; & outre cela on en peut prendre plusieurs semblables ou toutes, comme si on prenoit les douze cartes du piquet dans douze jeux de piquet, car par ce moyen les douze cartes pourroient être semblables, & ainsi on pourroit avoir douze Rois de pique; ou seulement neuf ou dix cartes semblables, & les autres différentes, & en toutes les autres façons possibles; & l'ordre fera voir en combien de manières on les pourroit jouer & jeter sur la table en toutes ces sortes de jeux.

Cette combinaison se trouve, prenant la multitude des choses pour l'exposant d'une puissance, qui a pour racine la diversité des choses combinées: ainsi pour sçavoir en combien de façons on peut avoir & arranger ou jouer les douze cartes prises dans douze jeux de piquet de trente-six cartes chacun, afin qu'on en puisse avoir tant de semblables qu'on voudra, il faut prendre 36 pour racine, & 12 pour l'exposant de la puissance.

Ce sera donc la douzième puissance de 36.

Si on ne prenoit qu'une carte, on n'auroit que 36 variétés.

Si on en prenoit 2, on auroit 1296 variétés, sçavoir le carré de 36.

Pour trois cartes, on prendroit le cube de 36. Pour quatre, le carré carré. Pour cinq, la cinquième puissance de 36, & ainsi des autres.

La vérité de cette opération se peut tirer ou du raisonnement, ou de quelque exemple. Nous en avons un exemple aux chiffres, car il est certain qu'on les prend & dispose en toutes les façons possibles, soit semblables ou différentes & prises dans un plus grand nombre, & on a aussi égard

à l'ordre : or les nombres se suivent, & ne different de proche en proche que de l'unité ; d'où il s'ensuit que le dernier & plus grand nombre de ceux qui ont une certaine multitude de lettres, comprendra tous les précédens ; par exemple, le plus grand nombre qui s'écrive par deux lettres ou chiffres est 99, qui comprend non seulement les nombres de deux lettres, mais aussi ceux qui n'en ont qu'une ; mais il faut considerer que parmi ces nombres, il n'y en a aucun qui ait un zéro du côté gauche, & en la place des dixaines : on le pourra donc supposer au-devant des neuf premiers chiffres où il ne signifie rien, en prenant 01, 02, &c. & ainsi on auroit 99, nombres de deux lettres. Mais il y en manque encore un, pour avoir toutes les combinaisons des dix caracteres pris deux à deux : car celui qui seroit fait de deux zero, sçavoir 00, n'y est point ; il faudra donc ajouter 1 à 99 pour avoir en tout 100 varietez, que peuvent souffrir deux choses prises dans dix. Or le nombre 100 contient 10 & 2, car 10 est la racine, & 2 son exposant.

Les mêmes nombres ou chiffres pourroient encore fournir un autre exemple, sçavoir si on prenoit les deux choses dans neuf differentes, comme si on cherchoit tous les nombres de deux chiffres qui n'ont point de zero ; car par ce moyen on n'aura que neuf lettres, or en chaque dixaine il y a neuf nombres qui n'ont point de zero, & il n'y a que neuf dixaines qui ayent deux lettres, car les nombres de la premiere n'ont qu'une lettre : si donc on multiplie 9 par 9, on aura 81, qui est la varieté requise de deux choses prises dans neuf, c'est la même chose aux autres quantitez. Mais voici comme on fera voir la verité de cette règle.

Pour ne point sortir de notre exemple de neuf, on voit premierement que si on ne prend qu'une seule chose dans neuf differentes, on n'aura que 9 varietez : mais si on prend deux choses, puisqu'après chacune des neuf choses on peut mettre chacune des mêmes l'une après l'autre ; pour

avoir cette variété, il faudra multiplier 9 par 9, & on aura 81, qui est le quarré de 9.

Que si on prend trois choses dans les neuf, on pourra devant chacune des 81 combinaisons précédentes mettre chacune des neuf choses : il faudra donc, pour avoir la variété de trois choses prises dans neuf, multiplier 81 par 9, pour avoir 729 cube de 9.

Et ainsi continuant, on fera voir que pour avoir la variété de quatre choses prises dans neuf, il faut multiplier 729 par 9, pour avoir le quarré quarré de 9, parce que devant chacune des 729 façons dont on aura pris & arrangé trois choses, on pourra mettre chacune des neuf dans lesquelles on les a prises.

De même, pour cinq choses prises dans neuf, on prendra la cinquième puissance de 9, &c.

Il faut seulement prendre garde que la diversité des choses qu'on prend, comme est ici 9, sert toujours de racine, & la multitude des mêmes choses sert d'exposant.

*Combinaison de changement ou de choix.*

La seconde espece de combinaison est nommée de changement, ou de choix ; à la différence de la première, où on suppose que les mêmes choses demeurent toujours ; mais en celle-ci, on les varie, & on en fait comme divers amas pris dans une grande multitude. Par exemple, si d'un Régiment de 1000 hommes, on en détache 100, & qu'on veuille sçavoir en combien de sortes on peut faire une Compagnie de 100 soldats pris dans un Régiment de 1000 ; ou bien si on veut sçavoir en combien de sortes on peut avoir les douze cartes du jeu de piquet, où il y en a trente-six ; on voit manifestement que l'ordre ne fait rien à cette multitude, car la différente disposition des cartes dans la main ne change rien au jeu, encore qu'on puisse bien avoir égard à l'ordre tant aux soldats en les arrangeant

geant diversement, qu'aux cartes en les jettant de plusieurs manieres.

Cette combinaison sera aussi divisée en deux especes comme la précédente, sçavoir celle en laquelle toutes les choses sont differentes, comme en l'assemblage des soldats, & celle en laquelle il se trouve plusieurs choses semblables, comme si on avoit un cent de diverses sortes de fruits, sçavoir de chacune espece un cent, & qu'on voulût sçavoir en combien de façons on pourroit remplir un panier d'un cent de ces fruits, ou bien si on avoit ensemble douze jeux de piquer, & qu'on voulût voir en combien de sortes on pourroit avoir douze cartes à les prendre dans ces douze jeux.

Pour trouver la multitude des choix, il faut remarquer que toute combinaison mêlée étant divisée par l'ordre, donne la combinaison de changement, pourvû que toutes les choses soient differentes, ou qu'il y en ait toujours autant de semblables.

Exemple. Si on avoit six paniers dont chacun fût plein d'une espece de fruit different des autres, mais égaux entr'eux, & qu'on voulût voir en combien de façons on pourroit prendre un cent de ces fruits dans les six paniers, supposant toujours que dans chaque panier tous les fruits soient égaux, & qu'il n'y ait rien à choisir, de sorte que chaque espece de fruit soit reputée pour un même fruit, ainsi que les lettres de l'Alphabet, chacune desquelles ne differe en rien de sa semblable en ce qui regarde l'usage qu'on en fait dans les diction; & ainsi dans la diction *Anna*, le premier *a* n'est pas autre que le second: or on entend que les fruits d'une même espece soient ici pris en la même façon que les lettres.

Si donc on veut avoir la varieté des sortes de choix qu'on peut faire d'un cent de ces fruits dans les six paniers, dans chacun desquels il faut supposer aussi qu'il y ait pour le moins un cent de fruits, afin que si on veut on puisse

prendre un cent de ces fruits tous égaux, il faut faire la combinaison générale de cent choses prises dans six sortes de choses, si on y comprend aussi l'ordre.

Et parce que la variété des choses est 6, ce nombre sera la racine, & 100 qui est la multitude des choses qu'on prend servira d'exposant. On prendra donc la centième puissance de 6 pour la variété des diverses façons dont on pourroit prendre & arranger les fruits pris dans les six paniers.

Et parce que la combinaison générale contient la combinaison de l'ordre en toutes les façons possibles, tant des choses semblables que des différentes, dont l'ordre est différent, on ne la peut pas diviser par l'ordre; car la somme de plusieurs diviseurs donne un autre quotient que s'ils étoient séparés, c'est-à-dire, que si on divisoit séparément par chacun d'eux; joint que quelques-unes de ces variétés n'ont point d'ordre, c'est-à-dire, ne se peuvent mettre qu'en une seule façon, comme lorsque les choses qu'on a prises sont toutes semblables: & les autres, où il se trouve plusieurs choses semblables, ont fort peu de variétés d'ordre; par exemple, si on a quatre choses, elles seront considérées confusément, soit qu'on les prenne toutes différentes, comme  $a, b, c, d$ , ou deux semblables, & deux autres différentes, comme  $a, a, b, c$ , ou trois semblables, & une autre comme  $a, a, a, b$ , ou deux d'une sorte & deux d'une autre, comme  $a, a, b, b$ , ou enfin toutes quatre semblables comme  $a, a, a, a$ , ou  $b, b, b, b$ .

$a, b, c, d$  se change en vingt-quatre façons;  $a, a, b, c$  en douze;  $a, a, a, b$  en quatre;  $a, a, b, b$  en six, & enfin  $a, a, a, a$  ne peut être disposé que d'une sorte, & n'a aucun ordre: mais voici comme on en séparera l'ordre.

Nous avons dit que la combinaison de changement étoit de deux sortes: l'une où toutes les choses sont différentes comme aux douze cartes du piquet, l'autre où elles peuvent être indifféremment, ou toutes différentes, ou

toutes semblables, ou en partie dissemblables & en partie semblables, comme si on prenoit les douze cartes du piquet dans douze jeux de piquet.

Pour l'une & l'autre sorte de choix, il faut faire douze nombres par multiplication, compris le premier qu'on multiplie, qui est 36, à cause qu'il y a trente-six sortes de choses; mais pour le premier où tout est différent, il faut multiplier par les nombres inférieurs, savoir par 35, & le produit par 34, &c. & pour le second qui peut avoir des choses semblables, il faut multiplier par les supérieurs, savoir par 37, 38, &c.

Ce qu'il faut observer en ceci, est que le nombre par lequel on commence les multiplications est celui de la variété, & la multitude des nombres qu'il faut trouver par les multiplications le premier compris, est la multitude des choses.

Ainsi voulant avoir toutes les façons du jeu de piquet, savoir, de douze cartes prises dans trente-six, en sorte qu'elles soient toutes différentes, je prens 36 pour le terme & commencement des multiplications, & parce que toutes les cartes doivent être différentes, il faudra multiplier 36 par les nombres précédens moindres, savoir par 35, & le produit 1260 par 34, pour avoir 42840, qu'il faudra encore multiplier par 33, & continuer tant qu'on ait douze nombres, ce qui se fera après onze multiplications, & le dernier nombre par lequel il faudra multiplier sera 25, savoir 11 moins que 36; car on prend toujours un moins que la multitude des choses, à cause que le nombre de la variété, savoir 36, est pris pour le premier nombre.

Le dernier produit est 599555620984320000, qui contient la variété de douze cartes prises en trente-six avec l'ordre, c'est-à-dire supposant qu'on les arrange aussi en toutes les façons possibles, qui est le premier cas, ou première sorte de la combinaison mêlée, qui suppose tou-



tes les choses différentes, mais prises en un plus grand nombre, & supposant aussi l'ordre.

Que si on veut avoir les jeux de piquet sans l'ordre, puis-que cet ordre ne change point le jeu, il faudra diviser le nombre trouvé 599555620984320000 par la combinaison de l'ordre de douze choses, sçavoir par 479001600, & on aura 1251677700 varietez de jeux de piquet.

Pour ce qui est de jouer & de jeter les cartes sur la table, il faut avoir égard à l'ordre, & chaque jeu se peut jouer en 479001600 sortes, car telle est la combinaison de l'ordre de douze choses, & ainsi pour avoir en tout en combien de sortes on peut jouer les douze cartes prises en 36, il faut multiplier 1251677700 par 479001600, pour avoir le nombre ci-devant trouvé 599555620984320000, qui montre en combien de façons on peut avoir & jouer les douze cartes.

Voilà pour ce qui appartient à la combinaison de changement, & à la combinaison mêlée lorsque toutes les choses sont différentes.

Car la mêlée, où l'ordre est compris, se trouve comme on a vû multipliant le nombre de la varieté des choses, comme 36 par les nombres précédens 35, 34, &c. tant qu'on ait autant de nombres ou produits compris 36, que la multitude des choses, qui est 12, & prenant le dernier produit pour le nombre requis.

Et la combinaison de changement se trouve divisant ce nombre, sçavoir le dernier produit, par le nombre de la combinaison d'ordre de la multitude des choses, qui est ici 12.

Reste à donner un exemple de la même combinaison de changement, lorsque les choses peuvent être semblables.

Que les douze cartes se prennent dans douze jeux de piquet de trente-six cartes chacun, afin qu'elles puissent être toutes semblables, il faudra, comme on a dit ci-devant,

multiplier 36 par les nombres suivans, sçavoir par 37, 38, &c. tant qu'on ait 12 nombres ou produits, sçavoir autant que la multitude des choses, & ainsi le dernier nombre qui multipliera sera 47, puis diviser le produit par l'ordre du nombre de la multitude, sçavoir par l'ordre de 12.

De même pour les six paniers de fruit dans tous lesquels on choisit cent fruits à discrétion, avec liberté de prendre si on veut tous les cent de même espèce, & d'un même panier.

Parce que le nombre de la variété est 6, je prens 6 pour le terme ou commencement des multiplications, je le multiplie donc par 7, & le produit 42 par 8, & le produit par 9, tant qu'on ait 100 nombres, compris 6, & ainsi le dernier nombre qui multipliera sera 105, qui surpasse 6 de 99, sçavoir de 1 moins que le nombre de la multitude 100, à cause que 6 est compté pour le premier nombre, & le dernier produit étant divisé par l'ordre de cent choses, qui est la multitude des choses qu'on prend, donnera le nombre requis.

Que si on avoit des tables faites de la combinaison d'ordre, qui est la plus ordinaire & la plus en usage, on y pourroit prendre la combinaison de 105, sçavoir de 1 moins que la somme des deux nombres de variété & de multitude, & la diviser par la combinaison de 5, sçavoir de 6—1; car si on avoit commencé par 2 à multiplier, & qu'on eût continué jusques à 105, on auroit la combinaison de 105: mais parce qu'on n'a commencé que par 6, il s'ensuit que le produit devoit être multiplié par la combinaison de 5 pour parvenir à celle de 105; & par conséquent, si on divise celle de 105 par celle de 5, on aura le nombre requis, qui doit être divisé par celle de 100, comme il a été dit.

Mais parce que de si grandes divisions & multiplications sont ennuyeuses, on se pourra servir du moyen suivant pour se passer de la division, & diminuer beaucoup les multiplications.

Nous prendrons l'exemple des jeux de piquet dans les deux façons précédentes.

1<sup>o</sup> On prend douze cartes dans trente-six toutes différentes, & on demande en combien de sortes je puis avoir les douze cartes : parce que 36 est la variété des choses, il me servira de terme ; & parce qu'il y a douze choses, je prens 12 nombres, compris 36, car la multitude des nombres qui se multiplient doit suivre la multitude des choses qui se combinent : & parce que les cartes sont toutes différentes, & qu'il n'y en a point de semblables, je prens les nombres moindres que 36, comme on voit ici, sçavoir 36, 35, 34, &c. le produit desquels il faudroit diviser par la combinaison d'ordre de douze choses, laquelle combinaison se trouve, en multipliant l'un par l'autre tous les nombres jusqu'à 12, sçavoir 1, 2, 3, &c.

Puis donc que le produit des nombres inferieurs doit diviser celui des superieurs, il faut que les inferieurs se trouvent tous séparément dans les superieurs, autrement leur produit ne diviseroit pas l'autre grand produit.

Que les inferieurs soient donc ôtez des superieurs, & la division sera faite, comme on voit ici.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & & 7 & 9 & & & & \\
 36, 35 : 34, 33, 32, 31, 30, 29, 28, 27, 26, 25, & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 2 & & 3 & & & & & \\
 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. & & & & & & & & & & & 
 \end{array}$$

Je considere donc les superieurs, & je trouve premierement 36, qui est le produit de 3 & 12 ; j'ôte donc 36 de la ligne superieure, & 3 & 12 de l'inferieure.

Je viens à 35, qui est produit par 5 & 7 ; j'ôte donc 35 d'un côté, & 5 & 7 de l'autre.

34 est fait de 2 & 17 ; mais parce que 17 n'est point en la ligne inferieure, je passe à une autre, & considere 33, qui est produit par 3 & 11 ; j'ôte donc 33, & de la ligne inferieure j'ôte 3 & 11 ; mais parce que le nombre 3 ne s'y trouve plus, je l'ôte de quelque composé de la même ligne

inferieure, comme de 9, & je remets un 3 dessus, parce que 9 est fait & produit de deux 3.

32 est fait de 4 & 8; j'ôte donc 32 de la ligne supérieure,  
& 4 & 8 de l'inférieure. | 31 est nombre premier.

30 est fait de 3 & 10; j'ôte donc 30, & de la ligne inférieure j'ôte 3 & 10, ſçavoir le 3 que j'avois mis ſur le 9.

Il ne reste plus en bas que 2 & 6 : le 6 est fait de 2 & 3 ; j'ôte donc 3 de quelque nombre de la ligne supérieure, comme de 27, reste 9, que j'écris dessus 27 ; & ôtant ainsi le 3 de 6, reste 2, que j'écris sur 6, ( car ici, où il est question de parties qui font le nombre par multiplication, ôter un nombre c'est diviser par ce nombre. )

Enfin il reste en bas 2 & 2, qui font 4, que j'ôte de quel-  
que nombre de la ligne supérieure, comme de 28, reste  
7, que j'écris dessus, & j'ôte tant 28 que les deux 2 de la  
ligne inférieure.

Reste donc en la ligne supérieure à multiplier, 34, 31, 29, 7, 9, 26, 25, l'un par l'autre, dont le produit fait 1251677700 pour la diversité des jeux de piquet, comme on avoit trouvé ci-devant.

Que si on prend les douze cartes dans douze jeux de trente-six cartes chacun, les douze cartes pourront être semblables : il faut donc prendre 12 nombres, suivant la multitude des cartes, à commencer par 36, qui représente la variété des cartes, & poursuivant par les nombres plus grands, comme on voit ici, il faudroit diviser le produit des supérieurs par celui des inférieurs : mais pour épargner cette division, on ôtera les semblables comme ci-devant, sçavoir pour 36, on ôtera 3 & 12.

19 23  
36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12.

**Pour 40. | 4 & 10 pour 42. | 6 & 7. pour 44, 11 & 4.**

**Mais parce qu'il n'y a point de 4, on le prendra dans 8,**

& on mettra un 2 dessus. Pour 45 on ôtera 5 & 9, & il restera 2 & 2 en la ligne inferieure : on en ôtera l'un de 38, & l'autre de 46, restera 19 & 23, qu'on écrira dessus.

Restera donc 37, 19, 39, 41, 43, 23, 47, qu'il faut multiplier l'un par l'autre ; le produit 52251400851 sera la variété requise des jeux qu'on peut avoir, sçavoir de douze cartes prises dans douze jeux de trente-six cartes chacun.

*Corollaire premier.*

De ce qui a été dit, il s'ensuit que tout nombre qui dénote la variété des choses différentes sans l'ordre, dénote aussi la variété de quelques autres, entre lesquelles toutes ou quelques-unes peuvent être semblables pareillement sans l'ordre, exemple.

Le nombre qui montre la variété de douze cartes prises dans trente-six, montre aussi la variété de douze cartes prises dans douze jeux de vingt-cinq cartes chacun, c'est-à-dire, supposant douze jeux semblables, chacun desquels auroit vingt-cinq cartes différentes.

La raison se tire de l'opération, car aux deux cas des cartes différentes ou semblables, on prend le nombre de la variété pour le premier, & si les choses sont différentes, on prend les nombres moindres : que si elles peuvent être semblables, on en prend autant qui soient plus grands que le nombre de variété : mais si du grand nombre comme 36, on descend au moindre 25, & qu'on multiplie les nombres qui sont entre deux, comme il a été dit, on aura le même produit, que si on prend 25 pour le nombre de la variété, & qu'on monte jusqu'à 36 : mais le premier se fait quand les choses sont différentes, & le second quand elles peuvent être semblables : donc un même nombre montre la combinaison des choses différentes, & de celles aussi qui peuvent être semblables, en le divisant par la combinaison d'ordre de douze choses ; mais des deux nombres

nombre qui sont les extrêmes de ceux qui le multiplient, le plus grand sera la variété des choses quand elles sont toutes différentes, comme 36 ; & le moindre comme 25, quand les choses peuvent être toutes semblables.

De même, le nombre qui représente la diversité ou combinaison de douze cartes prises en douze jeux de trente-six cartes chacun, montre aussi la combinaison de douze cartes prises en quarante-sept.

Ainsi pour passer des cartes semblables aux différentes, on change la variété des cartes, & on prend le douzième nombre en augmentant si on se sert de douze cartes chaque fois, & au lieu de 36, on aura 47.

Mais pour passer des choses différentes aux semblables, il faut prendre le douzième nombre en diminuant, & au lieu de 36, on prend 25, car le nombre de la multitude, sçavoir 12, ne change point.

*Corollaire second.*

Lorsqu'on prend les douze cartes dans douze jeux de cartes, afin qu'elles puissent être toutes semblables, on les peut considérer avec l'ordre, ou sans l'ordre : si on y met l'ordre, il se faut servir des puissances quarrées ; si on n'y met point l'ordre, on se servira des puissances triangulaires.

On nomme ici puissance quarrée celle qui se fait par multiplication de la racine par elle-même, puis du produit par la même, &c. comme sont les puissances ordinaires.

On nomme puissance triangulaire celle qui se fait par l'addition des puissances qui ont 1 moins d'exposant depuis la première, qui est 1, jusques à celle qui a pareille racine : ainsi la sixième puissance triangulaire de 5 est la somme des cinq premières cinquièmes puissances, & la cinquième puissance de 5 est la somme des cinq premières quatrièmes puissances, & la quatrième puissance de 5 est

*On voit une  
table desdites  
puissances trian-  
gulaires jusqu'à  
la douzième  
puissance de 25.  
in lib. Harmoni-  
con, du P.  
Mersenne, a  
page 136.*

la somme des cinq premiers tétraédres, ou troisièmes puissances, & le tétraédre de 5 est la somme des cinq premiers triangles, comme le cinquième triangle, ou le triangle de 5 est la somme des cinq premiers nombres.

En chaque sorte on prend pour racine la variété des choses, & pour exposant leur multitude : ainsi pour avoir les douze cartes lorsqu'elles peuvent être semblables avec l'ordre, on prend la douzième puissance quarrée de 36, parce qu'il y a de trente-six sortes de cartes ; mais si on prend les mêmes douze cartes sans y joindre l'ordre, il faudra prendre la douzième puissance triangulaire de 36.

*Corollaire troisieme.*

On pourra tirer de là une règle bien facile pour avoir les puissances triangulaires. On demande, par exemple, la sixième puissance triangulaire de 5, la racine est 5, & l'exposant est 6, on prendra six nombres de suite dont la racine 5 fera le moindre, sçavoir 5, 6, 7, 8, 9, 10 ; il les faut multiplier l'un par l'autre, & diviser le produit par l'ordre de la multitude des nombres, qui est représentée par l'exposant 6, & cet ordre est 720, ou bien, pour éviter la division, on ôtera de ces six nombres, les six nombres premiers, 1, 2, 3, 4, 5, 6, comme on a vu ci-devant, & il restera 7, 3, & 10, dont

le produit 210 est la puissance requise, sçavoir la sixième puissance triangulaire de 5.

|    |    |    |    |    |     |
|----|----|----|----|----|-----|
|    |    |    |    |    | 3.  |
| 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6.  |

*Déterminer en combien de façons trois dez peuvent faire leurs points.*

**P**our dire en général combien ils peuvent faire de divers points, il faut cuber 6, & l'on a 216, mais pour sçavoir en particulier comment chaque point se peut faire, nous disons ainsi. Depuis 3 jusqu'à 18 nous avons seize nombres, les huit premiers se rapportent aux huit der-

niers, c'est-à-dire que 3 & 18 sont égaux à 4 & 17; 5 & 16 valent 6 & 15; 7 & 14 valent 8 & 13, &c. Or pour avoir en combien de manieres chaque nombre peut venir: pour les six premiers, ou pour les six derniers, il faut prendre les six premiers triangles, ainsi l'on pourra amener 3 ou 18 en une sorte, car le premier triangle est 1 : 4 ou 17 en trois sortes, car 3 est le second triangle: 5 ou 16 en six façons, car le troisième triangle est 6 : 6 ou 15 en dix sortes, car 10 est le quatrième triangle: 7 ou 14 en quinze sortes, parce que 15 est le cinquième triangle: 8 ou 13 en vingt & une sortes, d'autant que 21 est le sixième triangle; & voilà pour les six premiers, & pour les six derniers. Pour les quatre restans, sçavoir 9, 12, 10, 11. Pour 9 & 12, il faut prendre le quarré de 5, c'est-à-dire 25, & pour 10 & 11, il faut prendre le cube de 3, qui est 27, & ces deux nombres 25 & 27 déterminent les diverses manieres dont se trouveront ces quatre derniers. Or toutes ces façons différentes, sçavoir, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, étant jointes ensemble, font 108, & les doublant nous auront 216, qui est le cube de 6, que nous avons pris au commencement.

*Question sur la regle d'intérêt.*

UN homme met un ducat à la Banque à multiplier pour 32 ans, à la charge d'en avoir les intérêts, & intérêt d'intérêt à raison de 5 pour 100. On demande à combien se montera le principal & les intérêts au bout de ce temps.

L'intérêt est  $\frac{1}{20}$  par an; donc au bout de l'an le principal avec l'intérêt se montera à  $\frac{21}{20}$  de ducat.

Pour les années suivantes il faut prendre les puissances du numérateur & du dénominateur de cette fraction, & en faire une fraction, & le nombre des années sera l'exposant de ces puissances: il faudra donc prendre la trente-deuxième puissance de 21 & de 20 pour le principal & les intérêts de 32 ans. J'ai pris 32 pour la commodité de la





Mais si on n'avoit pas autant de sortes d'armes & de livrées que de soldats ; par exemple , si on n'avoit que de quatre sortes d'armes , & que de l'une des sortes on en eût trois , comme si on avoit trois épées , un mousquet , une pique & une hallebarde , & qu'on n'eût que trois sortes de livrées , sçavoir deux de chaque sorte : il faudra prendre pour les armes la combinaison de six choses entre lesquelles il y en auroit trois semblables : or on a fait voir que pour avoir cette combinaison , il faut diviser la combinaison de six , sçavoir 720 , par six qui est la combinaison de trois choses semblables , & on aura 120 pour les diverses façons dont on peut armer ces soldats. On multipliera donc 720 par 120 , & on aura 86400 manieres de ranger & d'armer ces soldats.

Pour leurs livrées , parce qu'il y en a deux de chaque sorte & de trois sortes en tout , il faudra diviser 720 par la combinaison de deux choses répétées trois fois , qui est huit , parce que deux multipliant deux fait quatre , qui étant encore multiplié par deux donne huit : divisant donc 720 par huit , on aura 90 , par lequel il faudra multiplier le produit qu'on vient d'avoir , qui est 86400 , & on aura en tout 7776000 manieres d'arranger ces soldats avec leurs armes & leurs livrées différentes.

Que si au contraire on avoit plus de sortes d'armes & de livrées qu'il n'y a de soldats ; par exemple , si on avoit sept sortes d'armes & huit sortes de livrées qu'on voulût donner à six soldats en toutes les manieres possibles , on se serviroit de la combinaison de variété : voici comme se fait cette combinaison.

Pour les armes , parce qu'il y en a de sept sortes , mais qu'on n'en prend que six à chaque fois , on multipliera 7 par les nombres moindres jusqu'à ce qu'on ait 6 nombres , sçavoir jusqu'à 1 : on multipliera donc 7 par 6 , le produit 12 par 5 , puis le produit par 4 , 3 , & 2 , on aura 5040 , qui est le même nombre que celui de la combinaison d'or-

dre de sept choses , parce que 1 ne multiplie point.

Pour les livrées , parce qu'il y en a de huit sortes , & qu'on ne se sert que de six , il faudra prendre le changement de six choses prises dans huit , qui se trouve en multipliant l'un par l'autre six nombres commençant par 8 en diminuant , sçavoir 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , dont le produit est 20160 y compris l'ordre.

Il faudra donc multiplier 720 , qui montre la quantité de façons dont on peut ranger six soldats , par 5040 , qui est la variété de leurs armes , & le produit 3628800 ( qui contient l'ordre des soldats & des diverses manieres dont on les peut armer ) par 20160 , qui est la variété des livrées , & on aura 73156608000 , qui montre toutes les façons d'arranger ces soldats , & de leur donner diverses armes & livrées.

La combinaison de variété se peut aussi multiplier par une autre combinaison de variété.

On a six Places à pourvoir de Commandans , mais on n'en veut placer d'abord que trois : on demande en combien de manieres on peut placer dans trois de ces Places trois de ces Commandans pris dans six qui sont arrêtez. On prendra l'ordre de trois choses prises dans six , multipliant six par cinq , & le produit par quatre ; puis divisant le produit 120 par six , qui est la combinaison d'ordre de trois choses ; on aura 20 pour le changement de trois choses prises dans six ; ou par abrégé on multipliera seulement cinq par quatre. La combinaison de trois Places prises dans six est pareillement 20 ; on multipliera donc 20 par 20 , & on aura 400 façons de placer trois de ces Commandans chacun dans l'une des six Places.

Or il n'importe pas qu'il y ait autant de Places que de Commandans : il y en peut avoir plus ou moins , & la règle sera toujours la même.

Si par exemple , il n'y avoit que cinq Places , il faudroit prendre la variété de trois choses prises dans cinq , qui est

60, l'ordre compris, qui étant divisé par six qui est l'ordre de trois choses, on a dix, lequel multiplié par 20, qui est la combinaison de trois Commandans pris dans six, on auroit 200 façons de les placer. De même s'il y avoit huit Places on prendroit la combinaison de trois pris dans huit, qui est 336 compris l'ordre, qui étant divisé par six, qui est l'ordre de trois choses, donne 56, qui multiplié par 20 donneroit 1120 façons de placer ces trois Commandans.

Il y a quelqu'autre chose à considérer dans la combinaison pour l'assemblage des lettres qui forment les dictions : il y en a quelques-unes qui ne se peuvent prononcer quand elles sont ensemble, c'est pourquoi il est nécessaire de les séparer.

On veut sçavoir, par exemple, combien on peut faire de dictions des huit lettres *a, b, c, d, e, i, o, f*, à telle condition que les trois *b, c, d*, ne se trouvent jamais ensemble. Il faudra considérer ces trois lettres comme une seule, & ainsi il n'y aura que six choses, dont la combinaison est 720 : mais parce que ces trois lettres se peuvent trouver de suite en six façons, il faut multiplier 720 par six ; le produit est 4320, qu'il faut ôter de la combinaison de huit choses qui est 40320, restera 36000 dictions ou anagrammes qu'on pourra faire avec ces huit lettres sans que *b, c, d*, se trouvent ensemble.

On pourroit encore demander que deux de ces consones ne se trouvassent jamais au commencement ni à la fin des dictions. Pour le trouver il faut voir combien il se fait de changemens pendant que deux de ces lettres sont au commencement ou à la fin ; & parce qu'il reste six lettres, on aura 720 changemens : mais entre ces 720 il y en a 120 auxquels la troisième consonne se trouve contre les deux autres, & cela est compris dans les 4320 qu'il a fallu ôter de 40320 ; il faut donc ôter 120 de 720, reste 600 qu'il faudra multiplier par 12, parce qu'on peut prendre

les deux lettres dans les trois en trois façons ; & à cause de l'ordre il faudra multiplier trois par deux ; & parce qu'il ne faut pas aussi que les deux lettres se trouvent à la fin , on aura douze variétez , qui multipliées par 600 donnent 7200 qu'il faut ôter de 36000 , restera 28800 anagrammes.

Pour sçavoir en quel rang est une diction dans le grand nombre de la combinaison générale à commencer à celles d'une lettre , puis à celles de deux , de trois , & ainsi du reste , jusqu'au nombre des lettres dont notre diction sera composée , comme l'on fait aux chiffres où l'on commence à compter par les nombres qui n'ont qu'un chiffre , puis on vient à ceux qui en ont deux , &c. il faut voir la quatrième & la première lettre à main gauche dans l'alphabet , & de combien de lettres est composée la diction : par exemple , je veux sçavoir le quatrième est ce mot *Aser* , qui est de quatre lettres ; dont il y en a 234256 , & les autres dictiones moindres y étant ajoutées , sçavoir celles de 3 , 2 , & une lettre , il y en aura 245410. Pour sçavoir donc le quatrième il est dans ce dernier nombre à commencer à compter par *a* , puis *b* , &c. en après *aa* , *ab* , &c. je prens la première lettre *A* , qui est la première de toutes , & ne vaut qu'un mille , qui vaut 10648 ( nombre des mots de trois lettres ) puis je viens à *s* , qui est la dix-septième centaine , & partant je multiplie 484 par 17 , le produit est 8228 ; puis à *e* , qui est la cinquième dixaine dont chacune vaut 22 , qui multiplié par cinq , font 110 ; la dernière lettre est *r* , qui est la seizième , puis j'ajoute ces quatre sommes ensemble , sçavoir 10648 , 8228 , 110 & 16 , le total est 19002 ; de sorte que *Aser* est le 19002 mot dans le nombre de 245410 , ou si l'on veut dans le dernier nombre de la combinaison générale de 22 , qui est l'addition de tous les autres.

Le lieu de ce mot *Baal* se trouve ainsi : il est composé de quatre lettres , & partant la première à gauche est mille ,

mille, qui exprime son nombre 10648 fois, & cette lettre *B* est la deuxième lettre, partant il faut multiplier ce nombre par deux, ce sera 21296; la seconde lettre est *a*, qui est centaine, & qui vaut 484; la troisième est encore *a*, qui est dixaine, & qui vaut 22; la dernière est *l*, qui est la dixième lettre, partant il faut assembler 21296, 484, 22 & 10, & on trouvera que *Baal* sera le 21812 mot.

Le lieu de *Levi* se trouve ainsi; *L* est la dixième lettre, & partant je multiplie le mille qui est 10648 par 10, le produit est 106480; *e* est la cinquième lettre: je multiplie donc 484 par cinq, le produit est 2420; *v* est la dix-neuvième lettre que je multiplie par 22, le produit est 418; *i* qui est la dernière est la neuvième; j'assemble donc 106480, 2420, 418 & 9, & je trouve que *Levi* est la 109327 diction.

Toutes les autres dictions se trouvent de même, soit qu'elles aient plus ou moins de lettres; & il faut remarquer que la première chose qu'il faut faire est de voir de combien de lettres la diction est composée, puis voir la quantième lettre est la première à main gauche, & par le nombre du rang qu'elle tient dans l'alphabet multiplier le nombre de la combinaison générale précédent celui des lettres dont est composée la diction: par exemple, si elle avoit huit lettres, & que la première lettre fut *G*, qui tient le septième lieu dans l'alphabet, il faudroit multiplier le nombre de la combinaison de sept choses, qui est celui qui précède huit, par sept, & puis continuer aux autres lettres. Si la diction avoit six lettres, & que la première fut un *U*, qui tient le dix-neuvième lieu, il faudroit multiplier la combinaison de cinq choses par dix-neuf, & ainsi des autres: ou bien commencer par la première lettre à main droite, qui ne vaut que son nombre, & la seconde le vaut 22 fois.

Par ce moyen on pourroit écrire des lettres bien obscures.

res, & qu'il seroit bien difficile de déchiffrer, si l'on n'en sçavoit la méthode; sçavoir si on mettoit au lieu des mots le rang qu'ils tiennent dans le grand nombre: mais ce n'est pas assez de sçavoir écrire, si l'on ne sçait lire son écriture, & ce n'est pas peu de chose que de sçavoir lire celle-ci; car ceux mêmes qui l'auroient écrite ne la pourroient lire, s'ils n'en sçavoient la méthode, quoiqu'ils sçussent celle de l'écrire.

Ayant donc un nombre donné, il faut prendre à la Table des combinaisons le plus grand nombre qu'on pourra, qui néanmoins puisse servir de diviseur au nombre donné. La division faite il faut prendre ce qui est resté, & le diviser par la combinaison qui précède, & le quotient montre la quantième lettre on doit prendre dans l'alphabet, de sorte qu'il ne faut pas que le quotient passe jamais 22, & il faut continuer à diviser jusques à ce que l'on divise par 22, & cette dernière division faite, il faut voir ce qui reste & mettre la lettre qui convient à ce nombre pour la dernière. Il faut remarquer que si l'on ne pouvoit arriver à la division par 22, ou qu'icelle étant faite il ne restât rien, ou que l'on ne put pas diviser par tous les nombres des combinaisons moindres que le premier qu'on a pris, & que le reste de la première division fut trop petit pour ce faire, le nombre que l'on auroit pris pour diviseur seroit trop grand, & il faudroit prendre celui de devant, qui est moindre; & qui n'est que  $\frac{1}{22}$  du premier, comme en ce nombre 234299, si on prenoit 234256 pour diviseur, le quotient seroit 1, & il ne resteroit plus que 43, que l'on ne pourroit diviser par les autres nombres; ainsi il faudroit prendre celui de devant, qui est 10648, & cela arrive toujours aux dictions qui commencent par un  $\chi$ , & à celles qui commencent par un  $y$  suivi d'un  $\chi$ . 2°. Il faut remarquer que la diction aura toujours une lettre plus que le nombre des combinaisons qui servira de diviseur, comme en cet exemple; où 10648 sert de diviseur, qui est le

nombre de la combinaison de trois choses, il y aura quatre lettres; car ayant divisé 234299 par 10648, le quotient sera 21 qui vaut  $\gamma$ , & il restera 10691 qu'il faudra diviser par 484, & le quotient sera 22, qui est un  $\alpha$ , & il restera 43, qu'il faudra diviser par 22, le quotient est 1, qui est  $\alpha$ , & le reste est 21 qui est  $\gamma$ ; de sorte que ledit nombre vaudra autant que  $\gamma\alpha\gamma$ . 3<sup>o</sup>. Il est à remarquer qu'il faut diviser par tous les nombres moindres jusques à 22, & qu'il n'en faut passer aucun, & partant si le reste étoit moindre que le nombre par lequel on devoit diviser après, le quotient seroit trop grand, partant il le faudroit diminuer de l'unité. Si le quotient étoit 1, & que le reste fut trop petit, il faudroit changer de diviseur, comme en l'exemple ci-dessous: par exemple, en ce nombre 21600, je prens 10648 pour diviseur, le quotient est 2, & il reste 304 qui est moindre que 484, partant je prens 1 pour quotient, reste 10952, que je divise par 484, le quotient est 22, & il reste 304 que je divise par 22, le quotient est 13, & il reste 18; de sorte que ce nombre sera *Azot*.

Si on vouloit voir quel rang tient une diction entre celles qui ont même nombre de lettres, comme une de trois lettres entre celles de trois lettres, dont il y en a 10648, il faudroit multiplier la premiere lettre à main gauche, sçavoir le rang qu'elle tient dans l'alphabet moins un par 484, qui sont les centaines; puis la seconde lettre aussi moins un par 22, & puis mettre le lieu de la dernière sans en rien ôter, comme à ce mot *Aza* la premiere lettre vaut 1, & partant il la faut passer, parce qu'ôtant un d'un, il ne reste rien; je viens à *z* qui est la dix-septième lettre dont j'ôte 1, reste 16 que je multiplie par 22, & au produit j'ajoute 1 à cause de la dernière lettre qui est *a*, ce sera 353. Le rang de ce mot *Aaz* se trouve ainsi: *A* est la dix-neuvième lettre, partant je multiplie 18 par 484, le produit est 8712; la seconde lettre est *a* qui vaut 1, dont



ayant ôté 1 il ne reste rien ; je viens à 2 qui est la dernière lettre , & qui vaut 22 que j'ajoute à 8712 , & je trouve que le rang de ce mot est le 8734 dans le nombre de 10648 , & ainsi des autres qui ont plus de lettres ; & remarquez que l'*a* au commencement ou au milieu d'une diction n'est conté pour rien , & qu'étant à la fin il vaut 1.

Ayant un nombre donné dire quelle diction tient ce rang dans le nombre total , pourvu qu'on dise de combien elle est de lettres.

Il faut ajouter au nombre donné le nombre des combinaisons des dictions composées de moins de lettres : par exemple , on me donne 155 contenant le rang d'une diction de trois lettres , j'y ajoute les combinaisons des dictions d'une & de deux lettres , qui sont 484 & 22 , la somme se montera à 661 , & pour ce nombre j'opère comme si je voulois voir quelle diction tient ce rang dans le nombre total de toutes les dictions je le divise par 484 le quotient est un , reste 177 que je divise par 22 , le quotient est 8 , reste 1 , partant je prens la première lettre , puis la huitième , puis la première , pour avoir *aha*.

Autrement il faut diviser le nombre par le même diviseur que ci-dessus , & au quotient y ajouter 1 , & faire ainsi à tous les quotiens : mais au reste qui se trouve après la division par 22 , il ne faut rien ajouter : par exemple , on me donne 587 , lequel je divise par 484 , le quotient est 1 , auquel j'ajoute 1 , font 2 , reste 103 , que je divise par 22 ; le quotient est 4 , auquel j'ajoute 1 , font 5 , & reste 15 , partant je prens la deuxième lettre , la cinquième & la quinzième , & je fais la diction *Beq*.

Si l'on me donnoit le même nombre , & que l'on me dit que ce fut un mot de deux lettres , je dirois qu'il seroit impossible , car il n'y a que 484 dictions de deux lettres : mais si on lui donnoit quatre lettres , il faudroit diviser de la même façon , & mettre un *a* devant , s'il avoit cinq lettres il faudroit mettre deux *a* , & ainsi des autres , comme

en ce nombre 155 qui tient lieu d'une diction de trois lettres ; je le devrois diviser par 484 , mais à cause qu'il ne se peut , je mets un *a* comme si c'étoit un zero , sinon qu'il se peut mettre le premier , & qu'étant le dernier il vaut 1 ; puis je prens l'autre diviseur 22 , par lequel je divise 155 , le quotient est 7 , & il reste 1 , j'ajoute l'unité à 7 , parce que *a* n'a point de valeur s'il n'est à la fin , & que *b* vaut 1 , *c* 2 , *d* 3 , &c. si ce n'est quand ils sont à la fin , de sorte que ce mot sera *Aha* : le premier *a* est à cause que le premier diviseur s'est trouvé plus grand que le nombre à diviser , *b* à cause de 7 lequel vaut 8 par l'addition de l'unité , & *h* est la huitième lettre , & le dernier *a* à cause de 1 qui reste.

Quand une division manque quelque part au commencement , au milieu , ou à la fin , il faut toujours mettre un *a* , comme en ce nombre 500 , qui tient lieu d'une diction de trois lettres. Je le divise par 484 , il vient 1 , qui est un *b* , & il reste 16 , & partant je ne puis diviser par 22 , de sorte qu'après le *b* il faut mettre un *a* , & puis la seizième lettre qui est *r* , & le mot sera *Bar*. Il faut noter ici que l'*a* ne vaut aucun nombre , sinon à la fin qu'il vaut 1 , & toutes les autres aussi valent leur nombre quand elles sont les dernières , mais étant au commencement ou au milieu elles valent 1 moins que le rang où elles sont dans l'alphabet , comme qui commenceroit à conter par *b, c, d, 1, 2, 3, &c.* & ainsi *z* ne vaut que 21 , mais à la fin il vaut 22.

Il faut encore remarquer que comme en faisant les opérations d'une division quand le diviseur est plus grand que le nombre qui lui est au-dessus , on met un zero ou deux , & on avance le diviseur d'une ou de deux places : aussi dans l'opération de toutes ces divisions-ci , si le diviseur se trouve plus grand que le dividende , il faut mettre un *a* , & mettre le diviseur d'après , lequel , s'il est trop grand , il faut encore mettre un *a* , & changer de divi-

seur , jusques à ce qu'il se trouve plus petit comme en ce nombre 5157999 , qui tient rang d'une diction de six lettres , il le faut diviser par 5153632 , qui tient lieu de centaine de mille , le quotient est 1 qui est *B* , & il reste 4367 , qu'on ne peut diviser par le diviseur suivant 234256 , & partant je mets un *a* ; ni par celui d'après aussi qui est 10648 , & je mets encore un *a* , puis je le divise par 484 , le quotient est 9 qui est *I* , & il reste 11 que je ne puis diviser par 22 , & partant je mets un *a* , & le reste est 11 , qui étant le dernier est *m* , ce mot donc sera *Baalam* ; pour faire *Balaam* il faudroit 5249475.

On pourroit écrire par ce moyen des lettres bien obscures , mais il faudroit mettre devant & après chaque nombre un point , & puis un chiffre , qui marqueroit de combien de lettres la diction seroit composée , & on pourroit se servir des deux sortes tous ensemble. L'on peut écrire des airs par le même moyen , de la même façon que des dictions , en nommant les notes *a* , *b* , *c* , au lieu de *ut* , *re* , *mi* , mais il faudroit écrire les temps à part comme les notes.

#### *Hazars.*

C'Est la coutume à Genes d'élire , ou plutôt de tirer au sort tous les ans d'entre les cent Sénateurs cinq personnes qui doivent avoir les principales Charges de la République.

Cela a donné lieu à des paris qui se font tous les ans touchant ceux à qui le sort arrivera. Il se trouve des Banquiers qui promettent jusques à vingt mille pistoles pour une qu'on leur donnera si le sort tombe sur 5 qu'on aura nommé ; cinq ou six mille , s'il n'y a que 4 des 5 qu'on aura nommé ; & 5 ou 6 cens , s'il y en a 3. Pour l'ordinaire ils ne donnent rien pour un ni pour deux. On demande quels sont les hazars pour le Banquier & pour le Pariant , & quel profit le Banquier peut faire sur ce commerce.

Il faut premierement arrêter ce que doit donner le Banquier ; si le sort tombe sur ceux qu'on aura nommez , ou sur quelques-uns d'eux.

Supposons que le Banquier donne 20000 pistoles pour une , si le sort tombe sur les 5 qu'on aura nommez ; 5000 s'il n'y en a que 4 ; 300 s'il y en a 3 , & 4 s'il n'y en a que 2.

On verra premierement en combien de manieres les 5 qu'on doit tirer au sort peuvent venir.

Il faut multiplier 100 par 99 , le produit par 98 , par 97 & par 96 ; mais parce que le produit de ces 5 nombres contient aussi l'ordre dans lequel ces cinq personnes sont tirées , il le faut diviser par 120 , qui est la combinaison de cinq choses ; ou bien multiplier seulement 80 par 97 , 98 & 99 , ce qui est la même chose que de multiplier les cinq nombres l'un par l'autre , & diviser le produit par 120. On aura 75287520 , qui sont toutes les façons dont cinq Billets peuvent être tirez ou pris dans 100.

Il faut maintenant voir quels sont les hazars du Pariant.

Les cinq qu'il a nommez ne peuvent arriver qu'en une seule maniere : il n'y aura donc qu'un hazard pour lui , & 75287519 pour le Banquier ; & parce que le Banquier donne 2000 pour 1 , il faut multiplier 1 par 20000 ; donc pour 20000 de hazard qu'a le Pariant , le Banquier en a 75287519 , qui étant divisez par 20000 donnent  $3764\frac{3}{4}$  , la proportion des hazars est donc comme 1 à  $3764\frac{3}{4}$ .

Pour avoir les hazars de 4 , il faut prendre cinq fois 95 , qui sont 475 , qu'il faut ôter de tous les hazars , ou plutôt de ceux qu'a le Banquier sur les hazars de 5. On ôtera donc 475 de 75287519 , il restera 75287044 pour les hazars du Banquier : mais parce qu'il donne 5000 pour un , il faut diviser 75287044 par 5000 , & on aura  $15057\frac{3}{5}$  peu plus pour les hazars du Banquier , & 475 pour ceux du Pariant ; & divisant l'un par l'autre , il viendra  $31\frac{7}{10}$  peu moins , pour les hazars du Banquier , & un pour ceux du Pariant.

Pour avoir les hazars de trois personnes dans les cinq qu'on a nommées, on multipliera par 10 le triangle de 94, qui est 4465 ; on aura donc 44650 pour les hazars du Pariant, qui étant ôtez des hazars que le Banquier a eu sur quatre, sçavoir de 75287044, il restera 75242394 pour les hazars du Banquier, qu'il faut diviser par 300, parce qu'il donne 300 pour 1, & on aura 250808 peu moins pour les hazars du Banquier, qui étant divisez par 44650, on aura la proportion des hazars du Banquier & du Pariant, comme  $5\frac{1}{2}$  peu plus à 1.

Reste à voir les hazars de 2. Pour avoir ceux du Pariant, on multipliera le tétraédre de 93, sçavoir 138415 par 10, & on aura 1384150, qu'il faut ôter des hazars que le Banquier a eu sur 3, sçavoir de 75242394, il restera 73858244, qu'il faut diviser par 4, à cause que le Banquier donne 4 pour 1, & on aura 18464561 pour les hazars du Banquier ; & les divisant par les hazars du Pariant, qui sont 1384150, on trouvera que les hazars du Banquier & du Pariant sont entr'eux comme  $13\frac{1}{2}$  peu moins à 1.

On peut aussi considérer les hazars de 1, c'est-à-dire, s'il venoit quelqu'un des cinq qu'on a nommé. Il faudra multiplier par 5 le triangle-triangle ou quatrième puissance triangulaire de 92, qui est 3183545, le produit est 15917725, qu'il faut ôter des hazars du Banquier sur 2, sçavoir de 73858244, il restera 57940519, qui sont les hazars du Banquier : mais parce qu'il ne donne rien, quand il ne vient qu'un des cinq qu'on a nommé, on divisera 57940519 par 15917725, & le Banquier aura encore  $3\frac{1}{2}$  de hazard sur 1 qu'aura le Pariant ; mais ce hazard n'est qu'au profit du Banquier, & le Pariant n'y a rien.

Ayant tous ces hazars, il les faut assembler. Et premièrement si le sort tombe sur les cinq qui ont été nommez, le Pariant a 20000. S'il en vient quatre, il y a 475 hazars pour le Pariant, qui étant multipliez par 5000 que le Ban-

quier

# ABREGÉ DES COMBINAISSONS. 111

quier doit donner, s'il arrive quelqu'un des 475 hazars, ce sera 2375000 hazars pour le Pariant.

Si le sort tombe sur trois de ceux qui ont été nommez, les hazars de trois sont 44650, qui multipliez par 300, que le Banquier doit donner pour chacun de ces hazars, ce sera 13395000 hazars pour le Pariant, s'il en vient trois des cinq qu'il a nommé.

Si le sort ne tombe que sur deux, on a trouvé que les hazars de deux sont 1384150, qui multipliez par quatre donnent 5536600 hazars pour le Pariant. Tous ces hazars ensemble montent à 21326600; & ce sont les hazars du Pariant.

Pour avoir les hazars du Banquier, il faut assembler tous les hazars du Pariant, qui sont 1, 475, 44650 & 1384150, la somme est 1429276, qui ôtre de tous les hazars qui sont en tout 75287520, il restera 73858244 pour les hazars du Banquier; les hazars du Pariant seront donc à ceux du Banquier comme 21326600 à 73858244, ou dans les moindres termes, comme 183850 à 636709, qui est comme 1 à un peu moins de  $3\frac{1}{2}$ , ou justement comme 1 à  $3\frac{81159}{183850}$ .

Ce seroient là les hazars du Banquier & du Pariant, si le Banquier ne recevoit rien de ceux à qui le sort est favorable; mais parce qu'outre l'avantage qu'il a dans les hazars, il a encore une pistole de chacun de ceux à qui les hazars peuvent arriver, il a pour lui tous les hazars de

Rec. de l'Ac. Tom. V.

Q

## Hazars

|          |                               |
|----------|-------------------------------|
| 20000    | de 5                          |
| 2375000  | de 4                          |
| 13395000 | de 3                          |
| 5536600  | de 2                          |
| <hr/>    |                               |
| 21326600 | Somme des hazars du Pariant.  |
| <hr/>    |                               |
| Hazars   |                               |
| 1384150  | de 2                          |
| 44650    | de 3                          |
| 475      | de 4                          |
| 1        | de 5                          |
| <hr/>    |                               |
| 1429277  | Somme des hazars du Banquier. |

## 122 ABREGE' DES COMBINAISONS.

cinq personnes choisies dans 100, sçavoir 75287520 : la proportion des hazars du Pariant est donc à ceux du Banquier, comme 2132660 à 75287520, ou comme 533165 à 1882188, c'est-à-dire comme 1 à un peu plus de  $3\frac{1}{2}$ .

Mais parce que d'ordinaire on ne donne rien pour 2, il faut ôter les hazars de 2, qui se montent à 5536600, des hazars du Pariant, le reste sera 15790000, qui sont aux hazars du Banquier, comme 394750 à 1882188, ou comme 1 à un peu plus de  $4\frac{1}{4}$ .

Voici le fondement & les raisons de cette opération.

Premièrement pour sçavoir en combien de manieres on peut choisir cinq choses dans 100, on multiplie l'un par l'autre les cinq nombres 100, 99, 98, 97, & 96, & on divise le dernier produit par l'ordre de cinq choses.

Si on ne prenoit qu'une chose dans 100, il est certain qu'on ne le pourroit faire qu'en 100 façons. Que si on en prend deux, puisque la premiere se prend en 100 façons, après chacune des 100 on peut mettre laquelle on voudra des 99 restantes; mais on voit ici que l'ordre y est compris, parce que chacune des 100 sera dans tous les choix la premiere & la dernière; il faudra donc diviser par deux, sçavoir par l'ordre de deux choses, le produit de 99 par 100.

Si on choisit trois choses dans 100, parce que deux choses se prennent en 9900 manieres, qui est le produit de 100 par 99, & qu'il en reste 98, on pourra choisir chacune de ces 98 qui restent, & l'ajouter à chacune de 9900 façons dont on a choisi deux choses: le produit de 9900 par 98 contiendra les diverses manieres de choisir trois choses dans 100, l'ordre compris.

Par la même raison pour choisir quatre choses, il faudra multiplier ce dernier produit, qui est 970200, par 97 qui restent; & pour cinq choses multiplier encore ce dernier produit, qui est 94109400, par 96, & diviser le

produit 9034502400 par 120, qui est l'ordre de cinq choses, parce que par cette construction chacune des 100 choses tient alternativement chacun des cinq rangs qui sont dans cinq choses, sçavoir le premier, le deuxième, troisième, quatrième & dernier.

Pour les hazars du Pariant on multiplie 95 par 5, pour sçavoir en combien de façons il peut venir quatre des cinq qu'il a nommez; car puisqu'il en manque un, chacun des cinq peut manquer, & en sa place il peut venir l'un des 95, dont il n'a nommé aucun: il faut donc multiplier 95 par 5. Il est vrai que les quatre étant ôtez de 100, il resteroit 96: on ne multiplie pas pourtant par 96, parce que le cinquième des nommez se trouvant au nombre des hazars du Pariant, il seroit compté deux fois au Pariant.

S'il vient trois des cinq qui ont été nommez, les hazars se trouvent en multipliant par 10 le triangle de 94.

On multiplie par 10, parce que trois choses se peuvent choisir dans cinq en dix manières, ainsi qu'il a été expliqué ci-devant, quand on a fait voir en combien de façons on peut choisir cinq choses dans 100, car on multipliera 5, 4, 3, l'un par l'autre, & on divisera le produit 60 par l'ordre de 3, qui est 6.

On multiplie par le triangle de 94, parce que dans les cinq qu'on tire au hazard, n'y en ayant que trois des cinq que le Pariant a nommez, les deux autres doivent être des 95 autres. Or dans tous les choix ou hazars, le premier de ces 95 se trouvera avec chacun des 94 autres. Après le second de ces mêmes 95 se trouvera avec chacun des 93 autres. Le troisième avec chacun des 92; & ainsi de suite jusqu'au 94 qui se trouvera avec le dernier des 95: or ces nombres assemblez font le triangle de 94, parce qu'il faudroit ajouter 94 avec 93, 92, 91, &c. jusqu'à 1.

Par le même raisonnement on verra pourquoi pour avoir les hazars de deux, on multiplie par 10 le tétraèdre de 93.



*Question.*

On demande à combien de personnes se montent les ancêtres en trente générations, supposant que les mariages ne se soient point faits entre les descendants des premières & plus anciennes générations. Il faut prendre la trentième puissance de deux, qui est 1073741824, &c c'est le nombre des ancêtres.

*Question.*

Au jeu des Eschecs, les huit pions peuvent avancer une ou deux cases au premier coup. On demande en combien de façons on peut jouter ces huit pions, en ne jouant chacun d'eux qu'une seule fois.

S'ils ne pouvoient être joués que d'une seule manière, on auroit 40320 façons de les jouer, sçavoir selon la combinaison de l'ordre de huit choses : mais parce que chacun se peut jouer en deux manières, il faudra multiplier 40320 par la huitième puissance de deux, sçavoir par 256, & on aura 10321920.

|  |    |          |   |
|--|----|----------|---|
| En cette sorte de combinaison où chaque chose se place en deux manières, il faut multiplier tous les nombres pairs l'un par l'autre, au lieu qu'en la combinaison simple on ne multiplie que tous ces nombres. Ainsi une chose se prend en deux façons, 2 en 8, 3 en 48, 4 en 384, &c. | 2  | 2        | 1 |
|  | 4  | 8        | 2 |
|  | 6  | 48       | 3 |
|  | 8  | 384      | 4 |
|  | 10 | 3840     | 5 |
|  | 12 | 46080    | 6 |
|  | 14 | 645120   | 7 |
|  | 16 | 10321920 | 8 |

Si chaque chose se prenoit en trois manières, comme si les pions pouvoient avancer une, deux ou trois cases, il faudroit multiplier l'un par l'autre les nombres

# ABREGE' DES COMBINAISONS. 125

|                             |    |           |   |
|-----------------------------|----|-----------|---|
| multiples de 3 , ſçavoir 3, | 3  | 3         | 1 |
| 6, 9, 12, &c. & on auroit   | 6  | 18        | 2 |
| 18 pour le changement       | 9  | 162       | 3 |
| de deux chofes, 162 pour    | 12 | 1944      | 4 |
| celui de trois, &c. & ainſi | 15 | 29160     | 5 |
| les huit pions ſe joue-     | 18 | 524880    | 6 |
| roient la premiere fois en  | 21 | 11022480  | 7 |
| 264539520 manieres.         | 24 | 264539520 | 8 |



T R A I T É  
 D E S  
 T R I A N G L E S  
 R E C T A N G L E S  
 E N N O M B R E S.  
 P R E M I E R E P A R T I E.

---

*D E F I N I T I O N S.*

I.

**L**ORSQU'UN nombre quarré est égal à la somme de  
 deux autres nombres quarréz, les trois nombres qui  
 sont les racines de ces trois quarréz, seront appellez un  
 Triangle Rectangle en nombres, ou les trois côtez d'un  
 Triangle Rectangle en nombres: ainsi on dira que 3, 4, 5,  
 est un Triangle Rectangle en nombres; parce que 25,  
 quarré de 5, est égal à la somme de 16, & 9, qui sont les  
 quarréz des deux autres nombres 3 & 4.

I I.

Les deux moindres nombres d'un Triangle Rectangle  
 en nombres, seront appellez les côtez ou les moindres

## 128 DES TRIANGLES RECTANGLES

côtez de ce Triangle, la moitié de leur produit sera appelée l'aire de ce Triangle, & le troisième nombre sera appelé son hypoténuse, ou son plus grand côté.

### I I I.

Triangle Rectangle primitif en nombres, est celui entre les trois côtez duquel il n'y a point d'autre commune mesure que l'unité.

### I V.

Triangle Rectangle composé en nombres, est celui dont les trois côtez sont mesurez par un même nombre.

### V.

Un Triangle Rectangle en nombres sera dit double d'un autre, lorsque ses trois côtez sont doubles des trois côtez de l'autre, chacun du sien, & de même à l'égard des autres multiples.

### V I.

On appelle ici nombre pairement pair celui qui est mesuré par 4, & nombre impairement pair, celui qui est mesuré par 2, & non par 4.

## S U P P O S I T I O N S.

### I.

Si deux nombres quarez étant joints ensemble ne font point un nombre quarré; les racines de ces deux quarez ne seront point les côtez d'un Triangle Rectangle en nombres.

### I I.

Si les trois côtez d'un Triangle Rectangle en nombres sont multipliez par un même nombre, les trois produits seront

seront les trois côtez d'un Triangle Rectangle en nombres; & si les trois côtez d'un Triangle Rectangle en nombres ont une même mesure autre que l'unité, & qu'ils soient divisez par cette commune mesure, les trois quotiens seront les trois côtez d'un Triangle Rectangle en nombres.

I I I.

Tout nombre quarré est mesuré par tous les nombres qui mesurent sa racine: il en est de même des nombres cubes, quarez quarez, & autres puissances: & si un quarré est mesuré par un nombre premier, sa racine sera aussi mesurée par ce nombre premier, ou sera ce même nombre premier.

I V.

Un nombre quarré étant multiplié par un autre nombre quarré, le produit est un nombre quarré: mais s'il est multiplié ou divisé par un nombre non quarré, le produit ni le quotient ne seront point des quarez.

V.

Tout nombre multiplié par un nombre pair, fait un nombre pair; & tout nombre impair ajouté à un nombre pair, ou multiplié par un impair, fait un impair; & la somme de deux impairs est un nombre pair.

V I.

Si deux nombres sont entr'eux comme quarré à quarré, leurs moitez, ou autres pareilles parties, seront aussi entr'elles comme quarré à quarré.

V I I.

Si deux nombres ont entr'eux une commune mesure, la somme & la difference de ces nombres, & aussi leurs doubles, auront la même commune mesure.

*Rec. de l'Ac. Tom. V.*

R

V I I I.

Le quarré de la somme de deux nombres est égal au quarré de leur difference, & au quadruple du produit des mêmes nombres.

I X.

Si un même nombre multiplie deux nombres & leur difference, ce dernier produit sera la difference des deux premiers produits.

X.

Trois nombres étant donnez, le nombre solide produit par ces nombres sera toujours le même, en quelque ordre qu'on les multiplie; le même arrivera s'il y a plus de trois nombres qui se multiplient de suite.

X I.

Deux nombres plans semblables ne peuvent être premiers entr'eux, ni l'un d'eux premier au double de l'autre; d'où il s'ensuit, que le produit de deux nombres premiers entr'eux ne peut être un nombre quarré, s'ils ne sont eux-mêmes des quarrés; ni double quarré, si l'un d'eux n'est un quarré, & l'autre un double quarré.

X I I.

On suppose aussi que ce qu'on fait voir par le calcul de l'algebre, n'a pas besoin d'autre preuve; & on l'employe dans ce traité, lorsque les propositions sont faciles, ou que leurs démonstrations sont trop obscures.

R E M A R Q U E S.

I.

*Ces propositions sont supposées, comme étant démontrées.*

*par les Auteurs, ou parce qu'elles sont faciles d'elles-mêmes.*

I I.

*L'unité est ici employée pour nombre, & même pour nombre quarré ou quarré quarré.*

I I I.

*Lorsqu'on parle ici de Triangles, ou de Triangles Rectangles, on entend parler des Triangles Rectangles en nombres entiers.*

LEMME;

PROPOSITION I.

*Tout nombre au-dessus de l'unité est ternaire, ou ternaire  $+1$  ou  $-1$ .*

DEMONSTRATION.

**L**E premier nombre au-dessus de l'unité est 2, qui est le moindre d'une unité que 3, & par conséquent est ternaire  $-1$ , & entre deux ternaires de suite comme 3 & 6, ou 6 & 9, &c. il n'y a toujours que deux nombres, comme entre 3 & 6, il n'y a que 4 & 5, dont le premier excède le premier ternaire d'une unité, & le second est le moindre d'une unité que le second ternaire, & par conséquent le premier est ternaire  $+1$ , & le second, ternaire  $-1$ . La même chose arrive nécessairement dans tous les autres nombres: donc tout nombre au-dessus de l'unité est ternaire, ou ternaire  $+1$  ou  $-1$ , ce qu'il falloit prouver.





## LEMME,

## PROPOSITION II.

*Tout nombre impair au-dessus de l'unité est quaternaire  $\rightarrow$   
ou  $-1$ .*

## DEMONSTRATION.

**L**E premier impair au-dessus de l'unité est 3, qui est moindre d'une unité que 4, & par conséquent est quaternaire  $-1$ , & entre deux quaternaires de suite, comme 4 & 8, ou 8 & 12, &c. il n'y a toujours que trois nombres, dont celui du milieu est pair, & les autres deux sont impairs, comme entre 4 & 8, il n'y a que 5, 6 & 7, dont 5 & 7 sont impairs; & il est manifeste que 5 est  $4 + 1$ , c'est-à-dire quaternaire  $+1$ , & que 7 est  $8 - 1$ , c'est-à-dire quaternaire  $-1$ , puisque 8 est quaternaire. La même chose arrive nécessairement dans tous les autres nombres à l'infini. Donc tout nombre impair au-dessus de l'unité est quaternaire  $\rightarrow$  ou  $-1$ ; ce qu'il falloit prouver.

## LEMME,

## PROPOSITION III.

*Tout nombre au-dessus du nombre 2 est quinaire, ou quinaire  $\rightarrow$  ou  $-1$ , ou quinaire  $\rightarrow$  ou  $-2$ .*

## DEMONSTRATION.

**L**Es deux premiers nombres entre 2 & 5, sont 3 & 4; & il est évident que 3 est  $5 - 2$ , & que 4 est  $5 - 1$ ; & par conséquent 3 est quinaire  $-2$ , & 4 est quinaire  $-1$ ; & entre deux quinaires de suite, comme 5 & 10, ou 10 & 15, &c. il n'y a toujours que quatre nombres, comme entre 5 & 10, il n'y a que 6, 7, 8, & 9, dont le premier excède 5 d'une unité, le second de deux unités; le troisié-

me est moindre de deux unitez que le second quinaire, & le quatrième seulement d'une unité, & par conséquent le premier de ces quatre nombres est quinaire  $\rightarrow 1$ , le second est quinaire  $\rightarrow 2$ , le troisième quinaire  $\rightarrow 2$ , & le quatrième quinaire  $\rightarrow 1$ . La même chose arrive nécessairement dans tous les autres nombres à l'infini. Donc tout nombre au-dessus du nombre 2 est quinaire, ou quinaire  $\rightarrow$  ou  $\rightarrow 1$ , ou quinaire  $\rightarrow$  ou  $\rightarrow 2$ ; ce qu'il falloit prouver.

LEMME;

PROPOSITION IV.

*Le carré de tout nombre parement pair est octonaire, & le carré de tout nombre parement impair, au-dessus de 2, est octonaire  $\rightarrow 4$ .*

DEMONSTRATION.

**L**E premier nombre parement pair est 4, & d'autant que 4 est moyen proportionnel entre 2 & 8, son carré 16 sera égal à 2 fois 8, & par conséquent sera mesuré par 8, c'est-à-dire sera octonaire. Or tout autre nombre parement pair est multiple de 4. Soit donc 4 A, lequel on voudra de ces nombres, son carré sera 16 A<sup>2</sup> qui sera multiple de 16 par A<sup>2</sup>, c'est-à-dire de 8 par 2 A<sup>2</sup>, & par conséquent ce carré sera mesuré par 8, & sera octonaire. Donc le carré de tout nombre parement pair est octonaire. Que si un nombre au-dessus de 2 est parement impair, il sera 4 A  $\rightarrow$  2, & son carré sera 16 A<sup>2</sup>  $\rightarrow$  8 A  $\rightarrow$  4, c'est-à-dire octonaire  $\rightarrow$  4, puisque la somme de 16 A<sup>2</sup> & de 8 A est octonaire, donc le carré de tout nombre parement pair, &c. Ce qu'il falloit prouver.

Def. 6.



L E M M E,

## P R O P O S I T I O N V.

*Tout nombre quarré au-dessus de l'unité est ternaire ;  
ou ternaire  $\rightarrow 1$ .*

## D E M O N S T R A T I O N.

**T**Out nombre au-dessus de l'unité est ternaire, ou ternaire  $\rightarrow$  ou  $\rightarrow 1$ . Or si la racine du quarré est ternaire, son quarré le sera aussi.

Prop. 1.

Supp. 3.

Si elle est ternaire  $\rightarrow 1$ , son quarré sera aussi ternaire  $\rightarrow 1$ . Car soit cette racine  $3A \rightarrow 1$ , son quarré sera égal au quarré de  $3A$ , plus deux fois le produit de  $3A$  par  $1$ , plus le quarré de l'unité ; mais les trois premiers nombres étant ternaires, leur somme sera ternaire ; si donc on y ajoute le quatrième qui est l'unité, le tout qui est le quarré de  $3A \rightarrow 1$  sera ternaire  $\rightarrow 1$ .

Supp. 12.

Que si la racine est ternaire  $\rightarrow 1$ , son quarré sera aussi ternaire  $\rightarrow 1$ . Car soit cette racine  $3A \rightarrow 1$ , son quarré sera égal au quarré de l'unité, plus le quarré de  $3A$ , savoir  $9A^2$  moins  $6A$ , qui est deux fois le produit de  $3A$  par  $1$  ; mais  $6A$  étant ternaire, si on l'ôte de  $9A^2$  quarré de  $3A$ , qui est ternaire, le reste sera ternaire ; & par conséquent étant joint au quarré de l'unité, le tout sera ternaire  $\rightarrow 1$ . Donc tout nombre quarré au-dessus de l'unité est ternaire ou ternaire  $\rightarrow 1$  ; ce qu'il falloit prouver.

Supp. 12.



LEMME,

PROPOSITION VI.

*Si un nombre quarré est mesuré par un nombre premier, il le sera aussi par son quarré : & si un nombre est mesuré par un nombre premier, & non par son quarré, il ne sera pas nombre quarré.*

DEMONSTRATION.

SOit A un nombre premier qui mesure  $B^2$ , je dis que  $A^2$  mesurera aussi  $B^2$ ; car A mesurera aussi B; soit C le nombre par lequel il le mesure: donc CA sera égal à  $B^2$ ; &  $C^2 A^2$  quarré de CA, sera égal à  $B^2$ . Donc  $B^2$  sera mesuré par  $A^2$ . Ce qu'il falloit prouver. Que si D est un nombre mesuré par A nombre premier, & non par  $A^2$ , il ne sera pas quarré: car s'il étoit quarré, il seroit aussi mesuré par  $A^2$  par la premiere partie; ce qui est contre l'hypothese. Donc si un nombre quarré est mesuré, &c. Ce qu'il falloit prouver. On prouvera, de même qu'en la premiere partie, qu'un nombre quarré est mesuré par les quarez de tous les nombres qui mesurent sa racine.

Supp. 3.

Supp. 12.

LEMME,

PROPOSITION VII.

*Tout nombre quarré impair au-dessus de l'unité, est octonaire  $+1$ .*

DEMONSTRATION.

TOut nombre impair au-dessus de l'unité est quaternaire  $+ou -1$ ; or si la Racine du quarré impair est  $4A+1$ ; son quarré sera  $16 A^2$ , plus  $8A$ , plus l'unité: mais  $16 A^2$  est mesuré par 8, &  $8A$  est aussi mesuré par 8; donc leur somme sera mesurée par 8; & y ajoutant le quarré de l'unité, le tout sera octonaire  $+1$ . Que si la

Prop. 2.

Supp. 12.

Prop. 4.

Supp. 22. Racine est un quartenaire  $-1$  ; pour avoir son quarré il faudra ôter du quarré du premier nom mesuré par 16, le double produit des deux noms qui est octonaire ; & il restera un octonaire, auquel ajoutant l'unité quarré du 2<sup>e</sup> nom  $-1$ , on aura encore un octonaire  $+1$ , pour le quarré d'un quaternaire  $-1$ . Donc tout nombre quarré impair au-dessus de l'unité est octonaire  $+1$  ; ce qu'il falloit prouver.

## C O N S E Q U E N C E I.

Def. 6. Il s'ensuit que la somme de deux quarrez impairs, est toujours un nombre impairement pair, & n'est point un nombre quarré. Cela est évident ; car si on assemble un octonaire  $+1$ , avec un octonaire  $+1$ , ou avec l'unité prise pour un nombre quarré, on aura un octonaire  $+2$ , qui étant mesuré par 2, & non par son quarré 4, sera un nombre impairement pair, & ne sera point quarré : que si on assemble deux quarrez de l'unité, qui sont deux quarrez impairs, leur somme sera 2, qui est un nombre impairement pair & non quarré.

Prop. 6.

## C O N S E Q U E N C E II.

Il suit de cette proposition, & de la 5<sup>e</sup>, que tout quarré impair au-dessus de l'unité qui n'est point mesuré par 3, surpasse de l'unité un nombre mesuré par 24 ; puisqu'il surpasse de l'unité, un multiple de 3, & un multiple de 8, & que le produit de ces deux nombres est mesuré par 24.

Prop. 37. du 7. d'Eucl.



LEMME,

## LEMMES,

## PROPOSITION VIII.

*Tout carré au-dessus de l'unité qui n'est point mesuré par 5, est quinaire + ou - 1.*

## DEMONSTRATION.

**T**out nombre plus grand que le binaire qui n'est point mesuré par 5 est quinaire + ou - 1 ou quinaire + ou - 2. S'il est quinaire + ou - 1, son carré sera quinaire + 1, par un raisonnement semblable à celui de la proposition 5. Prop. 8

S'il est quinaire + ou - 2, son carré sera quinaire + 4, par le même raisonnement; ainsi le carré de  $5A + 2$ , est  $25A^2 + 20A + 4$ , & le carré de  $5A - 2$  est  $25A^2 - 20A + 4$ : & il est évident que chacun de ces carrés est quinaire + 4, mais un quinaire + 4 est quinaire - 1, & parce que le carré du binaire, est aussi quinaire - 1; il s'ensuit que tout carré au-dessus de l'unité qui n'est point mesuré par 5, est quinaire + ou - 1. Ce qu'il falloit prouver. Supp. 134

## CONSÉQUENCE.

De cette proposition il s'ensuit, que tout carré qui n'est point mesuré par 5, a pour son dernier chiffre ou caractère à main droite, l'un des quatre nombres 1, 4, 6, 9; & que les nombres qui ont pour leur dernier chiffre 2, 3, 7 ou 8 ne sont point carrés: la raison en est évidente, puisque le chiffre final de tout nombre mesuré par 5, étant 5 ou 0, les nombres qui ont pour dernier chiffre 1, 4, 6, ou 9, sont différens par l'unité d'un nombre mesuré par 5, ce qui est nécessaire pour faire qu'ils soient carrés: & que les nombres qui ont pour dernier chiffre l'un des quatre autres nombres, en sont différens par 2, & par conséquent ne sont point carrés par cette Prop. 8.

## L E M M E,

## P R O P O S I T I O N IX.

*Tout quarré quarré au-dessus de l'unité, qui n'est point mesuré par 5, est quinaire  $+1$ .*

## D E M O N S T R A T I O N.

**P**uisque le quarré quarré n'est pas mesuré par 5, sa racine quarrée ne le sera pas aussi; & parce que cette racine est un quarré, elle sera quinaire  $+1$  ou  $-1$ , & son quarré, qui est un quarré quarré, sera quinaire  $+1$  par un raisonnement semblable à celui de la 5<sup>e</sup> Proposition.

Supp. 3.

Prop. 8.

## C O N S E Q U E N C E.

Il s'ensuit, que le dernier chiffre de tout quarré quarré, qui n'est point mesuré par 5, est 1 ou 6: la raison est, que tout nombre mesuré par 5, a pour son dernier chiffre 5 ou 0, à quoi ajoutant l'unité, on aura 1, ou 6, pour le dernier chiffre du quarré quarré, puisqu'il doit être quinaire  $+1$ .

## P R O P O S I T I O N X.

*Si on prend deux Nombres inégaux quelconques, le double de leur produit, & la difference de leurs quarrez, seront les deux côtez d'un Triangle rectangle, & la somme des mêmes quarrez en sera l'hypoténuse.*

|    |    |    |
|----|----|----|
| E. | F. | G. |
| C. | H. | D. |
| A. |    | B. |

## D E M O N S T R A T I O N.

**S**oient A & B deux nombres donnez, dont A soit le plus grand, C le quarré de A; & D le quarré de B; E la somme de ces deux quarrez; G leur difference; F le

double produit de A par B : je dis que les trois nombres E, F, G, sont les trois côtez d'un Triangle rectangle ; car soit H, le produit de A par B, d'autant que F est double de H, son quarré sera quadruple du quarré de H, mais H étant moyen proportionnel entre C & D, son quarré sera égal au produit de C par D, donc le quarré de F, sera quadruple du produit de C par D : mais 4 fois le produit de C par D, avec le quarré de G leur différence, est égale au quarré de leur somme E. Donc le quarré de F, avec le quarré de G, sera égal au quarré de E ; & par conséquent les trois nombres E, F, G, seront les trois côtez d'un Triangle rectangle, & E en sera l'hypoténuse. Ce qu'il falloit prouver.

Supp. 8.

Def. 22

Def. 21

*Démonstration Algébrique.*

$A^2 + B^2$ ,  $A^2 - B^2$  &  $2AB$ , sont les trois nombres E, G, F, le quarré de  $A^2 + B^2$  est  $A^4 + B^4 + 2A^2B^2$  le quarré de  $A^2 - B^2$  est  $A^4 + B^4 - 2A^2B^2$ , qui étant joint au quarré de  $2AB$ , sçavoir  $4A^2B^2$ , fait aussi  $A^4 + B^4 + 2A^2B^2$ . On appellera ces nombres A & B, les générateurs du Triangle rectangle, qui sera dit être formé ou engendré par ces nombres ; & le double de leur produit, sera appelé le côté pair du Triangle, parce qu'il est toujours un nombre pair.

Supp. 22

Definit. 2.

Definit. 2.

C O N S E Q U E N C E.

Il s'ensuit que si un nombre est composé de deux quarrés, la différence du quarré de ce nombre composé, & du quarré de la différence des mêmes quarrés, sera le quarré du double produit de leurs racines ; puisque ces racines seront les nombres générateurs d'un Triangle, qui aura pour son hypoténuse, la somme de leurs quarrés.

*Exemple.*

13 est composé des 2 quarrés 9 & 4, dont les racines  
S ij



# 140 DES TRIANGLES RECTANGLES

sont 2 & 3 : la difference de 169 quarré de 13, & de 25 quarré de 5 (difference de 9 & 4) est 144, qui est le quarré de 12, double produit de 3 par 2.

## P R O B L E M E,

### PROPOSITION XI.

*Trouver 3 nombres quarez en progression Arithmetique.*

**S**Oient A & B les deux côtez d'un Triangle rectangle trouvé par le moyen de deux nombres, comme il a été enseigné en la Proposition précédente; & que C soit l'hypotenuse de ce Triangle: je dis que si on prend les trois nombres  $A - B$ ,  $A + B$  & C, leurs trois quarez seront en progression Arithmetique. Car le quarré de  $A - B$ , sera  $A^2 + B^2 - 2AB$ , le quarré de C sera  $A^2 + B^2$ , puisque son quarré est égal à la somme des quarez de A & B, & le quarré de  $A + B$ , sera  $A^2 + B^2 + 2AB$ : & il est évident que ces trois quarez ont pour difference  $2AB$ , double produit de A, par B: ainsi le Triangle rectangle 5, 12, 13, étant donné, la difference de 5, & de 12, est 7, & leur somme 17, dont les quarez sont 49, & 289, & le quarré de l'hypotenuse 13, est 169: Or les trois quarez 49, 169, 289, ont pour difference commune 120, double produit de 5 par 12: & par conséquent ces trois quarez sont en progression arithmetique.

## C O N S E Q U E N C E.

Il s'ensuit que la difference du quarré de l'hypotenuse, au quarré de la somme des deux côtez, ou au quarré de leur difference, est quadruple de l'aire du triangle; car les côtez du triangle étant A & B, l'aire sera  $\frac{1}{2}AB$ ; & la difference du quarré de l'hypotenuse, au quarré, soit de la somme, soit de la difference des deux côtez est  $2AB$ , qui est quadruple de  $\frac{1}{2}AB$ .

PROPOSITION XII.

*Si les nombres générateurs d'un Triangle rectangle sont multipliez par un même nombre ; les deux produits seront les générateurs d'un autre Triangle rectangle , qui sera multiple du premier , par le quarré du multipliant.*

DEMONSTRATION.

Soient A & B les générateurs d'un triangle rectangle, dont A soit le plus grand , & soient multipliez par quelconquenombre C ; les produits seront CA , & CB : Or les trois côtez du triangle qu'ils formeront , seront  $C^2 A^2 + C^2 B^2$ ,  $C^2 A^2 - C^2 B^2$ , &  $2 A B C$ , qui sont multiples par  $C^2$ , des 3 côtez du premier Triangle  $A^2 + B$ ,  $A^2 - B^2$ , &  $2 A B$ ,

Prop. 10.

*Exemple.*

Soient 2 & 3 les générateurs du triangle 5, 12, 13, & soient multipliez 2, & 3, par 5 : les produits seront 10, & 15, qui seront les générateurs du triangle 325, 125, & 300, dont les côtez sont multiples de 13, 5, 12, par 25 quarré du multipliant. Donc ce dernier triangle sera multiple du premier par ce quarré.

Prop. 10.

Def. 5.

PROPOSITION XIII.

*Si en un Triangle rectangle, deux des trois côtez n'ont point de commune mesure autre que l'unité, le troisième côté n'en aura point aussi avec aucun des deux autres ; & le Triangle sera primitif. Et si deux des trois côtez ont une commune mesure autre que l'unité, tous les trois auront la même mesure, & le Triangle sera composé.*

142. DES TRIANGLES RECTANGLES  
D E M O N S T R A T I O N.

**L**A premiere partie de cette Proposition se démontre ainsi. Si le troisieme côté avoit une commune mesure avec quelqu'un des autres côtez, leurs quarrez l'auroient aussi, & pareillement la somme & la difference des mêmes quarrez. Or la somme ou la difference de ces quarrez, est le quarré de l'autre côté : donc ce 3<sup>e</sup> quarré auroit la même mesure ; & par conséquent les quarrez des deux côtez qu'on a supposé premiers entr'eux, auroient une commune mesure, & seroient composez entr'eux ; mais lorsque deux quarrez sont composez entr'eux, leurs côtez sont aussi composez entr'eux ; car s'ils étoient premiers entr'eux, leurs quarrez le seroient aussi : d'où il s'ensuit que les deux côtez qu'on a supposé premiers entr'eux, seroient composez entr'eux, ce qui est absurde.

Supp. 3.

Supp. 7.

Def. 1.

Euc. 19. 7.

Pour la 2<sup>e</sup> partie, si le 3<sup>e</sup> côté n'avoit pas une commune mesure avec l'un des deux autres ; ces deux autres n'en auroient point aussi entr'eux, par ce qui a été dit en la premiere partie : ce qui est contre l'hypothese. Donc si en un Triangle rectangle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

C O N S E Q U E N C E.

Il s'ensuit, que si l'un destrois côtez est un nombre premier, le Triangle sera primitif, puisque ce côté ne peut avoir de commune mesure avec les deux autres.

Que si l'on dit que le moindre côté étant premier, il peut être la commune mesure des deux autres, on prouvera qu'il est impossible : car l'hypotenuse seroit differente de l'autre côté par ce même nombre premier, ou par un multiple de ce premier : & en tous les deux cas, son quarré seroit plus grand que la somme des quarrez des deux autres côtez, ce qui est absurde.

Supp. 1.

PROPOSITION XIV.

*Si on prend deux nombres quelconques premiers entr'eux, dont l'un soit pair, & l'autre impair; le Triangle dont ils seront les générateurs, sera primitif.*

D E M O N S T R A T I O N.

**S**Oient A & B premiers entr'eux, dont l'un soit pair, & l'autre impair; je dis que le triangle rectangle qu'ils formeront, sçavoir  $A^2 + B^2$ ,  $A^2 - B^2$  &  $2AB$ , sera primitif: car A & B étant premiers entr'eux, leurs quarrés  $A^2$  &  $B^2$  seront aussi premiers entr'eux; & leur somme  $A^2 + B^2$ , sera aussi nombre premier à chacun d'eux, & par conséquent à leurs racines A ou B, & à leur produit AB: Mais  $A^2 + B^2$  étant la somme d'un pair & d'un impair, sera un impair; donc il sera premier au nombre 2, & étant premier à AB, il sera premier à  $2AB$  côté pair du Triangle, donc il sera aussi premier à l'autre côté  $A^2 - B^2$ , & les trois côtes n'auront point de commune mesure entr'eux, & par conséquent le Triangle sera primitif: Ce qu'il falloit prouver.

Prop. 10.

Eucl. I. 7.

Supp. 5.

Eucl. I. 7.

Prop. 13.

Def. 3.

C O N S E Q U E N C E.

Il s'ensuit que tout nombre composé de deux quarrés premiers entr'eux, dont l'un est pair, & l'autre impair, est l'hypoténuse d'un Triangle primitif, qui aura pour son côté pair le double produit des 2 racines de ces quarrés, & pour son côté impair la différence de ces deux quarrés: car les racines de ces deux quarrés, seront deux nombres premiers entr'eux, dont l'un sera pair, & l'autre impair; & par conséquent le Triangle qu'ils formeront, sera primitif, par cette 14<sup>e</sup> Proposition.

## PROPOSITION XV.

*Tout Triangle rectangle est primitif ou multiple d'un primitif.*

## DEMONSTRATION.

**O**U les trois côtes du triangle sont premiers entre eux ;  
 Def. 3. & en ce cas, il sera primitif ; ou ils seront composez  
 entr'eux : soient divisez ces derniers par leur plus grande  
 Supp. 2. commune mesure : les trois quotiens seront les trois côtes  
 Eucl. I. 7. d'un Triangle rectangle ; & parce qu'ils seront premiers  
 entr'eux , le Triangle sera primitif ; & par conséquent  
 l'autre Triangle sera multiple de ce primitif par cette plus  
 grande commune mesure. Donc tout triangle rectangle,  
 &c. Ce qu'il falloit prouver.

## L E M M E ,

## PROPOSITION XVI.

*La moitié de la somme de deux nombres , étant jointe à la  
 moitié de leur difference , fait un nombre égal au plus grand des  
 deux nombres : & la moitié de leur difference étant ôtée de la  
 moitié de leur somme , le reste sera le moindre des deux nombres.*

## DEMONSTRATION

*Algebrique.*

**A** & B sont les deux nombres ,  $A + B$  est leur somme ,  
 Supp. 11. &  $A - B$  leur difference ;  $\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B$  joint à  $\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B$  ,  
 fait le plus grand nombre A ; &  $\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B$  étant ôté de  $\frac{1}{2}$   
 $A + \frac{1}{2} B$  , fait le plus petit , sçavoir B.

## C O N S E Q U E N C E .

De là il s'ensuit que  $A + B$  joint à  $A - B$  , fait  $2 A$  , &  
 que  $A - B$  étant ôté de  $A + B$  , le reste est  $2 B$ .

## L E M M E ,

## L E M M E ,

## P R O P O S I T I O N   X V I I .

*Les quarez de la somme & de la difference de deux nombres étant joints ensemble, font une somme égale au double de la somme des quarez des mêmes nombres.*

## D E M O N S T R A T I O N

*Algebrique.*

**S**Oit A le plus grand nombre & B le plus petit; leur somme sera  $A+B$ , & leur difference  $A-B$ ; le quarré de  $A+B$ , sera  $A^2+B^2+2AB$ ; le quarré de  $A-B$  sera  $A^2+B^2-2AB$ : la somme de ces deux quarez est  $2A^2+2B^2$ , qui est double de  $A^2+B^2$ . Ce qui étoit à prouver. Supp. 12.

## L E M M E ,

## P R O P O S I T I O N   X V I I I .

*La difference de deux quarez est le produit de la somme de leurs racines, par la difference des mêmes racines.*

## D E M O N S T R A T I O N

*Algebrique.*

**A**& B sont les racines,  $A^2-B^2$  est la difference de leurs quarez,  $A-B$  est la difference des racines qui multipliant leur somme  $A+B$  fait  $A^2+AB-AB-B^2$ , Supp. 12. & par réduction  $A^2-B^2$ , nombre égal à la difference des quarez des racines A & B. Ce qu'il falloit prouver.

## C O N S E Q U E N C E   I .

Il s'ensuit que la moindre difference de deux quarez est 3, puisque c'est le produit de la somme des deux moindres nombres 1 & 2, par leur difference 1, qui est le moindre de tous les nombres.

*Rec. de l'Ac. Tom. V.*

**T.**

## CONSEQUENCE II.

Il s'ensuit que si les nombres générateurs d'un Triangle rectangle, ont l'unité pour différence, leur somme sera le côté impair de ce Triangle.

## PROPOSITION XIX.

*En tout Triangle rectangle primitif, l'un des deux côtés est pair, & l'autre impair, & l'hypoténuse est aussi un nombre impair.*

## DEMONSTRATION.

**S**il'un des côtés n'est pas pair, & l'autre impair, ils seront tous deux pairs, ou tous deux impairs. Ils ne peuvent être tous deux pairs : car ils auroient 2 pour commune mesure, & le Triangle ne seroit pas primitif contre l'hypothèse. Ils ne peuvent être tous deux impairs, parce que chacun de leurs quarrés, seroit un quarré impair, & par conséquent octonaire  $+1$ , donc la somme de ces quarrés qui doit être le quarré de l'hypoténuse seroit octonaire  $+2$ , & ne seroit pas un nombre quarré : ce qui est absurde. Il reste donc que l'un des côtés soit pair, & l'autre impair : Or le quarré de l'un de ces côtés sera pair, & celui de l'autre impair, & par conséquent leur somme qui est le quarré de l'hypoténuse, sera un quarré impair : d'où il suit que l'hypoténuse sera un nombre impair. Ce qui étoit à prouver.

Prop. 7.

2. Conf.  
Prop. 7.

Supp. 2.

Supp. 1.

## LEMME,

## PROPOSITION XX.

*L'hypoténuse de tout triangle primitif est la somme de deux quarrés inégaux, & premiers entr'eux, dont l'un est pair, & l'autre impair : & le côté impair du même triangle est la différence des mêmes quarrés.*

DEMONSTRATION.

**P**uisque l'hypoténuse d'un Triangle primitif est un nombre impair, & qu'un des deux côtes est aussi impair, la somme de l'hypoténuse & du côté impair, & leur différence seront des nombres pairs : mais parce que la différence des quarrés de l'hypoténuse & du côté impair, est un quarré, sçavoir le quarré du côté pair, & que ce quarré est le produit de la somme & de la différence des deux autres côtes qui sont impairs : cette somme & cette différence, qui seront des nombres pairs, seront entr'elles comme quarré à quarré : & leurs moitez qui seront des nombres entiers, seront aussi entr'elles comme quarré à quarré : mais la somme de ces moitez est l'hypoténuse de ce Triangle, & la différence en est le même côté impair. Or si ces deux nombres (c'est-à-dire ces deux moitez) avoient une commune mesure, elle mesurerait aussi leur somme & leur différence, sçavoir l'hypoténuse, & le côté impair de ce Triangle. Donc ces nombres seroient composez entr'eux, & le Triangle ne seroit pas primitif, contre l'hypothèse. Donc ces deux nombres sont premiers entre eux, & parce qu'ils sont entr'eux comme quarré à quarré, ce seront deux quarrés premiers entr'eux : & puisque leur somme qui est l'hypoténuse est un impair, l'un sera pair, & l'autre impair. Il a été aussi prouvé, que leur différence étoit le côté impair de ce Triangle : donc l'hypoténuse de tout Triangle primitif, &c. Ce qu'il falloit prouver.

Prop. 18.

Supp. 1.

Def. 1.  
& Supp. 16.

Prop. 18.

Supp. 14.

Supp. 64.

Prop. 164.

Supp. 74.

Def. 4.

Supp. 11.

Prop. 19.

CONSEQUENCE I.

Il suit de cette proposition, que tout Triangle primitif a deux nombres générateurs premiers entr'eux, dont l'un est pair & l'autre impair : car d'autant que l'hypoténuse de quelconque Triangle primitif, est la somme de deux quarrés premiers entr'eux, dont l'un est pair, & l'autre impair : leurs racines seront aussi des nombres premiers en-



## 148 DES TRIANGLES RECTANGLES

*Prop. 14.* tr'eux, dont l'un sera pair, & l'autre impair. Donc ces nombres seront les générateurs d'un Triangle primitif, qui sera le même que celui qui a pour hypotenuse, la somme de leurs quarréz.

### C O N S E Q U E N C E II.

*Prop. 20.*  
*Prop. 6.*  
*Prop. 7.* Il s'ensuit aussi que l'hypotenuse d'un Triangle primitif surpasse de l'unité un quaternaire. Car puisqu'elle est la somme d'un quarré pair, & d'un impair, & que le quarré pair est 4, ou multiple de 4, & l'impair est l'unité, ou est octonaire  $\rightarrow 1$ , cette somme surpassera de l'unité un quaternaire.

### C O N S E Q U E N C E III.

Il s'ensuit aussi qu'il n'y a aucun Triangle rectangle primitif dont le côté impair soit moindre que 3, le côté pair moindre que 4, & l'hypotenuse moindre que 5, puisque 4, & 1 sont les moindres nombres quarréz : & leurs racines les deux moindres nombres.

### P R O P O S I T I O N XXI.

Si on prend deux nombres quelconques impairs & premiers entr'eux, le Triangle dont ils seront les générateurs, sera double d'un primitif, & ces deux nombres seront la somme & la différence des deux nombres générateurs de ce primitif : & le côté qui est la différence des quarréz de ces deux nombres impairs & premiers entr'eux, sera double du côté pair du primitif, & leur double produit sera double de son côté impair.

### D E M O N S T R A T I O N.

A . . . . . E . . . . . D . . . . . B . . . . . C

*Supp. 1.* Soient AB & BC, deux nombres impairs & premiers entr'eux, dont AB soit le plus grand, & soit AD, la différence de AB, BC : il est évident que AD sera un

nombre pair, soit icelui divisé en deux également, & soient  $AE, ED$ , les moitez de ce nombre.

D'autant que  $BD$  est égal à  $BC$ , &  $DE$ , à  $EA$ ; le nombre  $BE$  sera la moitié du nombre  $AC$ ; le nombre  $AB$  sera la somme des deux nombres  $BE$ , &  $EA$  (ou  $ED$ ;) & le nombre  $DB$  (ou  $BC$ ) en sera la différence: cela étant, je dis que  $AE, EB$  sont premiers entr'eux: car  $AB$  &  $BC$  étant premiers entr'eux par l'hypothese, leur somme  $AC$  sera nombre premier à  $AB$  & à  $BC$  (ou  $BD$ ;) &  $EB$  moitié de  $AC$ , sera aussi premier à  $AB$ , &  $BD$ , donc il sera premier à  $DE$ , c'est-à-dire  $AE$  différence de  $EB, DB$ , donc  $AE, EB$ , sont premiers entr'eux. Il est encore évident que l'un de ces nombres est pair, & l'autre impair: car ils composent ensemble  $AB$ , qui est impair, & étant premiers entr'eux, ils seront les générateurs d'un triangle primitif; je dis maintenant que le triangle formé par les deux nombres  $AB, BC$ , a ses trois côtez doubles des trois côtez du triangle formé par les deux nombres  $AE, EB$ , sçavoir l'hypotenuse de l'hypotenuse, le côté pair de l'impair du primitif, & l'autre côté de son côté pair. Car  $AB$  &  $BC$  étant la somme & la différence des deux nombres  $AE, EB$ , la somme des quarez de  $AB$ , & de  $BC$ , sera double de la somme des quarez de  $AE$ , &  $EB$ , & ces deux sommes sont les hypoténuses des deux triangles. Il est encore évident, que la différence des quarez des nombres  $AB$  &  $BC$ , est un nombre égal au produit de leur somme  $AC$  par leur différence  $AD$ ; mais  $AD$  étant double de  $AE$ , &  $AC$  de  $EB$ , le produit de  $AC$  par  $AD$  sera quadruple du produit de  $AE$  par  $EB$ , c'est-à-dire double du double produit de  $AE$  par  $EB$  qui est le côté pair du triangle primitif: & par conséquent le côté qui est la différence des quarez de  $AB, BC$ , sera double du côté pair du triangle formé par  $AE, EB$ : il est encore manifeste que le côté impair de ce triangle primitif, est la différence des quarez de  $BE, EA$ ; & par conséquent est égal au pro-

Eucl. 7.

Prop. 14.

Prop. 17.

Prop. 18.

Prop. 19.

# 150 DES TRIANGLES RECTANGLES

duit de  $A B$  par  $D B$ , (ou  $B C$ .) Donc le double produit de  $A B$  par  $B C$ , qui est le côté pair du triangle formé par  $A B$ ,  $B C$ , étant double du simple produit de  $A B$  par  $B C$ , sera double du côté impair du triangle primitif. Donc si on prend deux nombres quelconques, &c. Ce qu'il falloit prouver.

La converse de cette proposition est aisée à prouver, sçavoir que si un Triangle Rectangle est double d'un primitif, c'est-à-dire multiple d'un primitif par 2, la somme & la différence des générateurs du primitif seront les générateurs de ce triangle double, & seront impairs & premiers entr'eux, car  $A E$ ,  $E B$ , étant les générateurs du primitif,  $A B$ ,  $B C$ , seront leur somme & leur différence; or ces derniers nombres sont impairs: ils sont aussi premiers entr'eux; car si  $A B$  avoit une commune mesure avec  $B C$ , ou  $B D$ , elle mesurerait aussi le reste  $A D$ , ce qui est absurde; puisque  $A B$  premier à  $A E$  étant impair, il sera aussi premier au nombre 2, & par conséquent il sera aussi premier à leur produit  $A D$ , égal à deux fois  $A E$ , & suivant ce qui a été prouvé cy-dessus, ces deux nombres  $A B$ ,  $B C$  seront les générateurs de ce triangle double du primitif; d'où il suit aussi que tout triangle double d'un primitif a son hypoténuse composée de deux quarrés, & a deux nombres générateurs.

## *Démonstration Algebrique.*

Soient  $A$  &  $B$  les nombres  $A E$  &  $E B$ ;  $A + B$  sera  $A B$ , &  $A - B$  sera  $B C$ ; or les trois côtés du triangle primitif seront  $A^2 + B^2$ ,  $A^2 - B^2$ , &  $2 A B$ , & l'hypoténuse de l'autre triangle sera la somme des deux quarrés  $A^2 + B^2 + 2 A B$ ; &  $A^2 + B^2 - 2 A B$ , laquelle somme étant deux fois  $A^2 + B^2$ , elle sera double de l'autre hypoténuse.  $A^2 + B^2$ , la différence des deux quarrés de  $A + B$  & de  $A - B$  est  $4 A B$  double du côté pair de l'autre triangle; car le moindre quarré  $A^2 + B^2 - 2 A B$  étant ôté de  $A^2 + B^2 + 2 A B$ ,

il reste  $4AB$  ; & enfin le double produit de  $A+B$  par  $A-B$  sera  $2A^2-2B^2$ , double du côté impair du triangle primitif, sçavoir  $A^2-B^2$ .

C O N S E Q U E N C E.

Il s'ensuit que l'hypoténuse d'un triangle double d'un primitif est un nombre pair composé de deux quarrés impairs, & premiers entr'eux.

P R O P O S I T I O N XXII.

*Aux Triangles multiples d'un primitif par un quarré, l'hypoténuse est la somme de deux quarrés, & le côté qui est la différence de ces quarrés, est multiple du côté impair du primitif, par le même quarré multiplicateur de ses trois côtés.*

D E M O N S T R A T I O N.

Puisque l'hypoténuse de tout triangle primitif est la somme de deux quarrés, chacun de ces quarrés étant multiplié par un quarré, l'un & l'autre produit sera un quarré, & leur somme qui est l'hypoténuse du triangle multiple, sera la somme de deux quarrés. Mais le côté impair du primitif qui est la différence des deux quarrés qui composent l'hypoténuse du primitif étant multipliée par le même quarré, le produit sera la différence des deux quarrés qui composent l'hypoténuse multiple. Donc aux triangles multiples, &c. ce qu'il falloit prouver.

Prop. 20.

Supp. 4.

Supp. 9.

*Demonstration Algebrique.*

Soit  $A^2+B^2$  l'hypoténuse d'un primitif, son côté impair sera  $A^2-B^2$ , si on multiplie ces nombres par  $C^2$ , l'hypoténuse du triangle multiple sera  $A^2C^2+B^2C^2$ , & la différence de ces deux quarrés qui composent l'hypoténuse sera  $A^2C^2-B^2C^2$ , produit de  $A^2-B^2$  par  $C^2$ , & par conséquent multiple du côté impair du primitif par  $C$ .

## PROPOSITION XXIII.

*Aux Triangles multiples d'un primitif par un double quarré, l'hypoténuse est composée de deux quarréz, & la difference de ces deux quarréz, qui est un des côtéz de ce Triangle, est multiple par le même double quarré du côté pair du primitif: comme aussi l'autre côté de ce multiple, est multiple du côté impair du primitif par le même double quarré.*

## DEMONSTRATION.

**I**L a été démontré en la 21. Proposition que le nombre 2, qui est un double quarré, multipliant les trois côtéz d'un primitif, l'hypoténuse de ce multiple sera composée de deux quarréz, & que leur difference qui est un des côtéz de ce multiple, sera double du côté pair du primitif. Je dis encore que tout autre double quarré multipliant un primitif, le triangle multiple qui en sera formé, aura son hypoténuse composée de deux quarréz, & que l'un des côtéz en sera la difference, & sera multiple du côté pair du primitif par le même double quarré. Car puisque

Prop. 21. l'hypoténuse du primitif étant multipliée par 2, fait un nombre composé de deux quarréz; si la somme de ces deux quarréz est encore multipliée par un quarré, le produit

Supp. 4. sera encore la somme de deux quarréz: Or c'est la même

Supp. 10. chose de multiplier un nombre par 2, & le produit par un quarré, que de multiplier ce nombre par un double quarré, & par conséquent les deux quarréz qui composent l'hypoténuse du primitif étant multipliés par un double quarré, feront une somme composée de deux quarréz qui sera

Prop. 21. l'hypoténuse du multiple, & puisque le nombre 2 ayant multiplié le côté pair du primitif produit la difference des deux quarréz qui composent l'hypoténuse du triangle double du primitif; si cette difference est multipliée par le même quarré qui a multiplié l'hypoténuse double de celle du primitif; le produit sera la difference des deux quarréz

quarrez qui composent l'hypoténuse du triangle multiple de ce primitif par le même double carré : il est encore évident que si 2 multipliant le côté impair du primitif produit le côté pair du triangle double du primitif, le multiple de ce côté pair par un carré, sera multiple de l'impair du primitif par un double carré, & sera aussi le côté pair de ce triangle multiple. Donc aux triangles multiples d'un primitif, &c. Ce qu'il falloit prouver. Pour faciliter l'intelligence de ces Propositions, on donne les exemples suivans en nombres.

Supp. 5.

*Exemples des Propositions 14, 21, 22, & 23.*

2 & 5 sont deux nombres premiers entr'eux dont l'un est pair, générateurs du triangle 29, 21, 20 ; le double de ce triangle est 58, 42, 40 ; donc les générateurs sont 7 & 3 somme & différence de 5 & 2 : 58 est composé des deux carrés 49 & 9, 42 double de 21 (qui est la différence des carrés qui composent 29 hypoténuse du primitif) est le double produit de 7 & 3 ; & 40, double de 20 côté pair du primitif, est la différence des deux carrés 49 & 9 ; mais si on multiplie 58, 42, & 40, par le carré 9, on aura 522, 378, 360, pour les trois côtés d'un triangle multiple, & ces côtés seront les mêmes que si on avoit multiplié 29, 21, & 20, par le double carré 18 ; & ce nombre 522 est la somme des produits de 49 & 9 par 9, dont la somme est 441 + 81, c'est-à-dire 522 ; & la différence de ces deux carrés est 360, multiple de 20, côté pair du primitif par le double carré 18. Que si on avoit multiplié ces trois nombres, 29, 21, & 20, par un carré comme 9, les produits seroient 261, 189, 180, qui seroient les côtés d'un triangle multiple du primitif 29, 21, 20, par un carré. Or l'hypoténuse 261, est composée du produit de 25 par 9, & de celui de 4 par 9, qui sont des carrés, dont la somme est 225 + 36, & leur différence 189 est multiple par le carré 9 de 21 côté impair du triangle primitif, conformément à la Proposition 22.

Prop. 20.

*Rec. de l'Ac. Tom. V.*

V.

## C O N S E Q U E N C E.

Il suit des deux Propositions précédentes, que les triangles multiples d'un primitif par un carré ou par un double carré ont des nombres générateurs ; car puisqu'un de leurs côtes est la différence des deux carrés qui composent l'hypoténuse, il s'ensuit que le carré de ce côté & le carré de l'hypoténuse auront pour différence le carré du double produit des deux nombres, dont les carrés composent l'hypoténuse, & par conséquent que ce double produit sera l'autre côté de ce triangle multiple, & que ces deux nombres seront les générateurs de ce triangle multiple d'un primitif par un carré, ou par un double carré.

Conf.  
Prop. 10.  
Prop. 10.

## P R O P O S I T I O N XXIV.

*Tout Triangle qui a des nombres generateurs est primitif, ou multiple d'un primitif par un carré ou par un double carré.*

## D E M O N S T R A T I O N.

Les générateurs sont composez entr'eux ou premiers entr'eux ; si les générateurs sont premiers entr'eux, ou l'un d'eux sera pair, & l'autre impair, ou ils seront tous deux impairs. Au premier cas, le triangle sera primitif, & au second cas, il sera double d'un primitif, c'est-à-dire multiple d'un primitif par 2, qui est un double carré : mais si les générateurs sont des nombres composez entr'eux, ils ne seront pas les plus petits de leur raison, & ils seront également mesurez par deux nombres premiers entr'eux, & en la même raison, chacun du sien : c'est-à-dire qu'un même nombre multipliant ces deux nombres premiers entr'eux, il produira ces deux composez entr'eux : soient donc ces deux nombres composez entr'eux  $A C$ , &  $B C$ , &  $A$  &  $B$  soient les nombres premiers entr'eux, dont

Prop. 14.  
Prop. 22.  
Eucl. 7.

l'un soit pair, & l'autre impair, qui étant multipliez par C, ont produit A C & B C : le triangle formé par A C & B C, sera multiple par le quarré de C, du primitif formé par A & B. Que si A & B sont impairs, & premiers entr'eux, A C, & B C en seront aussi également multiples chacun du sien, & le triangle qui en sera formé sera multiple par C<sup>2</sup>, du triangle formé par les deux impairs premiers entr'eux. Et d'autant que ce dernier triangle est double d'un primitif, l'autre sera multiple par un quarré du double d'un primitif, ou ce qui est la même chose, il sera multiple d'un primitif par un double quarré. Donc tout triangle qui a des nombres générateurs, &c. Ce qu'il falloit prouver.

Supp. 126

Prop. 127

Prop. 128

P R O P O S I T I O N X X V.

*Si un triangle est multiple d'un primitif par un nombre non quarré ni double quarré : il n'aura point de nombres générateurs, & son côté multiple de l'impair du primitif ne sera pas la difference de deux quarez : mais son hypotenuse sera composée de deux nombres, qui seront entr'eux comme quarré à quarré, dont la difference sera le côté multiple de l'impair du primitif.*

D E M O N S T R A T I O N.

Si ce triangle avoit des nombres générateurs, il seroit primitif ou multiple d'un primitif par un quarré, ou par un double quarré, ce qui est contre l'hypothese. Pour la seconde partie soit  $A^2 + B^2$ ,  $A^2 - B^2$ ,  $2 A B$  un triangle primitif, & soit quelconque nombre C, non quarré ni double quarré, par lequel le primitif soit multiplié. L'hypotenuse de ce multiple sera  $C A^2 + C B^2$ , qui seront entr'eux comme quarré à quarré, parce que C multipliant deux quarez, les produits seront en même raison l'un à l'autre que ces quarez : il est encore manifeste que le même nombre C, multipliant le côté impair du primitif, qui est la difference des quarez  $A^2$  &  $B^2$ , produira la difference

Prop. 129

Supp. 9.



## 156 DES TRIANGLES RECTANGLES

supp. 4.

de  $CA^2$ , & de  $CB^2$ , qui ne sont point des nombres quarrés. Donc si un Triangle Rectangle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

### PREMIERE REMARQUE.

On peut voir par ce qui est dit cy-dessus, & par ce qui a été dit en la Proposition 20, qu'une même hypoténuse d'un même triangle, peut être composée de deux nombres quarrés, dont la différence sera un des côtés de ce triangle, & de deux autres non quarrés, qui seront entr'eux comme quarré à quarré, & qui auront pour différence l'autre côté du même triangle : comme au triangle 6, 8, 10, double du primitif 3, 4, 5, l'hypoténuse 10 est le produit de 2 par 5 (ou 4 + 1,) & ce produit est égal à la somme de 8 & 2, qui ne sont pas quarrés, mais sont entr'eux comme quarré à quarré, & le même nombre 2 multipliant le côté impair 3, produit 6, qui est l'un des côtés de ce triangle double de l'impair du primitif, & est la différence des deux nombres 8 & 2 : mais aussi ce même triangle 6, 8, 10, a deux nombres générateurs 3 & 1, dont les quarrés 9 & 1 composent la même hypoténuse 10, & leur différence est 8, double du côté pair du primitif.

### SECONDE REMARQUE.

Il est possible qu'un même nombre soit l'hypoténuse de plusieurs triangles primitifs, & aussi de plusieurs triangles multiples, qui n'ont point de nombres générateurs, comme 65 est l'hypoténuse des triangles primitifs 63, 16; 65, 33, 56, & aussi des triangles multiples 65, 52, 39, & 65, 60, 25, qui n'ont point de nombres générateurs : mais chacun des côtés impairs de ces derniers, ne sont pas la différence de deux nombres quarrés qui composent cette hypoténuse, mais de deux nombres qui sont entr'eux comme quarré à quarré. Les générateurs du premier triangle sont 1 & 8, du second 4 & 7. Mais le troisième est multiple de 3, 4, 5, par 13, & le quatrième multiple de 5, 12, 13, par 5. Les nombres qui composent

*l'hypotenuse du troisieme, sont 52 & 13, qui étant multiples de 4 & 1 sont entr'eux comme quarré à quarré; & du quatrieme, 45 & 20, qui sont aussi entr'eux comme quarré à quarré: leurs cotés multiples des impairs des primitifs sont 39, difference de 52 & 13; & 25, difference de 45 & 20: Et parce qu'on voit par induction, que beaucoup de nombres premiers qui excèdent de l'unité un nombre mesuré par 4, sont les hypotenusés d'un seul triangle primitif, & qu'on n'en trouve point dans une tres-grande suite de nombres qui n'ayent cette propriété: comme 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 101, & que 21 & 57, qui excèdent de l'unité un multiple de 4, mais qui ne sont pas nombres premiers, n'ont pas cette propriété: on peut conjecturer que cette règle est universelle. De même, parce qu'on trouve par induction, que le produit de deux de ces hypotenusés, est l'hypotenuse de deux triangles primitifs, que le produit de trois de ces hypotenusés, est l'hypotenuse de quatre triangles primitifs, que le produit de quatre de ces hypotenusés est l'hypotenuse de huit triangles primitifs, que le produit de cinq de ces hypotenusés est l'hypotenuse de seize triangles primitifs, &c. On peut conjecturer que la progression des nombres de ces triangles sera en raison double à l'infini, en multipliant toujours la dernière hypotenuse, par un nombre premier qui excède de l'unité un multiple de 4.*

E X E M P L E S.

*1105 produit des trois nombres 5, 13, 17. 8177 produit de 13, 17, 37. Et 3145 produit de 5, 17, 37, sont chacun l'hypotenuse commune de quatre triangles primitifs, comme on le voit en la table suivante.*

| 1105 |     | 8177 |      | 3145 |      |
|------|-----|------|------|------|------|
| 1104 | 47  | 7665 | 2848 | 3127 | 336  |
| 817  | 744 | 4305 | 6952 | 2263 | 2184 |
| 943  | 576 | 3375 | 7448 | 1463 | 2784 |
| 1073 | 264 | 1905 | 7952 | 553  | 3096 |

## 158 DES TRIANGLES RECTANGLES

32045, produit de 5, 13, 17, 29; & 40885, produit de 5, 13, 17, 37, sont chacun l'hypoténuse de huit triangles primitifs, comme on le voit en la table suivante.

### CÔTEZ DES TRIANGLES.

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
|       | 2277  | 31964 |
|       | 30956 | 8283  |
|       | 27044 | 17253 |
| HYP.  | 24124 | 21093 |
| 32045 | 23067 | 22244 |
|       | 27813 | 15916 |
|       | 31323 | 6764  |
|       | 32037 | 716   |

### CÔTEZ DES TRIANGLES.

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
|       | 40723 | 2636  |
|       | 39917 | 8844  |
|       | 37523 | 16236 |
| HYP.  | 34387 | 22116 |
| 40885 | 26093 | 31476 |
|       | 19667 | 35844 |
|       | 14893 | 38076 |
|       | 11603 | 39204 |

De même 237133, produit de 13, 17, 29, 37, est l'hypoténuse de huit triangles primitifs, dont les générateurs sont en la table suivante.

| Générateurs. |     | Générateurs. |     |
|--------------|-----|--------------|-----|
| 62           | 483 | 243          | 422 |
| 93           | 478 | 258          | 413 |
| 98           | 477 | 282          | 397 |
| 138          | 467 | 307          | 378 |

Et on n'en trouvera point d'autres.

*De même 1185665 produit des nombres premiers, 5, 13, 17, 29, 37, est l'hypoténuse de seize triangles primitifs, comme on les voit en la table ci-dessous avec leurs nombres générateurs.*

Générateurs.      Côtés des Triangles.

|     |      |         |         |
|-----|------|---------|---------|
| 64  | 1087 | 1177473 | 139136  |
| 103 | 1084 | 1164447 | 223304  |
| 167 | 1076 | 1129887 | 359384  |
| 191 | 1072 | 1112703 | 409504  |
| 236 | 1063 | 1074273 | 501736  |
| 281 | 1052 | 1027743 | 591224  |
| 292 | 1049 | 1015137 | 612616  |
| 359 | 1028 | 927903  | 738104  |
| 449 | 992  | 782463  | 890816  |
| 512 | 961  | 661377  | 984064  |
| 568 | 929  | 540417  | 1055344 |
| 601 | 908  | 463263  | 1091416 |
| 607 | 904  | 448767  | 1097456 |
| 664 | 863  | 303873  | 1146064 |
| 673 | 856  | 279807  | 1152176 |
| 743 | 796  | 81567   | 1182856 |

Hypoténuse commune

1185665.

*Mais on trouvera aussi par induction que le produit de deux de ces nombres premiers qui excèdent de l'unité un multiple de 4, est l'hypoténuse de deux triangles multiples : que le produit de trois de ces nombres, est l'hypoténuse de neuf triangles multiples ; & que le produit de quatre de ces nombres est l'hypoténuse de trente-deux triangles multiples, & non davantage.*

# 160 DES TRIANGLES RECTANGLES

## E X E M P L E S.

|     |         |     |         |
|-----|---------|-----|---------|
| 13  | CÔTEZ.  | 17  | CÔTEZ.  |
| 5   | 60 25   | 5   | 77 36   |
| 65  | 52 39   | 85  | 84 13   |
| 17  |         | 29  |         |
| 13  | 171 140 | 5   | 116 87  |
| 221 | 220 21  | 145 | 105 100 |

1105 produit de 5, 13, 17, est l'hypoténuse de neuf triangles multiples. Sçavoir :

|      |      |      |
|------|------|------|
| 1105 | 1071 | 272  |
|      | 561  | 952  |
|      | 425  | 1020 |
| HYP. | 884  | 663  |
| 1105 | 1001 | 468  |
|      | 1092 | 169  |
|      | 975  | 520  |
|      | 855  | 700  |
|      | 1100 | 105  |

8177 produit de 13, 17, 37, est l'hypoténuse des neuf triangles multiples suivans.

|      |        |      |
|------|--------|------|
|      | CÔTEZ. |      |
|      | 6327   | 2380 |
|      | 8140   | 741  |
|      | 7548   | 3145 |
| HYP. | 7215   | 2848 |
| 8177 | 8073   | 1300 |
|      | 5577   | 5980 |

# EN N O M B R E S. 161

7735 2652

5423 6120

527 8160

2405 produit de 5, 13, 37, est l'hypoténuse des neuf triangles multiples suivans.

## CÔTEZ.

|      |      |      |
|------|------|------|
|      | 2220 | 925  |
|      | 1924 | 1443 |
|      | 2331 | 592  |
| HYP. | 1221 | 2072 |
| 2405 | 1595 | 1800 |
|      | 155  | 2400 |
|      | 2275 | 780  |
|      | 1989 | 1352 |
|      | 2288 | 741  |

3145 produit de 5, 17, 37, est l'hypoténuse des neuf triangles multiples suivans.

## CÔTEZ.

|      |      |      |
|------|------|------|
|      | 2849 | 1332 |
|      | 3108 | 481  |
|      | 2516 | 1887 |
| HYP. | 2775 | 1480 |
| 3145 | 2601 | 1768 |
|      | 669  | 2992 |
|      | 2975 | 1020 |
|      | 3105 | 500  |
|      | 2145 | 2300 |

*Table des trente-deux triangles multiples, dont 40885 produit de 5, 13, 17, 37, est l'hypothèse commune.*

## CÔTEZ DES TRIANGLES.

|       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|
| 40749 | 3332  | 37037 | 17316 |
| 24221 | 22372 | 40404 | 6253  |
| 31059 | 26588 | 36075 | 19240 |
| 8211  | 40052 | 40365 | 6500  |
| 37740 | 15725 | 27885 | 29900 |
| 32708 | 24531 | 40848 | 1739  |
| 39627 | 10064 | 30129 | 27578 |
| 20757 | 35224 | 34891 | 21312 |
| 27115 | 30600 | 39701 | 9768  |
| 2635  | 40800 | 31635 | 25900 |
| 33813 | 22984 | 40700 | 3885  |
| 12597 | 38896 | 38325 | 14240 |
| 40651 | 4368  | 21525 | 34760 |
| 29419 | 28392 | 16875 | 37240 |
| 19019 | 36192 | 9525  | 39700 |
| 7189  | 40248 |       |       |

Hypoténuse commune

40885

*Et puisqu'un de ces nombres premiers comme 5, ou 13, n'est l'hypoténuse que d'un seul triangle primitif, & ne l'est d'aucun multiple, que le produit de deux de ces nombres est l'hypoténuse de quatre triangles tant primitifs que multiples, que le produit de trois de ces nombres est l'hypoténuse de treize triangles, & celui de quatre de ces nombres de quarante triangles, lesquels nombres 1, 4, 13, 40, sont l'aggrégé des nombres de suite en progression triple 1, 3, 9, 27, on peut conjecturer que cette progression peut aller à l'infini, selon les nombres en progression triple, sçavoir 1, 3, 9, 27, 81, 243, &c.*

& que par conséquent 1185665 sera l'hypoténuse de 121 triangles; y compris les 16 primitifs, lequel nombre est la somme de 1, 3, 9, 27, 81, & que 48612265 produit des six nombres premiers 5, 13, 17, 29, 37, & 41, sera l'hypoténuse de 364 triangles y compris 32 primitifs. On pourra chercher ces triangles si l'on veut, ou même la démonstration de ces propriétés, qui apparemment est très-difficile à trouver; car de même que pour démontrer les propositions précédentes & les suivantes touchant les propriétés des Triangles Rectangles en nombres; il a fallu trouver d'autres théorèmes que ceux des trois Livres des nombres d'Euclide: on peut croire qu'il en faudra encore d'autres pour parvenir à bien démontrer la plupart des propriétés expliquées en cette remarque, hormis la propriété d'un seul de ces nombres premiers, qui est facile à démontrer, car puisque 13, par exemple, est un nombre premier, il ne peut être l'hypoténuse d'un triangle multiple, puisqu'il seroit mesuré par le nombre qui auroit multiplié l'hypoténuse du primitif, & par conséquent ne seroit pas premier contre l'hypothèse.

# PROPOSITION XXVI.

*En tout Triangle Rectangle, un des deux côtes est mesuré par trois.*

## DEMONSTRATION.

Si aucun des deux côtes n'étoit mesuré par trois, leurs Squarrez ne le seroient pas aussi: ces quarrez seroient donc ternaires +1, & leur somme seroit ternaire +2; qui par conséquent ne seroit pas un nombre quarré, ce qui est absurde; puisqu'elle doit être le quarré de l'hypoténuse. Donc en tout triangle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

Supp. 34

Prop. 1.

Def. 1.  
& Supp. 14





## PROPOSITION XXVII.

*L'hypoténuse d'un triangle primitif ne peut être mesurée par trois.*

## DEMONSTRATION.

*Prop. 13.* SI l'hypoténuse étoit mesurée par trois ; l'un des deux côtés étant mesuré par trois par la précédente, l'autre côté le seroit aussi, & les trois côtés auroient une commune mesure, & le triangle ne seroit pas primitif, contre l'hypothèse. Donc, &c. Ce qui étoit à prouver.

## PROPOSITION XXVIII.

*En tout Triangle Rectangle un des côtés est mesuré par 4.*

## DEMONSTRATION.

*Prop. 24.* D'Autant que dans les triangles primitifs le côté pair est le double produit d'un nombre pair & d'un impair ; & que le simple produit qui est pair est mesuré par deux : il s'ensuit que le double produit sera mesuré par 4. Or dans les triangles multiples, un de leurs côtés étant multiple du côté pair du primitif ; ce côté multiple sera aussi mesuré par 4 : puisqu'un nombre multiple d'un nombre mesuré par 4, est aussi nécessairement mesuré par 4. Donc en tout triangle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

## CONSEQUENCE.

Il s'ensuit qu'il n'y a aucun Triangle Rectangle dont chacun des côtés soit un nombre premier.



P R O P O S I T I O N   X X I X.

*Tout Triangle Rectangle a un de ses trois côtez mesuré par 5.*

D E M O N S T R A T I O N.

**S**il un des deux moindres côtez est mesuré par 5, la proposition est véritable.

S'il n'y a aucun de ces deux côtez qui soit mesuré par 5, leurs quarréz seront differents de l'unité d'un nombre mesuré par 5, & chacun d'eux fera quinaire  $+1$ , ou quinaire  $-1$ , ou l'un sera quinaire  $+1$ , & l'autre quinaire  $-1$ .

Prop. 8.

Ces quarréz ne peuvent être tous deux quinaires  $+1$ , ou tous deux quinaires  $-1$ , parce que leur somme seroit quinaire  $+2$ , ou quinaire  $-2$ , & ainsi elle ne seroit pas un quarré, comme il est requis.

Conf.  
Prop. 8.

Supp. 1.

Il reste donc que l'un de ces quarréz soit quinaire  $+1$ , & l'autre quinaire  $-1$ , & en ce cas leur somme qui est le quarré de l'hypotenuse, sera mesurée par 5, parce que 5  $+1$  ajouté à 5  $-1$ , fait un quinaire; donc sa racine qui est l'hypotenuse, sera mesurée par 5. Il est donc nécessaire qu'un des trois côtez d'un Triangle Rectangle soit mesuré par 5. Ce qui étoit à prouver.

Supp. 3.

P R O P O S I T I O N   X X X.

*L'aire de tout Triangle Rectangle est mesuré par six.*

D E M O N S T R A T I O N.

**O**U l'un des côtez est mesuré par trois, & l'autre par quatre, ou un seul est mesuré par 3 & par 4; si l'un des côtez est mesuré par 3, & l'autre par 4, leur produit sera mesuré par 12; & par conséquent l'aire du triangle qui en est la moitié, sera mesurée par 6: mais si l'un des côtez est mesuré par 3 & par 4; ce côté sera aussi mesuré par 12: donc son produit par l'autre côté quel qu'il soit, sera mesuré par 12; & l'aire du triangle en ce second cas, sera aussi mesurée par 6. Ce qui étoit à prouver.

Prop. 26. &  
28.

## PROPOSITION XXXI.

*L'aire de tout triangle multiple, est multiple de celle de son primitif par un quarré; & la racine de ce quarré est le nombre par lequel le primitif a été multiplié, pour faire le triangle multiple.*

## DEMONSTRATION.

Prop. 10.

Supp. 2.

Parce que le triangle primitif a un nombre pair pour un de ses côtez; que ce côté soit  $2A$ , & l'autre soit  $B$ , son aire sera  $AB$ . Que ces deux côtez soient multipliez par  $C$ , on aura un triangle multiple, dont les côtez seront  $2AC$ , &  $BC$ , & l'aire sera  $ABC^2$ , qui est multiple de l'aire du primitif, sçavoir  $AB$ , par  $C^2$ , dont la racine  $C$ , est le nombre par lequel le primitif a été multiplié: ce qui procede de ce que deux nombres comme  $A$  &  $B$ , étant multipliez par un nombre comme  $C$ , les deux produits se multipliant feront un nombre qui sera aussi le produit de  $A$ ,  $C$ ,  $B$ ,  $C$ , se multipliant en quelque ordre que ce soit, si donc on multiplie  $C$ , par  $C$ , on aura  $C^2$ , qui multipliant  $AB$ , produit de  $A$ , par  $B$ , ce produit sera  $ABC^2$ .

Supp. 10.

## CONSEQUENCE I.

Supp. 4.

Il s'ensuit que si l'aire d'un triangle primitif n'est point un nombre quarré, celle de son multiple ne le sera point aussi: puisque  $C^2$  étant multiplié par  $AB$ , aire du triangle primitif, le produit  $ABC^2$  ne sera pas quarré, si  $AB$  n'est pas un quarré.

## CONSEQUENCE II.

De même si l'aire d'un triangle primitif n'est pas double d'un nombre quarré, pas un des multiples de ce triangle, n'aura un double quarré pour son aire; car soient  $4A$  &  $B$  les côtez du triangle primitif, l'aire sera  $2AB$ , & les côtez étant multipliez par  $C$ , l'aire du multiple sera  $2$

ABC<sup>2</sup>. Or il est évident que si 2 AB n'est pas double quarré, 2 ABC<sup>2</sup> ne le sera pas aussi, car AB ne sera pas un quarré, ni par conséquent ABC<sup>2</sup>: donc 2 ABC<sup>2</sup> ne sera pas un double quarré. Supp. 4.

P R O P O S I T I O N   X X X I I.

*En tout triangle primitif la somme & la difference de l'hypotenuse & du côté impair sont chacun un double quarré.*

D E M O N S T R A T I O N.

SOit A<sup>2</sup> + B<sup>2</sup> l'hypotenuse d'un triangle primitif, & A<sup>2</sup> - B<sup>2</sup> le côté impair, il est évident que la somme de ces deux nombres est 2 A<sup>2</sup>, double du quarré A<sup>2</sup>, & leur difference 2 B<sup>2</sup>, double du quarré B<sup>2</sup>. Supp. 12.

C O N S E Q U E N C E.

On fera voir par le même raisonnement, qu'aux triangles multiples d'un primitif par un quarré, ou par un double quarré; la somme de l'hypotenuse & d'un des côtez font ensemble un double quarré, & que leur difference est aussi un double quarré: parce qu'en ces triangles l'hypotenuse est la somme de deux quarrez: mais dans tous les autres multiples, la somme & la difference de l'hypotenuse & du côté multiple de l'impair du primitif, seront entr'eux comme double quarré à double quarré, parce que deux doubles quarrez étant multipliez par le même nombre qui a multiplié les côtez du primitif, les produits demeureront toujours en la raison de double quarré à double quarré: comme au triangle 9, 12, 15, multiple du primitif 3, 4, 5; 24 & 6, somme & difference du côté 9, & de l'hypotenuse 15, sont entr'eux comme 8 & 2, lesquels ils sont multiples par le nombre 3, non quarré ni double quarré. Or 3 multipliant 4 + 1 ou 5, fait l'hypotenuse 15 composée de deux nombres 12 & 3, qui sont entr'eux comme quarré à quarré, sçavoir 1 & 4, & le côté Prop. 22. & 23.

Supp. 9.

9 en est la différence. Et la somme de l'hypoténuse 5 & du côté impair 3, étant 8, qui est un double carré, & leur différence étant 2, qui est aussi un double carré, les produits de ces nombres par 3, savoir 24 & 6 seront encore en la même raison de 8 à 2, c'est-à-dire de double carré à double carré; ce qui étoit à prouver.

## PROPOSITION XXXIII.

*En tout Triangle primitif la somme & la différence de l'hypoténuse, & du côté pair, sont chacun un nombre carré: & la racine du plus grand de ces carrés est la somme des deux nombres générateurs du triangle, & la racine du moindre en est la différence.*

*Démonstration Algébrique.*

**A** & B soient les nombres générateurs de quelconque triangle primitif, l'hypoténuse sera  $A^2 + B^2$ , & le côté pair  $2AB$ , dont la somme est égale au carré de  $A + B$ , somme des deux générateurs, & leur différence savoir  $A^2 + B^2 - 2AB$ , sera le carré de  $A - B$ , différence des générateurs A & B. Ce qu'il falloit prouver.

Supp. 22.

## CONSEQUENCE.

La même chose arrivera aux triangles multiples d'un primitif par un carré, & par un double carré: savoir que la somme de l'hypoténuse & du côté pair, sera un carré: parce qu'ils ont deux nombres générateurs, par la conséquence des 22 & 23 Prop. Mais cette somme & cette différence dans les triangles multiples d'un primitif, par un nombre qui n'est pas carré, ni double carré, seront l'une à l'autre comme carré à carré; ce qui se prouvera par les mêmes raisons de la conséquence de la Proposition précédente.

## PROPOSITION

PROPOSITION XXXIV.

Si le côté pair & l'hypoténuse d'un triangle primitif, sont les générateurs d'un autre triangle : il sera primitif, & son côté impair sera un carré. Et si le côté impair d'un triangle primitif est un nombre carré, l'hypoténuse de ce triangle sera composée de deux carrés, dont l'un aura pour racine l'hypoténuse d'un deuxième triangle primitif, l'autre aura pour racine le côté pair du même deuxième triangle, & la racine du carré, qui est le côté impair du premier triangle, sera le côté impair du deuxième triangle.

DEMONSTRATION.

Parce que le côté impair de tout triangle primitif, est la différence de deux carrés premiers entr'eux, dont la somme est l'hypoténuse du même triangle ; si ce côté impair est un nombre carré, on aura deux carrés premiers entr'eux, qui joints ensemble feront un troisième carré, & les racines de ces trois carrés seront les trois côtés d'un deuxième triangle primitif. Prop. 100

La première partie qui est la converse de la deuxième se démontre en cette sorte. Les carrés du côté pair, & de l'hypoténuse, ont pour différence le carré de l'impair : ce carré sera donc le côté impair du deuxième triangle, qui sera primitif, puisque les générateurs sont un pair, & un impair premiers entr'eux. Def. 14  
Prop. 146

Démonstration Algébrique.

Que le côté impair du triangle soit  $A - B^2 = Z^2$ , donc  $Z^2 + B^2 = A^2$  & on aura un deuxième triangle dont les trois côtés seront A, B, Z, duquel A sera l'hypoténuse, & Z en sera le côté impair, puisque son carré est le côté impair du premier triangle : il restera donc B, pour le côté pair du deuxième triangle, donc l'hypoténuse du premier triangle  $A^2 + B^2$  est composée de deux carrés, dont les

## 170 DES TRIANGLES RECTANGLES

racines A & B sont l'hypoténuse, & le côté pair d'un deuxième triangle, & Z, racine du carré qui est le côté impair du premier triangle par l'hypothèse, sera le côté impair du deuxième, & il est évident que ces deux nombres A & B, sont premiers entr'eux, & par la 14<sup>e</sup> Prop. le triangle dont ils seront les générateurs, sera primitif.

*Exemple.*

Soit le Triangle 9, 40, 41, dont les nombres générateurs sont 4 & 5, & le côté impair 9 est carré. Parce que l'hypoténuse 41 est la somme des deux carrés 25 & 16, dont 9 côté impair est la différence, & que cette différence est un carré, il s'ensuit que ce carré joint au moindre carré des deux qui composent l'hypoténuse, savoir 16, fera un autre nombre carré 25; & par conséquent les trois racines de ces trois carrés, seront les trois côtés d'un Triangle Rectangle, savoir 3, 4, 5, dont le plus grand 5 sera l'hypoténuse.

### PROPOSITION XXXV.

*Si le côté pair d'un triangle primitif est un double carré, les nombres générateurs de ce triangle seront des nombres carrés, & l'hypoténuse sera la somme de deux carrés carrés.*

### D E M O N S T R A T I O N.

Prop. 10.

Supp. 4. & 11.

Conf.  
Prop. 14.  
Supp. 12.

**P**Arce que le côté pair d'un triangle primitif est le double du produit des racines des carrés qui composent l'hypoténuse, si ce double produit est un double carré, sa moitié sera un nombre carré, qui ne peut être produit que par deux nombres carrés, ou par deux nombres plans semblables: mais parce que ces nombres sont les générateurs d'un triangle primitif, ils seront premiers entr'eux, & par conséquent ils seront nombres carrés, & leurs carrés dont la somme est l'hypoténuse de ce

triangle, seront des quarrez quarrez : ainsi parce que 72 double du carré 36 est le côté pair du triangle primitif 65, 72, 97, l'hypoténuse 97 doit être composée de deux quarrez quarrez, qui sont 81 & 16 : à cause que 36 moitié du côté pair étant un carré, il ne peut être produit que par deux quarrez comme 4 & 9, puisque le côté pair est le double du produit des deux nombres générateurs du triangle, qui doivent être premiers entr'eux, & que les quarrez de ces deux quarrez, qui sont les quarrez quarrez 81 & 16, composent l'hypoténuse 97. Supp. 11.

### CONSEQUENCE.

Il s'en suit que tout nombre composé de deux quarrez quarrez, est l'hypoténuse d'un triangle, dont le côté pair est un double carré : car les racines de ces quarrez quarrez qui sont des quarrez seront les générateurs du triangle : la somme de leurs quarrez qui sont des quarrez quarrez, en fera l'hypoténuse, & le côté pair sera le double de leur produit, lequel produit étant carré, ce double produit sera double carré.

#### Exemple.

Le nombre 97 qui est composé des deux quarrez 16 & 81 est l'hypoténuse du triangle primitif 65, 72, 97, dont les générateurs sont 4 & 9, & le côté pair est 72, double du carré 36 produit de 4 & 9 ; & quoique 36 soit aussi le produit de deux autres quarrez 36 & 1, il sera facile de connoître quels sont les générateurs du triangle donné, parce que la différence de l'hypoténuse & du côté impair, est toujours double du moindre des deux quarrez quarrez, & par conséquent 32 étant cette différence, la moitié 16 sera ce carré carré, dont la racine 4 est l'un des générateurs du triangle. Prop. 32.



## PROPOSITION XXXVI.

*La difference de deux quarez quarez est le produit de l'hypotenuse d'un triangle, par l'un des côtez du même triangle.*

## DEMONSTRATION.

**Prop. 18.** **L**E produit de la somme de deux nombres par leur difference est la difference des quarez de ces nombres : donc si deux nombres sont des quarez, le produit de leur somme par leur difference, sera la difference de leurs quarez, qui sont des quarez quarez. Mais ces quarez sont inégaux ; puisque leurs quarez quarez ont une difference ; & par conséquent leur somme sera l'hypotenuse d'un triangle, & leur difference en sera l'un des côtez. Donc la difference de deux quarez quarez, &c. Ce qu'il falloit prouver.

**Prop. 10.**

## PROPOSITION XXXVII.

*En tout triangle, auquel l'hypotenuse est la somme de deux quarez, le produit de l'hypotenuse par le côté qui est la difference des quarez qui la composent, est la difference de deux quarez quarez, dont les racines quarrées quarrées sont les générateurs du triangle.*

## DEMONSTRATION

*Algebrique.*

**A**<sup>2</sup> + B<sup>2</sup> est l'hypotenuse d'un Triangle Rectangle, A<sup>2</sup> — B<sup>2</sup>, le côté qui est la difference de A<sup>2</sup> & B<sup>2</sup> ; leur produit A<sup>4</sup> — B<sup>4</sup> est la difference des quarez quarez A<sup>4</sup> & B<sup>4</sup> dont les racines quarrées quarrées sont A & B qui sont les générateurs du triangle. Or il est évident que la difference des quarez de A<sup>2</sup> & B<sup>2</sup>, est le produit de leur somme A<sup>2</sup> + B<sup>2</sup>, par leur difference A<sup>2</sup> — B<sup>2</sup>. Mais les quarez de A<sup>2</sup> & B<sup>2</sup>, sont des quarez quarez, dont

**Supp. 22.**

**Prop. 28.**

les racines quarrées sont A & B ; donc le produit de  $A^2 + B^2$  par  $A^2 - B^2$ , sera la difference de deux quarez quarez : dont les racines quarrées quarrées seront les nombres générateurs du triangle. Ce qui étoit à prouver.

P R O P O S I T I O N   X X X V I I I .

*Si dans un Triangle primitif, l'hypotenuse étoit un nombre quarré, & pareillement le côté pair un nombre quarré : la racine de cette hypotenuse seroit l'hypotenuse d'un autre Triangle primitif, qui auroit un nombre quarré pour son côté impair, & un double quarré pour son côté pair.*

D E M O N S T R A T I O N .

**P**Arce que le côté pair d'un triangle primitif, est le double produit des nombres générateurs du triangle ; si ce double produit étoit un nombre quarré, le simple produit seroit un double quarré, qui ne peut être fait que par un quarré, & par un double quarré, ou par deux nombres qui soient entr'eux comme quarré à double quarré : mais parce que le triangle est supposé primitif, le générateur impair sera un quarré, & l'autre générateur un double quarré : car l'impair ne peut être double quarré : & parce que les quarez de ces nombres qui sont premiers entr'eux, étant joints ensemble font l'hypotenuse ; il s'ensuit que l'hypotenuse seroit la somme d'un quarré quarré, & d'un quarré dont la racine seroit un double quarré ; mais l'hypotenuse étant un quarré par l'hypothese, on auroit deux quarez qui feroient un quarré, & les racines de ces trois quarez seroient des nombres premiers entr'eux, & seroient l'hypotenuse & les deux côtez d'un autre triangle, dont le côté impair seroit un quarré, & l'autre un double quarré. Donc si dans un triangle primitif tant l'hypotenuse que le côté pair étoient des quarez ; il en proviendrait un autre triangle primitif moindre, dont le

Prop. 16.

Supp. 11.

Euc. 7.

Def. 1.

côté impair seroit un quarré, & le côté pair un double quarré. Ce qu'il falloit prouver.

## PROPOSITION XXXIX.

*Il n'y a aucun Triangle Rectangle en nombres, dont l'aire soit un nombre quarré.*

## DEMONSTRATION.

**S**Oit premierement quelconque triangle primitif; je dis que son aire ne peut être un quarré. Car afin qu'il eût un quarré pour son aire, il faudroit que de ses deux côtez, l'un fût quarré, sçavoir l'impair; car il ne peut être double quarré & l'autre double quarré. Or dans ce triangle primitif, le côté impair étant quarré, les nombres générateurs du triangle seroient l'hypoténuse, & le côté pair d'un deuxième triangle primitif, & parce que le côté pair du premier seroit un double quarré, ces mêmes nombres générateurs du premier triangle seroient quarez. Prop. 34. Donc l'hypoténuse, & le côté pair de ce deuxième triangle seroient des quarez, & ce triangle seroit moindre que le premier, puisque deux de ses côtez seroient les générateurs de ce premier. Prop. 34. Mais par la précédente, la racine de l'hypoténuse de ce deuxième triangle, seroit l'hypoténuse d'un troisième triangle primitif, qui auroit un nombre quarré pour son côté impair, & un double quarré pour son côté pair; & ce troisième triangle seroit encore moindre que le deuxième. Prop. 38. Or ce troisième triangle auroit aussi pour son aire un nombre quarré. D'où il s'ensuit que supposant un Triangle Rectangle primitif, dont l'aire soit un nombre quarré, on en trouvera un troisième en nombres entiers par une conséquence infaillible, beaucoup plus petit, qui auroit aussi un quarré pour son aire, & que par les mêmes raisons ce troisième en donneroit encore un cinquième plus petit, qui seroit aussi primitif, & par conséquent en nombres entiers, & ainsi à l'infini en

diminuant toujours. Mais cette conséquence est absurde ; car les nombres entiers ne vont pas à l'infini en descendant, puisqu'ils commencent par l'unité, & s'y terminent ; & par conséquent il est impossible que l'aire d'un Triangle Rectangle primitif, soit un nombre quarré. Il a été aussi prouvé par la conséquence de la proposition 31<sup>e</sup>. Que si l'aire d'un primitif n'est pas un nombre quarré, celle de son multiple ne sera pas aussi un quarré. Donc il n'y a aucun triangle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

P R O P O S I T I O N X L.

*Il n'y a aucun Triangle Rectangle en nombres dont l'aire soit un double quarré.*

D E M O N S T R A T I O N.

**S**il un triangle primitif avoit un double quarré pour son aire, il faudroit que chacun de ses moindres côtez fût un nombre quarré, afin que la moitié de leur produit qui est l'aire du triangle, fût un double quarré : mais chacun de ces côtez ne peut être un quarré : car le côté impair étant un quarré, les nombres générateurs de ce triangle seroient l'un l'hypoténuse, & l'autre le côté pair d'un deuxième triangle primitif moindre que le premier, & parce que le côté pair du premier est aussi supposé être un quarré, & que ce côté pair est le double produit des deux nombres générateurs du premier triangle : l'un de ces nombres générateurs seroit un quarré, & l'autre un double quarré, puisqu'ils doivent être premiers entr'eux. Or ces mêmes nombres sont l'hypoténuse & le côté pair du deuxième triangle : donc ce second triangle qui doit être primitif, auroit un quarré pour son hypoténuse, & un double quarré pour son côté pair : puisque l'hypoténuse étant un impair, ne peut être un double quarré, d'où il s'en suivroit que l'hypoténuse de ce second triangle seroit la somme de deux quarrés : & parce que

Supp. 11.

Prop. 34.

Prop. 10.

Supp. 11.

Prop. 34.

Prop. 20.

Prop. 31.

## 176 DES TRIANGLES RECTANGLES

*Def. 4.* cette hypoténuse doit être un nombre quarré, on auroit un quarré, qui seroit la somme de deux quarréz quarréz; & les racines de ces trois quarréz seroient les trois côtez d'un troisiéme triangle primitif moindre que les précédens, qui auroit un quarré pour chacun de ses moindres côtez, & par conséquent son aire seroit un double quarré, comme du premier triangle qu'on a supposé avoir un double quarré pour son aire: & parce que de ce premier triangle proviendrait ce troisiéme beaucoup moindre, qui seroit aussi primitif, & qui auroit un double quarré pour son aire; de même de ce troisiéme, il en proviendrait un cinquiéme encore moindre, qui seroit aussi primitif, & par conséquent en nombres entiers; on conclura par un raisonnement semblable à celui de la proposition précédente, qu'il n'y a aucun Triangle Rectangle primitif en nombres dont l'aire soit un double quarré. Mais par la deuxième conséquence de la Proposition 3<sup>re</sup>, si l'aire d'un primitif n'est pas un double quarré, celle d'aucun des triangles multiples de ce primitif ne sera un double quarré. Donc il n'y a aucun Triangle rectangle en nombres, dont l'aire soit un double quarré. Ce qu'il falloit prouver.

## C O N S E Q U E N C E S

des deux dernieres Propositions.

*Premiere Conséquence de la trente-neuvième.*

**I**L n'y a point de Triangle rectangle auquel l'un des moindres côtez soit un nombre quarré, & l'autre un double quarré; car son aire seroit un quarré. Ce qui a été prouvé impossible.

### I I.

*Prop. 32.* Il n'y a point de Triangle rectangle auquel tant l'hypoténuse, que le côté pair, soit un nombre quarré; parce que de ce Triangle il en proviendrait un autre, dont le côté

côté impair seroit quarré , & le pair un double quarré , & par conséquent son aire seroit un quarré.

## I I I.

Un quarré étant joint à un quarré dont la racine soit un double quarré , ne peut faire un quarré ; car si cette somme étoit un quarré , les racines de ces deux quarrez seroient les deux côtez d'un triangle , dont l'un seroit un quarré , & l'autre un double quarré : ce qui est contre la premiere Conséquence.

## I V.

Un quarré quarré impair ne peut être la somme d'un quarré quarré pair , & d'un quarré impair : car les trois racines de ces trois quarrez feroient un Triangle rectangle , dont l'hypoténuse & le côté pair , seroient quarrez ; ce qui est contre la deuxième Conséquence , & par la même deuxième Conséquence un quarré impair ne peut être la difference de deux quarrez quarrez.

## V.

Il s'en suit aussi que la difference du quarré de l'hypoténuse d'un triangle , au quarré tant de la somme que de la difference des deux côtez du triangle , ne pourra être un nombre quarré : car puisque cette difference est quadruple de l'aire du Triangle , & que cette aire ne peut être un quarré , cette difference ne pourra être un quarré : puisque le produit de 4 qui est un quarré , par un nombre non quarré , ne peut être quarré.

Conf.  
Prop. 224

Supp. 41

## V I.

Il est encore manifeste , qu'il n'y a point de Triangle rectangle primitif dont l'hypoténuse étant un quarré , le côté impair soit aussi un quarré : car le produit de ces deux quarrez seroit la difference de deux quarrez quarrez

Prop. 371

Rec. de l'Ac. Tom. V.

Z

## 178 DES TRIANGLES RECTANGLES

qui composeroient l'hypoténuse d'un Triangle rectangle, dont les générateurs seroient des nombres quarrés, & le côté impair seroit cette différence, or le côté pair de ce dernier triangle seroit un double quarré, & le côté impair un quarré, ce qui est contre la premiere Conséquence.

Supp. 4.

*Conséquence de la Proposition 40<sup>e</sup>.*

I.

Il n'y a aucun Triangle rectangle qui ait un quarré pour chacun de ses moindres côtes; car l'aire seroit un double quarré.

I I.

Un quarré ne peut être la somme de deux quarrés quarrés; parce que les racines de ces trois quarrés seroient les trois côtes d'un triangle, auquel chacun des deux moindres côtes seroit un quarré; contre la premiere Conséquence.

I I I.

Il n'y a aucun Triangle rectangle primitif qui ait un quarré pour son hypoténuse, & un double quarré pour son côté pair; parce que l'hypoténuse seroit la somme de deux quarrés quarrés: ainsi on auroit un quarré, qui seroit la somme de deux quarrés quarrés, contre la deuxième Conséquence.

I V.

Un quarré quarré ne peut être la somme de deux quarrés, dont l'un ait pour racine un double quarré; parce que les racines de ces trois quarrés seroient les trois côtes d'un triangle, qui auroit un nombre quarré pour son hypoténuse, & un double quarré pour son côté pair, contre la troisième Conséquence.

PROPOSITION XLI.

*En tout triangle primitif, la somme des deux côtes est octonaire  $\rightarrow$  ou  $\rightarrow 1$ , & la différence des mêmes côtes est aussi octonaire  $\rightarrow$  ou  $\rightarrow 1$ , ou est l'unité même.*

DEMONSTRATION.

Soient A & B les générateurs du triangle, dont A soit le nombre pair, & soit premierement A pairment pair & plus grand que B; d'autant que le quarré de A est octonaire, & le quarré de B octonaire  $\rightarrow 1$ , ou l'unité, leur différence qui est le côté impair du Triangle sera octonaire  $\rightarrow 1$ ; or le côté pair sera octonaire, puisqu'il est double de A B quaternaire: donc la somme de ces deux côtes en ce premier cas sera octonaire  $\rightarrow 1$ . Que si A est moindre que B, son quarré qui est octonaire, étant ôté du quarré de B qui est octonaire  $\rightarrow 1$ , le reste qui est le côté impair sera octonaire  $\rightarrow 1$ , car cette différence ne peut être l'unité; & le côté pair étant octonaire, la somme des deux sera octonaire  $\rightarrow 1$  en ce second cas.

Prop. 41

Prop. 54

Soit maintenant A impairement pair & plus grand que B, son quarré sera 4, ou octonaire  $\rightarrow 4$ , duquel étant ôté le quarré de B qui est l'unité, ou un octonaire  $\rightarrow 1$ , le reste qui est le côté impair sera 3 ou octonaire  $\rightarrow 3$ , mais A étant 2 ou quaternaire  $\rightarrow 2$ , A B sera 2 ou quaternaire  $\rightarrow 2$ , & 2 A B côté pair sera octonaire  $\rightarrow 4$ , donc en ce troisième cas la somme de ces deux côtes sera 7 ou octonaire  $\rightarrow 7$ , c'est-à-dire octonaire  $\rightarrow 1$ .

Prop. 42

Prop. 54

Que si A est moindre que B, ayant ôté 4 ou un octonaire  $\rightarrow 4$  quarré de A, d'un octonaire  $\rightarrow 1$  quarré de B, le reste sera 5, ou octonaire  $\rightarrow 5$  pour le côté impair, lequel étant joint au côté pair qui est octonaire  $\rightarrow 4$ , la somme sera octonaire  $\rightarrow 9$ , c'est-à-dire octonaire  $\rightarrow 1$ , en ce quatrième & dernier cas: donc la somme des deux côtes d'un triangle primitif est octonaire  $\rightarrow$  ou  $\rightarrow 1$ .



## 180 DES TRIANGLES RECTANGLES

Pour la deuxième partie, soit au premier cas ci-dessus, le côté impair moindre que le côté pair, d'autant qu'il est octonaire  $-1$  ; il est évident que si on l'ôte du côté pair qui est octonaire, le reste sera octonaire  $+1$ , ou l'unité, & que si le côté impair est le plus grand, leur différence sera octonaire  $-1$ .

Au second cas, si le côté pair est le plus grand, ayant ôté un octonaire  $+1$  d'un octonaire, le reste sera octonaire  $-1$ , & si le côté pair est le moindre, leur différence sera octonaire  $+1$ , ou l'unité.

Au troisième cas, si le côté pair est le plus grand, & qu'on ôte 3, ou un octonaire  $+3$ , de 4 ou d'un octonaire  $+4$  ; le reste sera octonaire  $+1$ , ou l'unité ; & si le côté pair est le moindre, ôtant un octonaire  $+4$ , d'un octonaire  $+3$ , le reste sera octonaire  $-1$ .

Au quatrième & dernier cas, si le côté pair est le plus grand, qui est octonaire  $+4$ , & qu'on en ôte l'impair qui est 5, ou octonaire  $+5$ , le reste sera octonaire  $-1$ , & si le côté pair est le moindre, leur différence sera octonaire  $+1$ , ou l'unité. Donc en tout Triangle rectangle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

T R A I T É  
 D E S  
 T R I A N G L E S  
 R E C T A N G L E S  
 E N N O M B R E S.  
 S E C O N D E P A R T I E.

**C**ETTE seconde Partie contient seulement deux Problèmes.

Le premier, est de trouver une multitude requise de Triangles Rectangles en nombres, dont chacun ait pour son aire celle d'un Triangle donné.

Le second, est de trouver une multitude requise de Triangles Rectangles en nombres qui ayent une même aire.

Il est manifeste que la solution du premier Problème ne se peut donner universellement en nombres entiers, comme le nombre 6 ne peut être l'aire que du seul Triangle 3, 4, 5. La raison est que le nombre 12, qui est le produit des deux côtes 3 & 4, & qui est le double de cette aire 6, ne peut être produit par d'autres nombres entiers, que par 1 & 12, & par 2 & 6, & que chacun de ces nombres 1 & 2 ne peut être le côté d'un Triangle Rectangle par la troisième Conséquence de la Proposition vingtième : il est donc nécessaire que les autres Triangles Rec-

## 182 DES TRIANGLES RECTANGLES

rangles, dont l'aire sera égale à 6, ayant leurs côtez exprimez par des fractions. Il en est de même du nombre 30, qui ne peut être l'aire en nombres entiers que du seul triangle 5, 12, 13; mais on peut bien trouver un nombre entier qui soit l'aire de tant de Triangles rectangles qu'on voudra, dont les trois côtez soient des nombres entiers.

### PREMIERE PROPOSITION.

#### L E M M E,

*Si le produit de deux nombres est mesuré par un quarré, & que chacun de ces nombres soit divisé par la racine de ce quarré, le produit des deux quotiens sera égal au premier produit divisé par le même quarré.*

#### D E M O N S T R A T I O N.

**S**Oient les deux nombres  $AC$  &  $BC$ , leur produit sera  $ABC^2$ ; il est évident que si on divise chacun de ces nombres par  $C$ , on aura  $A$  &  $B$ , dont le produit  $AB$  est égal à  $ABC^2$  divisé par  $C^2$ ; ou bien si les deux nombres sont  $A$  &  $BC^2$ , leur produit sera comme devant  $ABC^2$ ; & si on divise chacun de ces nombres  $A$  &  $BC^2$  par  $C$ , sçavoir par la racine du quarré qui mesure leur produit, on aura  $\frac{A}{C}$  &  $BC$ , dont le produit est  $AB$  comme devant.

### PROPOSITION II.

*Trouver une multitude requise de Triangles Rectangles en nombres, dont chacun ait pour son aire celle d'un Triangle donné.*

**S**Oit un Triangle Rectangle quelconque  $A, B, C$ , dont les moindres côtez soient  $A$  &  $B$ , son aire sera  $\frac{1}{2} AB$ . On demande d'autres Triangles en telle multitude qu'on voudra, dont chacun ait  $\frac{1}{2} AB$  pour son aire.

## PREPARATION.

Ce Problème se réduit à trouver d'autres Triangles rectangles qui ne gardent pas la même proportion entre leurs côtes, & dont l'aire soit multiple de  $\frac{1}{2} AB$  par un quarré.

La raison est que si on divise les côtes de chacun de ces Triangles par la racine du quarré, par lequel son aire est multiple de l'aire  $\frac{1}{2} AB$ , le Triangle qui en proviendra aura  $\frac{1}{2} AB$  pour son aire, puisqu'elle est le produit d'un des côtes du Triangle par la moitié de l'autre.

*On observera qu'aux Triangles suivans qui servent à la solution du Problème, on met au premier lieu le côté qui est la différence des deux quarrés qui composent l'hypoténuse, ou qui est multiple de l'impair du primitif, quand le Triangle multiple n'a point de nombres générateurs, & on l'appelle toujours le premier côté en cette deuxième Partie; on met ensuite le côté pair & l'hypoténuse après. Et parce que l'opération ne fait pas voir si le premier côté est moindre que le second, ou s'il est plus grand, c'est-à-dire si le côté A est plus grand que B, ou s'il est moindre, on se sert de la marque = qui signifie différence. Ainsi les moindres côtes du Triangle donné étant AB, le côté impair du premier Triangle trouvé sera  $A^2 = B^2$ , sçavoir la différence entre  $A^2$  &  $B^2$ : de manière que si B est plus grand que A, ce côté impair sera  $B^2 - A^2$ ; mais si A est plus grand que B, ce côté sera  $A^2 - B^2$ .*

*Et pour éviter la confusion des caractères, lorsque le premier côté se doit exprimer par le signe = ou l'hypoténuse par le signe +, on se sert d'un caractère nouveau pour les exprimer, & on met au-dessous la valeur de ce caractère en petites lettres, comme on verra dans la suite.*

## SOLUTION DU PROBLEME.

## PREMIERE CONSTRUCTION.

Premier  
Triangle  
trouvé.

QUE A, B, C soient les côtez d'un Triangle rectangle quelconque, je prens les deux côtez A & B pour les nombres générateurs d'un autre Triangle, qui sera  $A^2 = B^2, 2 AB, A^2 + B^2$  : & afin de ne point augmenter la multitude des caractères, je mets D au lieu de  $A^2 = B^2$ ; & parce que la somme des quarez des deux côtez d'un Triangle rectangle est le quarré de l'hypotenuse, on prendra C pour l'hypotenuse de ce Triangle qu'on mettra au lieu de  $A^2 + B^2$ , & le Triangle sera D, 2 ABC, & c'est le premier Triangle trouvé; & au-dessous de D on mettra  $a^2 = b^2$ , qui est la valeur de D.

## SECONDE CONSTRUCTION.

QUE l'hypotenuse C & le côté pair de ce premier Triangle trouvé, sçavoir 2 AB, soient pris pour les nombres générateurs d'un second Triangle, ils formeront le Triangle  $C^2 = 4 A^2 B^2, 4 ABC, 4 A^2 B + C^2$ .

Que l'hypotenuse  $4 A^2 B^2 + C^2$  soit nommée E, à cause qu'elle a le signe +, suivant ce qui a été remarqué ci-devant.

Et parce qu'en tout Triangle rectangle la difference des quarez de l'hypotenuse, & d'un des côtez est le quarré de l'autre côté, il s'ensuit que cet autre côté étant  $C^2 = 4 A^2 B^2$ , il sera égal à D<sup>2</sup>, qui est le quarré du premier côté du premier Triangle trouvé. Le deuxième Triangle sera donc,

D<sup>2</sup> 2 ABC<sup>2</sup>, E

$$4 a^2 b^2 + c^2$$

Les  $4 a^2 b^2 + c^2$  qui sont au-dessous de E, marquer.

Le second Triangle est 2 ABC<sup>2</sup> D<sup>2</sup>, qui étant divisée

divisée par  $\frac{1}{2} AB$  aire du Triangle donné, on aura pour quotient  $4 C^2 D^2$  qui est un quarré; sa racine est  $2 CD$ , par laquelle le second Triangle  $D^2, 4 ABC^2, E$  étant divisé, on aura le Triangle  $\frac{D}{C}, \frac{ABC}{D}, \frac{E}{CD}$ , dont l'aire est  $\frac{1}{2} AB$ , sçavoir la moitié du produit de  $\frac{D}{C}$  par  $\frac{ABC}{D}$ , qui est la même que celle du Triangle donné.

Or avec ce second Triangle on en fera un troisième par la premiere Construction, prenant pour les générateurs les deux côtez de ce second, qui sont  $D^2$  &  $4 ABC^2$ ; & si on prend le côté pair & l'hypoténuse de ce troisième Triangle pour les générateurs d'un autre Triangle, suivant la seconde Construction, on aura un quatrième Triangle, & ainsi de suite.

Pour éclaircir cela davantage.

Que les trois côtez du second Triangle soient nommez  $F, G, E$ : si on prend les deux côtez  $F, G$ , pour les générateurs d'un troisième Triangle, suivant la premiere Construction, ce troisième Triangle sera  $F^2 = G^2, 2 FG, E^2$ , dont l'hypoténuse doit être un nombre quarré, parce que le Triangle  $F, G, E$ , tient ici lieu d'un Triangle donné, & ce troisième tiendra lieu d'un premier Triangle trouvé. De maniere que si on prend l'hypoténuse  $E^2$ , & le côté pair  $2 FG$  de ce premier Triangle trouvé pour les générateurs d'un autre Triangle, il en viendra un quatrième, dont le premier côté sera un nombre quarré, comme au deuxième Triangle; & l'aire de ce quatrième sera multiple par un quarré de  $2 ABC^2 D^2$ , qui est l'aire du second Triangle, comme cette aire est multiple par un quarré de  $\frac{1}{2} AB$ , aire du Triangle donné. Et par conséquent l'aire de ce quatrième Triangle sera aussi multiple par un quarré de  $\frac{1}{2} AB$ , & ainsi consécutivement on fera tant de Triangles qu'on voudra, dont l'aire sera multiple par un quarré de  $\frac{1}{2} AB$ ; & les côtez de ces Triangles étant divisez par la racine de ce quarré, on aura des Triangles qui auront  $\frac{1}{2} AB$  pour leur aire.

Prop. III

*Rec. de l'Ac. Tom. V.*

A a

# 186 DES TRIANGLES RECTANGLES

Voici huit Triangles, qui viennent du Triangle donné A, B, C, entre lesquels il y en a quatre, dont l'aire est multiple par un quarré de  $\frac{1}{2} AB$ , sçavoir de l'aire du Triangle donné; & ces Triangles sont le deuxième, le quatrième, le sixième, & le huitième, qui ont leur rang marqué par un nombre pair.

## P R E M I E R E T A B L E.

|                                 | Premier côté<br>Triangle donné, | Côté pair<br>A,   | Hypot.<br>B,     | Côté pair<br>C,   | aire $\frac{1}{2} AB$             |
|---------------------------------|---------------------------------|---|------------------|---|-----------------------------------|
| 1 <sup>er</sup> Triangle trouvé | D,                              | $a^2 = b^2$   | 2 AB,            | C <sup>2</sup>  |                                   |
| 2 <sup>e</sup> Triangle         | D <sup>2</sup> ,                | 4 ABC <sup>2</sup> ,  | E                | aire 2 ABC <sup>2</sup> D <sup>2</sup> .  | $4a^2b^2 + c^4$                   |
| 3 <sup>e</sup> Triangle         | F,                              | 8 ABC <sup>2</sup> D <sup>2</sup> ,   | E <sup>2</sup> . |   | $d^4 = 16a^2b^2c^4$               |
| 4 <sup>e</sup> Triangle         | F <sup>2</sup> ,                | 16 ABC <sup>2</sup> D <sup>2</sup> E <sup>2</sup> ,   | G                | aire 8 ABC <sup>2</sup> D <sup>2</sup> E <sup>2</sup> F <sup>2</sup> .                                | $64a^2b^2c^4d^4 + e^4$            |
| 5 <sup>e</sup> Triangle         | H,                              | 32 ABC <sup>2</sup> D <sup>2</sup> E <sup>2</sup> F <sup>2</sup> ,                                | G <sup>2</sup> . |   | $f^4 = 256a^2b^2c^4d^4e^4$        |
| 6 <sup>e</sup> Triangle         | H <sup>2</sup> ,                | 64 ABC <sup>2</sup> D <sup>2</sup> E <sup>2</sup> F <sup>2</sup> G <sup>2</sup> ,                 | I                | aire 32 ABC <sup>2</sup> D <sup>2</sup> E <sup>2</sup> F <sup>2</sup> G <sup>2</sup> H <sup>2</sup> . | $1024a^2b^2c^4d^4e^4f^4 + g^4$    |
| 7 <sup>e</sup> Triangle         | K,                              | 128 ABC <sup>2</sup> D <sup>2</sup> E <sup>2</sup> F <sup>2</sup> G <sup>2</sup> H <sup>2</sup> , | I <sup>2</sup> . |   | $h^4 = 4096a^2b^2c^4d^4e^4f^4g^4$ |

8<sup>e</sup> Triangle K<sup>2</sup>, 256 ABC<sup>2</sup>D<sup>2</sup>E<sup>2</sup>F<sup>2</sup>G<sup>2</sup>H<sup>2</sup>I<sup>2</sup>, L  
 16384 a<sup>2</sup>b<sup>2</sup>c<sup>2</sup>d<sup>2</sup>e<sup>2</sup>f<sup>2</sup>g<sup>2</sup>h<sup>2</sup> + i<sup>4</sup>.  
 aire 128 ABC<sup>2</sup>D<sup>2</sup>E<sup>2</sup>F<sup>2</sup>G<sup>2</sup>H<sup>2</sup>I<sup>2</sup>K<sup>2</sup>,

On observera en ces huit Triangles, que l'hypoténuse & le premier côté sont alternativement marquez d'un seul caractère non quarré; & alors on met au-dessous de ce caractère sa valeur, exprimée en petites lettres, qui sont les mêmes que celles du côté pair du même Triangle, & qui viennent du Triangle précédent.

De même l'hypoténuse & le premier côté sont alternativement exprimez par un caractère quarré, où on remarquera que lorsque le premier côté est un nombre quarré, l'hypoténuse ne l'est pas; & alors ce Triangle a son aire multiple par un quarré de  $\frac{1}{2}$  AB, & on écrit cette aire après le Triangle. On pourroit obmettre les Triangles dont l'ordre est marqué par un nombre impair; sçavoir, le premier, le troisième, le cinquième, & le septième, dont l'aire n'est pas multiple par un quarré de l'aire  $\frac{1}{2}$  AB: mais pour la facilité de la démonstration on les a compris dans cette Table.

On voit assez par l'inspection de la Table qu'on la peut aisément continuer tant qu'on voudra, puisque le côté pair n'augmente à chaque Triangle que d'un caractère, à commencer au second Triangle trouvé, & mettant au devant des caractères le double du nombre qui est devant le côté pair du Triangle précédent.

Pour ce qui est de l'aire, elle augmente de deux caractères, qui ont la marque de quarré, à cause qu'on ne la met que de deux en deux Triangles, sçavoir à ceux dont l'ordre est marqué par un nombre pair. Ces deux caractères sont ceux qui marquent le premier côté du même Triangle, & l'hypoténuse du Triangle précédent: chacun de ces caractères a la marque de quarré; & on met au devant de tous les caractères le quadruple du nombre qui est devant les caractères de l'aire précédente.

Aa ij



*Pour l'hypoténuse & le premier côté, on les marque aisément, mettant en leur lieu un caractère nouveau, en la façon qu'on le peut remarquer dans la Table précédente.*

## D E M O N S T R A T I O N.

Il est évident, par la première construction, que l'hypoténuse du premier Triangle trouvé est toujours le carré de l'hypoténuse du Triangle précédent, qui est le Triangle donné; que le côté pair de ce premier Triangle trouvé est quadruple de l'aire du Triangle donné, puisqu'il est double du produit de ces côtés, & que l'aire n'est que la moitié de ce produit.

Première  
Construction.

Et parce que le second Triangle est formé par l'hypoténuse du premier Triangle trouvé qui est toujours un nombre carré & par le côté pair du même premier Triangle, qui est multiple par un carré, savoir par quatre de l'aire du Triangle donné, le côté pair de ce second Triangle sera multiple par un double carré de l'aire du Triangle donné.

Deuxième  
Construction.

Or le premier côté de ce second Triangle est toujours un nombre carré. Donc l'aire de ce second Triangle, qui est la moitié du produit des deux côtés de ce Triangle, est multiple par un carré de l'aire du Triangle donné.

Or tout ce qui arrive au premier & au second Triangle; ensuite & par le moyen du Triangle donné, arrive aussi au troisième & au quatrième ensuite du second, parce que ce second Triangle pouvant être pris pour le Triangle donné, le troisième se forme de ce second, & le quatrième du troisième en la même façon que le premier Triangle trouvé se forme du Triangle donné, & le second du même premier.

On doit faire le même jugement du cinquième & du sixième Triangle, qui se font par le moyen du quatrième, & du septième & huitième qui viennent du sixième, & ainsi des autres suivans à l'infini.

De là s'en suit que comme on a fait voir que l'aire du second Triangle est multiple par un quarré de l'aire du Triangle donné, aussi l'aire du quatrième sera multiple par un quarré de l'aire du second, & l'aire du sixième de celle du quatrième, & ainsi de suite.

Donc l'aire de tous ces Triangles, dont l'ordre est côté par un nombre pair, sçavoir le deuxième, le quatrième, le sixième & les autres ensuite ont leur aire multiple par un quarré de l'aire du Triangle donné, ce qui étoit à démontrer.

Il est aisé de faire voir aussi que les Triangles qui viennent du Triangle donné par la méthode précédente ne gardent pas une même proportion ou raison entre leurs côtes, c'est-à-dire, que leurs côtes ne sont pas multiples des côtes du Triangle donné, ni de ceux qui viennent ensuite; car si on suppose que le Triangle donné soit primitif, le premier Triangle qu'il faut trouver ayant pour ces générateurs les côtes du Triangle donné, qui sont premiers entre eux, la différence de leurs quarrés n'aura point de commune mesure avec aucun d'eux, ni avec le double de leur produit. Or cette différence est le premier côté de ce premier Triangle, & le double du produit des côtes en est le côté pair: donc les côtes de ce premier Triangle seront aussi premiers entr'eux, & par conséquent avec l'hypoténuse. De même, parce que l'hypoténuse & le côté pair du premier Triangle trouvé sont les générateurs du second Triangle, puisque ces nombres sont premiers entre eux, & l'un pair & l'autre impair; la somme de leurs quarrés, qui est l'hypoténuse de ce second Triangle, n'aura point de commune mesure avec aucun de ces nombres générateurs ni avec leur produit, ni le double de ce produit, cette somme étant un nombre impair. Donc l'hypoténuse de ce second Triangle n'aura point de commune mesure avec le côté pair, qui est ce double produit, ni par conséquent avec le premier côté.

Prop. 23.  
L. Partic.

Prop. 23.  
L. Partic.

Donc ce second Triangle sera encore primitif ; & ainsi ses côtez ne garderont pas entre eux la même proportion que ceux du Triangle donné , ni les autres Triangles qui seront formez de ce second , qui peut tenir lieu du Triangle donné.

Or si les côtez de ces Triangles formez par celui qui a été donné , ne gardent pas entre eux la même proportion que les côtez du donné , leurs multiples ne la garderont pas aussi , parce que les Triangles multiples gardent toujours la même proportion entre leurs côtez que leurs primitifs. Et ainsi cela se trouvera véritable , tant aux primitifs qu'aux multiples , quoique les côtez des multiples aient une commune mesure.

Prop. 31.  
I. Partie.

Il a été nécessaire de mettre cette condition aux Triangles pour faire qu'un même nombre soit l'aire de plusieurs Triangles ; parce que comme tout Triangle multiple a son aire multiple par un quarré de celle de son primitif , & que la racine de ce quarré est le nombre par lequel le Triangle primitif a été multiplié ; si les Triangles étoient multiples d'un même Triangle , lorsqu'on viendroit à diviser le Triangle multiple par cette racine , le Triangle qui en viendroit seroit le primitif donné , & ainsi on n'auroit que ce même Triangle , & on ne satisferoit pas à la proposition. Ainsi le Triangle donné étant 3 , 4 , 5 , ce ne seroit pas assez de prendre les Triangles 6 , 8 , 10 , ou 9 , 12 , 15 , pour faire des Triangles qui eussent une même aire , quoique l'aire de chacun de ces deux Triangles soit multiple par un quarré de celle de 3 , 4 , 5 , parce que leurs côtez gardent entre eux la même proportion que les côtez du Triangle donné , 3 , 4 , 5 .

Mais pour revenir au Problème principal , puisque chacune des aires trouvées par la Méthode précédente est multiple par un quarré de celle du Triangle donné , si on divise chacune d'elles par l'aire du Triangle donné , on aura un quarré par la racine duquel divisant le Triangle

dont on considère l'aire, on aura un Triangle qui aura une même aire que le Triangle donné A, B, C, & c'est ce qui étoit requis. En voici l'opération.

Prop. 1.

L'aire du second Triangle trouvé, qui est en la première Table, est  $2 A B C^2 D^2$ ; qu'elle soit divisée par  $\frac{1}{2} A B$ , aire du Triangle donné, le quotient sera  $4 C^2 D^2$  qui est un carré; sa racine est  $2 C D$ , par laquelle on divisera le second Triangle  $D^2$ ,  $4 A B C^2$ , E, & on aura le Triangle  $\frac{D}{2C}$ ;  $\frac{2ABC}{D}$ ,  $\frac{E}{2CD}$ , dont l'aire est  $\frac{1}{2} A B$ , comme au Triangle donné.

L'aire du quatrième Triangle est  $8 A B C^2 D^2 E^2 F^2$ , qui étant divisée par  $\frac{1}{2} A B$ , donne  $16 C^2 D^2 E^2 F^2$  carré de  $4 C D E F$ , qui divisant le quatrième Triangle, il en viendra le Triangle  $\frac{F}{4CDE}$ ,  $\frac{4ABCD E}{F}$ ,  $\frac{G}{4CDEF}$ , dont l'aire est aussi  $\frac{1}{2} A B$ .

L'aire du sixième Triangle étant divisée par  $\frac{1}{2} A B$  donne  $64 C^2 D^2 E^2 F^2 G^2 H^2$ , carré de  $8 C D E F G H$ , qui divisant le sixième Triangle, donne le Triangle  $\frac{H}{8CDEFG}$ ,  $\frac{8AB CDEFG}{H}$ ,  $\frac{I}{8CDEFGH}$ , dont l'aire est  $\frac{1}{2} A B$ , comme au Triangle donné.

Enfin l'aire du huitième Triangle étant divisée par  $\frac{1}{2} A B$ , donne  $256 C^2 D^2 E^2 F^2 G^2 H^2 I^2 K^2$ , dont la racine est  $16 C D E F G H I K$ , qui divisant le huitième Triangle donne le Triangle  $\frac{K}{16CDEFGHI}$ ,  $\frac{16AB CDEFGHI}{K}$ ,  $\frac{L}{16CDEFGHIK}$ , dont l'aire est aussi  $\frac{1}{2} A B$ .

On a donc cinq Triangles, compris le Triangle donné, dont l'aire est  $\frac{1}{2} A B$ , qui est celle qui avoit été proposée. Voici les cinq Triangles en la Table suivante.



192 DES TRIANGLES RECTANGLES  
S E C O N D E T A B L E

*Qui ne contient que des Triangles dont l'aire est aussi égale à celle du Triangle donné, qui y est aussi compris.*

| 1 <sup>er</sup> Triangle, A, | B,                     | C.                       |
|------------------------------|------------------------|--------------------------|
| 2 <sup>c</sup>               | $\frac{D}{2C},$        | $\frac{2ABC}{D},$        |
| 3 <sup>c</sup>               | $\frac{F}{4CDE},$      | $\frac{4ABCDE}{F},$      |
| 4 <sup>c</sup>               | $\frac{H}{8CDEFG},$    | $\frac{8ABCDEFG}{H},$    |
| 5 <sup>c</sup>               | $\frac{K}{16CDEFGHI},$ | $\frac{16ABCDEFGHI}{K},$ |

Aire commune  $\frac{1}{2} AB$ .

Et pour réduire ces caractères en nombres, si on prend le Triangle 3, 4, 5, pour A, B, C, le second Triangle de cette seconde Table sera  $\frac{7}{10}, \frac{120}{7}, \frac{1201}{70}$ , & les deux moindres côtez du troisième Triangle de la même seconde Table seront  $\frac{1437522}{168140}$ , &  $\frac{2017680}{1437522}$ .

Cela sera facile à calculer, si on prend la valeur de chaque caractère, & par ce moyen on trouvera que le second Triangle de la première Table, sçavoir  $D^2, 4ABC^2, E$ , est 49, 1200, 1201, dont l'aire 29400 étant divisée par 6, sçavoir par l'aire du Triangle donné, 3, 4, 5, on

on aura 4900, quarré de 70, qui est le nombre par lequel doit être divisé le Triangle 49, 1200, 1201, & le quotient sera le Triangle  $\frac{7}{10}$ ,  $\frac{120}{7}$ ,  $\frac{1201}{70}$ , qui est la valeur du Triangle  $\frac{D}{1C}$ ,  $\frac{1ABC}{D}$ ,  $\frac{E}{1CD}$ , & l'aire de ce Triangle est 6.

De même on aura la valeur du troisiéme Triangle de la seconde Table, sçavoir de  $\frac{F}{4CDE}$ ,  $\frac{4ABCDE}{F}$ ,  $\frac{G}{4CDEF}$ , correspondant au quatriéme de la premiere Table qui est  $F^2$ , 16 A B C<sup>2</sup> D<sup>2</sup> E<sup>2</sup>, G, dont les côtez vailent 2066690884801, 339252715200, 2094350404801, son aire est 8 A B C<sup>2</sup> D<sup>2</sup> E<sup>2</sup> F<sup>2</sup>, qui vaut 350565247073914830837600, qui étant divisée par 6, qui est l'aire du Triangle donné, on aura 58427541178985805139600, quarré de 241717895860, qui est le diviseur; & ce nombre étant pris suivant ce qui se pratique ordinairement en Algebre, pour le dénominateur commun des trois côtez du Triangle 206669088 &c. qui est le quatriéme de la premiere Table, on aura  $\frac{2066690884801 \cdot 339252715200 \cdot 2094350404801}{241717895860}$ , qui est la valeur du troisiéme Triangle de la seconde Table marquée par les caractères  $\frac{F}{4CDE}$ ,  $\frac{4ABCDE}{F}$ ,  $\frac{G}{4CDEF}$ , & divisant ce Triangle, sçavoir le quatriéme de la premiere Table par 241717895860, on trouvera la valeur en fractions, qui réduites aux moindres termes, donnent le Triangle  $\frac{1437599}{168140}$ ,  $\frac{2017680}{1437599}$ ,  $\frac{2094350404801}{241717895860}$ .

On pourroit trouver quelque difficulté à réduire ces fractions, parce que le nombre par lequel le Triangle doit être divisé, ne mesure aucun des côtez du Triangle, encore que ce diviseur ait une commune mesure avec chacun des deux moindres côtez du même Triangle, quoique ce ne soit pas la même en chacun d'eux; car la mesure commune de ce diviseur avec le premier côté est 1437599; mais la mesure avec le côté pair est 168140; & ces deux nombres 1437599 & 168140 sont premiers entre eux.

On trouvera aisément ces communes mesures, en  
*Rec. de l'Ac. Tom. V.* B b

# 194 DES TRIANGLES RECTANGLES

considérant que le premier côté du Triangle, sçavoir 2066690884801 est  $F^2$ , dont la racine est 1437599. Donc pour mettre aux moindres termes la fraction  $\frac{2066690884801}{241717895860}$ , qui est le premier côté du quatrième Triangle de la première Table, divisé par 241717895860, qui est le diviseur commun de ce Triangle, on divisera le numérateur & le dénominateur de cette fraction par 1437599, racine de son numérateur, & on aura  $\frac{1437599}{168140}$  pour le premier côté réduit aux moindres termes; & divisant le côté pair  $\frac{339252715200}{241717895860}$  du même quatrième Triangle de la première Table, divisé par le diviseur commun 241717895860, par 168140, qui est le dénominateur de la fraction  $\frac{1437599}{168140}$ , qui exprime le premier côté, on aura  $\frac{3017680}{1437599}$  pour le côté pair du même Triangle réduit à ses moindres termes.

Pour ce qui est de l'hypoténuse, elle n'a point de commune mesure avec le nombre par lequel on doit diviser le Triangle.

Or pour plus grande facilité, on reprend ici la première Table, & on y exprime la valeur de chaque côté des Triangles, par les nombres qui sont au-dessus, & même la valeur de chaque petit caractère par un nombre qu'on met au-dessous, comme on le voit en la Table suivante.

## T R O I S I E M E T A B L E.

|          |                    |                    |                    |
|----------|--------------------|--------------------|--------------------|
| Triangle | <sup>3</sup><br>A, | <sup>4</sup><br>B, | <sup>5</sup><br>C. |
| donné    |                    |                    |                    |

---

|                          |                    |                         |                                   |
|--------------------------|--------------------|-------------------------|-----------------------------------|
| 1 <sup>er</sup> Triangle | <sup>7</sup><br>D, | <sup>24</sup><br>2 A B, | <sup>25</sup><br>C <sup>2</sup> , |
| trouvé                   | $a^2=b^2$          | 3, 4,                   |                                   |
|                          | 9, 16.             |                         |                                   |

$$\begin{array}{rcll}
 2^e & 49, & 1200, & 1201, \\
 & D^2, & 4 ABC^2, & E, \\
 & & 3, 4, 25, & 4a^2b^2+c^4, \\
 & & & 9, 16, 625.
 \end{array}
 \quad \text{aire } 2 ABC^2 D^2, \quad 3, 4, 25, 49.$$

$$\begin{array}{rcll}
 3^e & 1437599, & 117600, & 1442401, \\
 & F & 8 ABC^2 D^2, & E^2, \\
 & d^4 = 16a^2b^2c^4, & 3, 4, 25, 49, & \\
 & 2401, & 9, 16, 625, & \\
 & \hline
 & 1440000. & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
 4^e & 2066690884801, & 339252715200, & 2094350404801, \\
 & F^2, & 16 ABC^2 D^2 E^2, & G, \\
 & & 3, 4, 25, 49, 1442401, & 64a^2b^2c^4d^4+e^4, \\
 & & & 9, 16, 625, 2401, 12080520644801, \\
 & & & \hline
 & & & 13829760000 \\
 & \text{aire } 350565247073914830837600, & & \\
 & 8 A B C^2 D^2 E^2 & F^2 & \\
 & 3, 4, 25, 49, 1442401, & 2066690884801. &
 \end{array}$$

On a omis les autres Triangles, parce que ceux-ci suffisent pour faire voir la forme du calcul.

Le nombre 1440000, qu'on a mis au-dessous de  $16a^2b^2c^4$ , est le produit de ces quatre nombres, c'est-à-dire, de 16, 9, 16, 625; duquel produit si on ôte  $d^4$ , ou 2401, il reste 1437599 pour la valeur du caractère F. On a fait de même à l'égard du dernier côté G, car le nombre 13829760000 est le produit des cinq nombres 64, 9, 16, 625, 2401, lequel ajouté à  $e^4$ , ou 2080520644801, fait la valeur de G, savoir 2094350404801.

La manière de ce calcul sera facile à ceux qui feront ré-

B b ij



## 196 DES TRIANGLES RECTANGLES

flexion sur les deux Constructions de ce Triangle : car puis qu'on prend les deux moindres côtez du Triangle donné pour les générateurs du premier Triangle qu'il faut trouver, le premier côté de ce premier Triangle sera 7 (supposant que le Triangle donné soit 3, 4, 5,) sçavoir la différence de 9 & de 16, quarréz des côtez 3 & 4, & l'hypotenuse du même Triangle sera 25, puisque c'est le quarré de l'hypotenuse du Triangle donné. De même au second Triangle 49, 1200, 1201, on voit par la seconde Construction qu'il faut prendre l'hypotenuse & le côté pair du premier Triangle trouvé pour les générateurs du second, & ainsi que le premier côté de ce second Triangle est toujours le quarré du premier côté du premier Triangle ; & parce que D, qui est ce côté, est 7, D<sup>2</sup> sera 49.

Pour ce qui est de l'hypotenuse E, comme elle est la somme des quarréz de C (25) & de 2 AB (24) lesquels quarréz sont 625 & 576, ce sera 1201.

De même, on trouvera que le côté pair du même Triangle, sçavoir 4 ABC<sup>2</sup> est 1200, puisqu'il est le double du produit de 24 par 25, côtez du premier Triangle.

On trouvera en la même sorte les côtez du troisième Triangle F, 8 ABC<sup>2</sup> D<sup>2</sup>, E<sup>2</sup> : car les nombres générateurs de ce Triangle étant D<sup>2</sup> (49) & 4 ABC<sup>2</sup> (1200) sçavoir les deux moindres côtez du second Triangle, la différence des quarréz de ces deux nombres 49 & 1200, qui sont 2401, & 1440000, est le premier côté F, dont la valeur est 1437599, & l'hypotenuse E<sup>2</sup> étant la somme des mêmes quarréz, sera 1442401, qui est aussi le quarré de E (1201) hypotenuse du Triangle précédent, sçavoir du deuxième.

Le côté pair 8 ABC<sup>2</sup> D<sup>2</sup>, étant le double du produit de D<sup>2</sup> (49) par 4 ABC<sup>2</sup> (1200) sera 117600.

Enfin, pour avoir le quatrième Triangle, on prendra pour générateurs les nombres 117600, & 1442401, sçavoir le côté pair, & l'hypotenuse du troisième Triangle ;

les quarez de ces nombres sont 13829760000, & 2080520644801, dont la somme est l'hypotenuſe G (2094350404801); & la difference des mêmes quarez est le premier côté 2066690884801, qui est auſſi le quarré de 1437599, premier côté du Triangle précédent, ſçavoir  $F^2$ , & le côté pair est 339252715200, ſçavoir le double du produit des deux nombres générateurs 117600, & 1442401.

Les aires ſe trouvent par la voye ordinaire.

### P R O P O S I T I O N III.

#### P R O B L E M E II.

*Trouver une multitude requiſe de Triangles Rectangles en nombres entiers qui ayent une même aire.*

ON demande, par exemple, cinq Triangles en nombres entiers, chacun deſquels ait un même nombre pour ſon aire.

#### C O N S T R U C T I O N.

Soit pris un Triangle rectangle quelconque A, B, C; & ſoient faits des Triangles en la multitude requiſe, dont l'aire ſoit multiple par un quarré de l'aire de ce Triangle, par la maniere dont on ſ'eſt ſervi pour faire ceux de la premiere Table ci-devant. Or on n'a beſoin d'en faire qu'un moins de ce qui eſt requis, à cauſe de celui dont on ſe ſert pour faire les autres: ainſi, pour avoir cinq Triangles qui ayent une même aire, il ſuffira d'en faire quatre, parce que le Triangle donné fait le cinquième.

#### S O L U T I O N.

Soient faits par la méthode précédente quatre Triangles, dont l'aire ſoit multiple par un quarré de celle du Triangle qu'on aura choiſi pour faire les autres, comme ceux de la premiere Table; on en fera comme ſ'enſuit

cinq, dont chacun aura pour son aire celle du plus grand Triangle. On divisera la plus grande aire de tous ces Triangles, qui est celle du dernier, par l'aire de chacun des quatre autres, y compris le Triangle qui a servi à faire tous les autres; & on aura quatre quotiens, chacun desquels sera un nombre quarré, par la conclusion de la démonstration de la Proposition précédente: on prendra la racine de chacun de ces quarrés, & chacune de ces racines est le nombre par lequel on doit multiplier le Triangle, dont est venu le quarré de cette racine par la division qu'on a faite.

La Table suivante contient les cinq Triangles, dont l'aire est multiple de  $\frac{1}{2} AB$  (6) par un quarré, y compris le premier, A, B, C, dont l'aire est  $\frac{1}{2} AB$ .

#### QUATRIÈME TABLE.

|   |  |
|---|--|
| 1 <sup>er</sup> Tr. A, B, C,  | aire $\frac{1}{2} AB$ .  |
| 2 <sup>e</sup> D <sup>2</sup> , 4 ABC <sup>2</sup> , E,   | aire 2 ABC <sup>2</sup> D <sup>2</sup> .   |
| 3 <sup>e</sup> F <sup>2</sup> , 16 ABC <sup>2</sup> D <sup>2</sup> E <sup>2</sup> , G,  | aire 8 ABC <sup>2</sup> D <sup>2</sup> E <sup>2</sup> F <sup>2</sup> .   |
| 4 <sup>e</sup> H <sup>2</sup> , 64 ABC <sup>2</sup> D <sup>2</sup> E <sup>2</sup> F <sup>2</sup> G <sup>2</sup> , I,                                | aire 32 ABC <sup>2</sup> D <sup>2</sup> E <sup>2</sup> F <sup>2</sup> G <sup>2</sup> H <sup>2</sup> .                                |
| 5 <sup>e</sup> K <sup>2</sup> , 256 ABC <sup>2</sup> D <sup>2</sup> E <sup>2</sup> F <sup>2</sup> G <sup>2</sup> H <sup>2</sup> I <sup>2</sup> , L, | aire 128 ABC <sup>2</sup> D <sup>2</sup> E <sup>2</sup> F <sup>2</sup> G <sup>2</sup> H <sup>2</sup> I <sup>2</sup> K <sup>2</sup> . |

Et ces Triangles sont le deuxième, le quatrième, le fixième, & le huitième de la première Table, avec le Triangle donné; & de ces quatre Triangles on en fera comme s'ensuit quatre autres, dont chacun aura pour son aire celle du dernier & plus grand de ces Triangles.

Pour faire qu'un multiple du Triangle A, B, C, ait la même aire que le cinquième & dernier de la Table précédente, sçavoir de la quatrième, laquelle aire est 128 ABC<sup>2</sup>D<sup>2</sup>E<sup>2</sup>F<sup>2</sup>G<sup>2</sup>H<sup>2</sup>I<sup>2</sup>K<sup>2</sup>, on divisera cette aire par  $\frac{1}{2} AB$ , qui est l'aire du Triangle donné A, B, C; le quotient est 256 C<sup>2</sup>D<sup>2</sup>E<sup>2</sup>F<sup>2</sup>G<sup>2</sup>H<sup>2</sup>I<sup>2</sup>K<sup>2</sup>, qui est un quarré; sa racine est 16 CDEFGHIK, par laquelle multipliant le Triangle A, B, C, on aura le Triangle 16 ACDEFGHIK, 16 BCDEFGHIK, 16 C<sup>2</sup>DEFGHIK; dont l'aire est 128 ABC<sup>2</sup>D<sup>2</sup>E<sup>2</sup>F<sup>2</sup>G<sup>2</sup>H<sup>2</sup>I<sup>2</sup>K<sup>2</sup> égale à celle

1. Triangle.

du cinquième & dernier Triangle de la quatrième Table.

Cette même aire du cinquième Triangle de la quatrième Table étant divisée par  $2 A B C^2 D^2$ , qui est l'aire du deuxième Triangle de la quatrième Table, donne  $64 E^2 F^2 G^2 H^2 I^2 K^2$ , dont la racine est  $8 E F G H I K$ , par laquelle multipliant le deuxième Triangle  $D^2$ ,  $4 A B C^2 E$ , on aura le Triangle  $8 D^2 E F G H I K$ ,  $32 A B C^2 E F G H I K$ ,  $8 E^2 F G H I K$ , qui est le deuxième Triangle, dont l'aire <sup>1. Triangle.</sup> est la même que celle du cinquième & dernier Triangle.

Cette même aire du cinquième Triangle étant divisée <sup>3. Triangle.</sup> par  $8 A B C^2 D^2 E^2 F^2$ , qui est l'aire du troisième Triangle de la quatrième Table, donne  $16 G^2 H^2 I^2 K^2$ , dont la racine est  $4 G H I K$ , par laquelle multipliant ce troisième Triangle  $F^2$ ,  $16 A B C^2 D^2 E^2$ ,  $G$ , on aura le troisième Triangle, qui a la même aire que le cinquième, ce Triangle est  $4 F^2 G H I K$ ,  $64 A B C^2 D^2 E^2 G H I K$ ,  $4 G^2 H I K$ .

Enfin, la même aire du cinquième Triangle étant divisée par  $32 A B C^2 D^2 E^2 F^2 G^2 H^2$ , qui est l'aire du quatrième Triangle de la quatrième Table, savoir du Triangle  $H^2$ ,  $64 A B C^2 D^2 E^2 F^2 G^2$ ,  $I$ , on aura  $4 I^2 K^2$ , dont la <sup>4. Triangle.</sup> racine est  $2 I K$ , par laquelle multipliant ce quatrième Triangle, on aura le quatrième Triangle requis,  $2 H^2 I K$ ,  $128 A B C^2 D^2 E^2 F^2 G^2 I K$ ,  $2 I^2 K$ , dont l'aire est la même qu'aux précédens.

Cette aire est  $128 A B C^2 D^2 E^2 F^2 G^2 H^2 I^2 K^2$ , qui est la même que celle du cinquième & dernier Triangle de la quatrième Table. Ce dernier Triangle est  $K^2$ ,  $256 A B C^2$  <sup>5. Triangle.</sup>  $D^2 E^2 F^2 G^2 H^2 I^2$ ,  $L$ , qui est le cinquième de ceux qui ont une même aire.

Voici quelques Triangles en nombres entiers, qui ont une même aire. On n'a calculé que les trois premiers, pour éviter le calcul de si grands nombres, qui n'apporteroit aucune utilité; & l'aire commune de ces Triangles est celle du troisième de la quatrième Table; & non pas celle du cinquième Triangle de la même quatrième Table.

|  |                |                |                |
|--|----------------|----------------|----------------|
| 1 <sup>er</sup> Triangle               | 725153687580,  | 966871583440,  | 1208589479300. |
| 2 <sup>e</sup>                         | 169202527102,  | 4143735357600, | 4147188470398. |
| 3 <sup>e</sup>                         | 2066690884801, | 339252715200,  | 2094350404801. |
| Aire commune 350565247073914830837600. |                |                |                |

Pour faire qu'un Triangle multiple de 3, 4, 5, ait la même aire, que celle du troisième, sçavoir 350565, &c. je divise cette aire par 6, qui est celle de 3, 4, 5; le quotient est 58427541178985805139600, quarré de 241717895860, par lequel nombre on multiplie le Triangle 3, 4, 5, pour avoir le premier Triangle 725153687580, &c. qui a la même aire que le troisième Triangle, sçavoir 350565, &c.

Cette même aire du troisième Triangle étant divisée par 29400, aire du deuxième Triangle D<sup>a</sup>, 4 A B C<sup>e</sup>, E, dont la valeur est 49, 1200, 1201, donne 11923987995711388804, qui est un quarré, dont la racine est 3453112798, par laquelle multipliant le deuxième Triangle 49, 1200, 1201, on aura le deuxième Triangle ci-dessus 169202, &c. qui a la même aire que le troisième 2066690, &c. dont le calcul est ci-devant à la fin de la deuxième Proposition de cette seconde Partie.

#### R E M A R Q U E.

Cette méthode est bien facile; toutefois elle a une incommodité, qui est qu'on passe incontinent à de fort grands nombres, comme on le voit en l'exemple précédent, auquel, quoiqu'on ait choisi le moindre de tous les Triangles, sçavoir 3, 4, 5, pour fondement du calcul; néanmoins dès qu'on vient à trois Triangles qui ont une même aire, ils ont déjà leurs côtes de douze ou treize chiffres, & l'aire en a jusques à vingt-quatre; & si on avoit besoin d'une plus grande multitude de Triangles, qu'on voulût exprimer par des nombres, & non point par des caractères qui signifiaient ces nombres, leur grandeur

en rendroit le calcul si laborieux & si ennuyeux , que cela feroit perdre l'envie de s'y appliquer.

Or pour éviter ce travail , on peut se servir d'une autre méthode , qui donne la même quantité de Triangles qui ont une même aire , mais qui sont beaucoup moindres que ceux qu'on trouveroit par la méthode ci-dessus. Il est vrai qu'il faut se servir de quelque adresse pour les trouver, parce que comme leur recherche ne dépend pas d'une suite nécessaire , qui soit connue , il les faut découvrir par induction , en examinant quelquefois par le calcul si quelques-uns des nombres qu'on trouve sont les aires d'un ou de plusieurs Triangles. Voici quelques règles de cette méthode , & quelques exemples de Triangles ayant une même aire , qui ont été trouvez par son moyen.

*I. R E G L E.*

Si l'aire d'un Triangle primitif est mesurée par un carré , & qu'étant divisée par ce carré , le quotient soit l'aire d'un Triangle primitif , on pourra par ce quotient faire deux Triangles rectangles qui auront une même aire : ainsi 1320 , aire du Triangle 48 , 55 , 734 , étant divisé par 4 , donne 330 , aire du Triangle 11 , 60 , 61 , & ce nombre 330 , étant multiplié par 2 , racine de 4 , donne le Triangle 22 , 120 , 122 , dont l'aire est aussi 1320.

*II. R E G L E*

Si on multiplie par un carré l'aire d'un Triangle , & que le produit soit l'aire d'un Triangle primitif , on en fera deux Triangles qui auront une même aire ; comme si 546 , aire du Triangle 13 , 84 , 85 , est multiplié par 9 , on aura 4914 , qui est l'aire du Triangle primitif 27 , 364 , 365 ; & multipliant le premier Triangle 13 , 84 , 85 , par 3 racine de 9 , on aura le Triangle 39 , 252 , 255 , dont l'aire est aussi 4914.

*TABLE DE PLUSIEURS COUPLES  
de Triangles qui ont une même aire.*

210 est l'aire des deux Triangles primitifs 20, 21, 29, & 12, 35, 37.

2730 est l'aire des deux primitifs 28, 195, 197, & 60, 91, 109.

7980, des deux primitifs 40, 399, 401, & 95, 168, 193.

71610, des deux 132, 1085, 1093, & 341, 420, 541.

85470, des deux 140, 1221, 1229, & 259, 660, 709.

106260, des deux 280, 759, 809, & 385, 552, 673.

114114, des deux 77, 2964, 2965, & 364, 627, 725.

2042040, des deux primitifs 528, 7735, 7753.

& 1001, 4080, 4201.

Par des opérations à peu près semblables, on trouvera trois Triangles qui auront une même aire en nombres entiers, par le moyen de deux qu'on aura déjà trouvés : car en multipliant par un carré une aire qui est commune à deux Triangles primitifs, s'il se rencontre que le produit soit l'aire d'un Triangle primitif, on en fera trois Triangles qui auront une même aire, ou bien si on multiplie l'aire d'un primitif, & que le produit soit l'aire de deux Triangles.

*E X E M P L E.*

210, aire des deux Triangles 20, 21, 29; 12, 35, 37, multiplié par quatre, donne 840, aire du primitif 15, 112, 113 : & multipliant ces deux mêmes Triangles par 2, racine de 4, on aura 40, 42, 58, & 24, 70, 74, dont l'aire est aussi 840.

Que si l'aire d'un Triangle primitif est divisée par un carré, & que le quotient soit l'aire d'un Triangle primitif, & que cette aire étant multipliée par un carré, le produit soit aussi l'aire d'un Triangle primitif, on en fera trois Triangles qui auront une même aire; & s'il se

rencontre que l'une de ces aires serve à deux Triangles primitifs, la plus grande servira à quatre Triangles.

*TABLE DE PLUSIEURS TERNAIRES  
de Triangles qui ont une même aire.*

|                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|
| 56, 390, 394,              | 80, 798, 802,              |
| 105, 208, 233, aire 10920. | 105, 608, 617, aire 31920. |
| 120, 182, 218,             | 190, 336, 386,             |

|                              |                               |
|------------------------------|-------------------------------|
| 385, 1488, 1537,             | 855, 2640, 2775,              |
| 264, 2170, 2186, aire 286440 | 792, 2850, 2958, aire 1128600 |
| 682, 840, 1082,              | 1485, 1520, 2125,             |

|                              |                              |
|------------------------------|------------------------------|
| 455, 4128, 4153,             | 462, 2520, 2562,             |
| 624, 3010, 3074, aire 939120 | 490, 2376, 2426, aire 582120 |
| 1118, 1680, 2018,            | 1008, 1155, 1533,            |

|                                 |                                |
|---------------------------------|--------------------------------|
| 1380, 19019, 19069,             | 528, 7735, 7753,               |
| 3059, 8580, 9109, aire 13323110 | 1001, 4080, 4201, aire 2042040 |
| 4485, 5852, 7373,               | 1430, 2856, 3194,              |

Ces trois, dont l'aire est 13323110, sont les moindres entre les primitifs qui ayent une même aire.

Pour trouver plus de trois Triangles qui ayent une même aire comme 4, 5, 6, &c. on peut se servir de quelques regles concernant les parties aliquotes, les combinaisons, &c. par le moyen desquelles on pourra connoître si un nombre est l'aire de quelque Triangle rectangle : mais comme les opérations en sont longues & difficiles, on s'est restraints à ne donner ici que quelques uns de ces Triangles, qu'on a trouvez en se servant de ces regles.





# 104 DES TRIANGLES RECTANGLES

## TABLE DE TROIS QUATERNAIRES de Triangles qui ont une même aire.

|      |       |       |             |
|------|-------|-------|-------------|
| 111, | 6160, | 6161, | aire 341880 |
| 231, | 2960, | 2969, |             |
| 280, | 2442, | 2458, |             |
| 518, | 1320, | 1418, |             |

Ces quatre Triangles font les-moindres de tous ceux qui ont une même aire en nombre entier.

---

|       |        |        |               |
|-------|--------|--------|---------------|
| 3289, | 31920, | 31089, | aire 52492440 |
| 2760, | 38038, | 38138, |               |
| 6118, | 17160, | 18218, |               |
| 8970, | 11704, | 14746, |               |

---

|       |        |        |              |
|-------|--------|--------|--------------|
| 935,  | 17472, | 17497, | aire 8168160 |
| 1056, | 15470, | 15506, |              |
| 2002, | 8160,  | 8402,  |              |
| 2860, | 5712,  | 6388,  |              |

---

Pour faire ces quatre derniers Triangles on a pris 2042040, qui est l'aire des deux Triangles primitifs 528, 7735, 7753, & 1001, 4080, 4201, laquelle divisée par quatre, donne 510510, aire du primitif 715, 1428, 1597, qui étant multipliée par 2, racine de 4, donne 1430, 2856, 3194, qui a pour son aire 2042040, quadruple de 510510 ; & multipliant par 4 cette aire 2042040, on a 8168160, aire du primitif 935, 17472, 17497, & multipliant par 2 les trois Triangles cy-dessus, qui ont 2042040 pour leur aire, on aura les quatre cy-dessus, qui ont 8168160 pour leur aire.

*T A B L E D E Q U A T R E Q U I N A I R E S*  
de Triangles qui ont une même aire.

|       |        |        |               |
|-------|--------|--------|---------------|
| 2805, | 52416, | 52491, |               |
| 3168, | 46410, | 46518, |               |
| 6006, | 24480, | 25206, | aire 73513440 |
| 5236, | 28080, | 28564, |               |
| 8580, | 17136, | 19164, |               |

Si cette aire seroit à quelque Triangle primitif , elle seroit l'aire de six Triangles.

*O n n e m e t p o i n t l e s h y p o t e n u s e s a u x q u i n x e T r i a n g l e s s u i v a n s.*

|             |              |                           |
|-------------|--------------|---------------------------|
| 67234957,   | 56510961360, |                           |
| 713346495,  | 5326320496,  |                           |
| 1141354392, | 3328950310,  | aire 1899756028534150760. |
| 1902257320, | 1997370186,  |                           |
| 1389419029, | 2734604880,  |                           |

|               |                |                              |
|---------------|----------------|------------------------------|
| 4680062014,   | 3933590730710, |                              |
| 49654316490,  | 370752229792,  |                              |
| 79446906384,  | 231720143620,  | aire 9204724278732587435040. |
| 132411510640, | 139032086172,  |                              |
| 180439977829, | 102025331520,  |                              |

|                |                 |                                  |
|----------------|-----------------|----------------------------------|
| 3253383668734, | 6403193472480,  |                                  |
| 4454216308720, | 4676927124156,  |                                  |
| 2672529785232, | 7794878540260,  | aire 10416022535555291732720160. |
| 1670331115770, | 12471805664416, |                                  |
| 6069855166717, | 3432049776960,  |                                  |



**EXEMPLE DE SIX TRIANGLES**  
*qui ont une même aire.*

|                   |                     |                     |
|-------------------|---------------------|---------------------|
| 3868273182124726, | 7613397038778720,   | 8539751277503926,   |
| 3177637914640848, | 9268110584369140,   | 9797716903475948,   |
| 7217057793226513, | 4080707184805440,   | 8290844005220113,   |
| 1986023696650530, | 14829876934990624,  | 14961378514767326,  |
| 187183440373958,  | 157331828456607840, | 157331939812015558, |
| 5296063191068080, | 5560866350621484,   | 7679291627048716,   |

Aire commune 14725349794987762583672877315360.

Tous ces Triangles sont premiers entr'eux, c'est-à-dire, qu'ils ne sont point multiples de quatre, de cinq, ou de six autres Triangles ; & si on les multiplie par quelque nombre que ce soit, on aura d'autres Triangles qui auront aussi une même aire,

**D E S**  
**Q U A R R E Z**  
**O U**  
**TABLES MAGIQUES**

TO  
THE  
HONORABLE  
MEMBERS OF THE  
HOUSE OF REPRESENTATIVES  
IN  
CONGRESS ASSEMBLED  
AT  
WASHINGTON, D. C.  
IN  
COMMISSION

DES

QUARRÉZ

OU

## TABLES MAGIQUES.

ON appelle Quarré Magique celui qui étant divisé par cellules en quantité représentée par un nombre quarré, & les cellules étant remplies de nombres consécutifs, ou qui soient en même progression arithmétique, contient pareille somme en chacune de ses lignes, de quelque façon qu'on les puisse prendre. Exemple :

Le quarré A, B, C, D, 16, A B  
est divisé en 16 cellules, & ces  
cellules sont remplies des nombres  
consécutifs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,  
&c. jusqu'à 16 : & ces nombres  
sont disposés d'un tel ordre dans  
les cellules, que les nombres de  
chaque ligne étant assemblez,  
font une somme égale, soit qu'on C D  
prenne les lignes en long, comme 1, 15, 14, 4, | 12, 6,  
7, 9, | 8, 10, 11, 5, | & 13, 3, 2, 16, | ou qu'on les  
prenne de haut en bas, pour avoir 1, 12, 8, 13, | 15, 6,  
10, 3, | 14, 7, 11, 2, | 4, 9, 5, 16, | ou enfin si on con-  
sidere les deux diagonales ou lignes transversales, 1, 6,  
11, 16, & 4, 7, 10, 13, la & somme de chacune de ces  
lignes est 34.

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 15 | 14 | 4  |
| 12 | 6  | 7  | 9  |
| 8  | 10 | 11 | 5  |
| 13 | 3  | 2  | 16 |

La somme des nombres qui sont en chaque ligne ne  
*Rec. de l'Ac. Tom. V.* D d

se peut pas prendre à discrétion ; mais elle est nécessaire à chaque figure : & voici le moyen de sçavoir quelle elle est.

La somme du plus grand & du moindre nombre de ceux qu'on veut employer dans les cellules du quarré magique étant multipliée par la moitié du côté du quarré, donne la somme de chaque ligne. Ainsi au quarré qui a 16 cellules, si le moindre nombre est 1, & le plus grand 16, & qu'on multiplie leur somme 17 par 2, qui est la moitié de 4, côté de 16, on aura 34 pour le nombre requis.

Que si le quarré magique est impair, on multipliera la moitié de la somme des deux nombres extrêmes par le côté du quarré. Ainsi quand on aura rempli le quarré qui a 25 cellules, si le moindre des nombres est 1, & le plus grand 25, chaque ligne contiendra 65; qui se trouve ajoutant les termes extrêmes 25 & 1; & prenant la moitié de 26, qui est leur somme, & on aura 13, qui étant multiplié par 5, côté du quarré 25, donnera 65.

Si les nombres dont on se sert pour remplir les cellules ne commençoient pas par l'unité, ou qu'ils eussent autre difference entre eux que l'unité; on ne laisseroit pas de se servir des regles cy-dessus pour trouver la somme des nombres de chaque ligne. Exemple: Que les nombres dont on veut remplir les cellules du quarré de 4, qui est 16, soient 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33. J'assemble les extrêmes 3, & 33, pour avoir 36, qui multiplié par 2, moitié de 4, côté du quarré 16, donnera 72 pour la somme des nombres de chaque ligne.

Si les extrêmes des nombres qu'on employe au quarré 16, étoient 1, & 31, je prendrois de même la somme qui est 32; qui étant multipliée par le même 2, donneroit 64 pour la somme des nombres de chaque ligne.

De même si pour remplir les cellules du quarré 9, qui a trois de côté, on se servoit de 4, 7, 10, 13, 16, 19,

22, 25, 28, je prendrois la somme des extrêmes 4 & 28, qui est 32, (laquelle somme est toujours un nombre pair, lors qu'il s'agit des quarrez impairs) la moitié de 32 est 16, qui multiplié par le côté 3, donne 48 pour la somme des nombres qui sont en chaque ligne.

Il faut maintenant voir la maniere dont on se sert pour disposer les nombres en telle sorte que chaque ligne fasse une somme égale.

Il y a entr'autres deux méthodes qui servent à cet effet. L'une est pour les seuls impairs, & l'autre peut servir tant aux quarrez pairs qu'aux impairs.

On donnera ici premièrement celle qui appartient aux seuls impairs, puis on parlera de la generale.

Ausquelles méthodes on supposera toujours pour plus grande facilité, que les nombres dont les cellules doivent être remplies, commencent par l'unité, & qu'elles s'entre-suivent avec la difference de la même unité, comme sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. Car en ce qui dépend de placer & ranger les nombres dans les cellules, il n'importe pas quel soit le moindre nombre, ni quelle difference ils ayent entre eux. Il suffit qu'ils soient en progression Arithmétique, & qu'ils se surmontent l'un l'autre d'un excès toujours égal, comme 2, 5, 8, 11, 14, 17, &c. ou 4, 9, 14, 19, 24, 29, &c.

Pour remplir les cellules d'un quarré impair, par exem-

|   |   |   |   |   |     |
|---|---|---|---|---|-----|
|   |   |   | 1 |   |     |
|   | a | 4 |   | 2 | b   |
| γ | 7 |   | 5 |   | 3 β |
|   | c | 8 |   | 6 | d   |
|   |   |   | 9 |   |     |
|   |   |   | δ |   |     |

|   |   |   |
|---|---|---|
| A |   | B |
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |
| C |   | D |

D d ij



ple du quarré  $ABCD$  qui a 9 cellules, je décris un autre quarré  $abcd$  qui a pareillement 9 cellules, comme on voit ici : & sur chacune des faces du quarré, j'étens une autre cellule vis-à-vis de la cellule qui est au milieu de chaque côté : lesquelles cellules sont marquées  $\alpha \beta \gamma \delta$ .

Cela fait, j'écris les nombres de suite, commençant par une des cellules qui sont hors du quarré & par la plus éloignée du milieu.

On écrira donc 1, 2, 3, dans les cellules  $\alpha, b, \beta$ , puis revenant à la cellule  $\alpha$ , tirant vers  $d$ , on écrira 4, 5, 6, & enfin aux cellules  $\gamma, c, \delta$ , on mettra 7, 8, 9.

Ces nombres étant ainsi disposez, je considere ceux qui se rencontrent dans le quarré  $\alpha, b, c, d$ , qui sont 4, 2, 5, 8, 6, lesquels je mets aux mêmes places dans le quarré  $A, B, C, D$ , apprêté pour cet effet.

Il reste donc à remplir les autres places vuides du quarré, ce qui se fera mettant le nombre qui est en  $\delta$ , en la cellule qui est au-dessous de  $\alpha$ , sçavoir entre 4, & 2 ; & en échange, le nombre qui est en  $\alpha$ , en celle qui est au-dessus de  $\delta$ , entre 8, & 6.

Et semblablement on mettra 7, qui est en  $\gamma$ , vers  $\beta$ , entre 2, & 6 : & 3, qui est en  $\beta$ , on le mettra près de  $\gamma$ , entre 4, & 8, comme on peut voir en la figure. On aura donc la figure complete  $ABCD$  qui a 15, pour la somme des nombres de chacune de ses lignes, & diagonales.

Mais parce que le quarré de 3, pour être trop petit ne donnera pas peut-être une entiere connoissance de la façon dont on fabrique ces quarréz impairs, on en apportera un plus grand pour l'exemple, sçavoir celui de 49, qui a 7 de côté.



A

B

|    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 4  |    | 12 |    | 20 |    | 28 |
|    | 11 |    | 19 |    | 27 |    |
| 10 |    | 18 |    | 26 |    | 34 |
|    | 17 |    | 25 |    | 33 |    |
| 16 |    | 24 |    | 32 |    | 40 |
|    | 23 |    | 31 |    | 39 |    |
| 22 |    | 30 |    | 38 |    | 46 |

|    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 4  | 29 | 12 | 37 | 20 | 45 | 28 |
| 35 | 11 | 36 | 19 | 44 | 27 | 3  |
| 10 | 42 | 18 | 43 | 26 | 2  | 34 |
| 41 | 17 | 49 | 25 | 1  | 33 | 9  |
| 16 | 48 | 24 | 7  | 32 | 8  | 40 |
| 47 | 23 | 6  | 31 | 14 | 39 | 15 |
| 22 | 5  | 30 | 13 | 38 | 21 | 46 |

C

D

|   |   |  |   |  |    |  |    |  |    |  |    |  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|---|--|---|--|----|--|----|--|----|--|----|--|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--|----|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|   |   |  |   |  |    |  |    |  |    |  |    |  |    | a  | 7  |    |    |    |    |    |    |    |  |    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |   |  |   |  |    |  |    |  |    |  |    |  |    | g  | 6  |    | 14 | b  |    |    |    |    |  |    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |   |  |   |  |    |  |    |  |    |  |    |  |    | e  | 5  |    | 13 |    | 21 | f  |    |    |  |    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |   |  |   |  |    |  |    |  |    |  |    |  |    | a  | 4  |    | 12 |    | 20 |    | 28 | b  |  |    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |   |  |   |  |    |  |    |  |    |  |    |  |    | 3  |    | 11 |    | 19 |    | 27 |    | 35 |  |    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |   |  |   |  |    |  |    |  |    |  |    |  |    | 2  |    | 10 |    | 18 |    | 26 |    | 34 |  | 42 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 | 1 |  | 9 |  | 17 |  | 25 |  | 33 |  | 41 |  | 49 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |   |  |   |  |    |  |    |  |    |  |    |  |    | 8  |    | 16 |    | 24 |    | 32 |    | 40 |  | 48 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |   |  |   |  |    |  |    |  |    |  |    |  |    | 15 |    | 23 |    | 31 |    | 39 |    | 47 |  |    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |   |  |   |  |    |  |    |  |    |  |    |  |    | f  | 22 |    | 30 |    | 38 |    | 46 | d  |  |    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |   |  |   |  |    |  |    |  |    |  |    |  |    | 29 |    | 37 |    | 45 |    |    |    |    |  |    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |   |  |   |  |    |  |    |  |    |  |    |  |    | 36 |    | 44 |    |    |    |    |    |    |  |    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |   |  |   |  |    |  |    |  |    |  |    |  |    | 43 |    |    |    |    |    |    |    |    |  |    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

D diij

Ddij

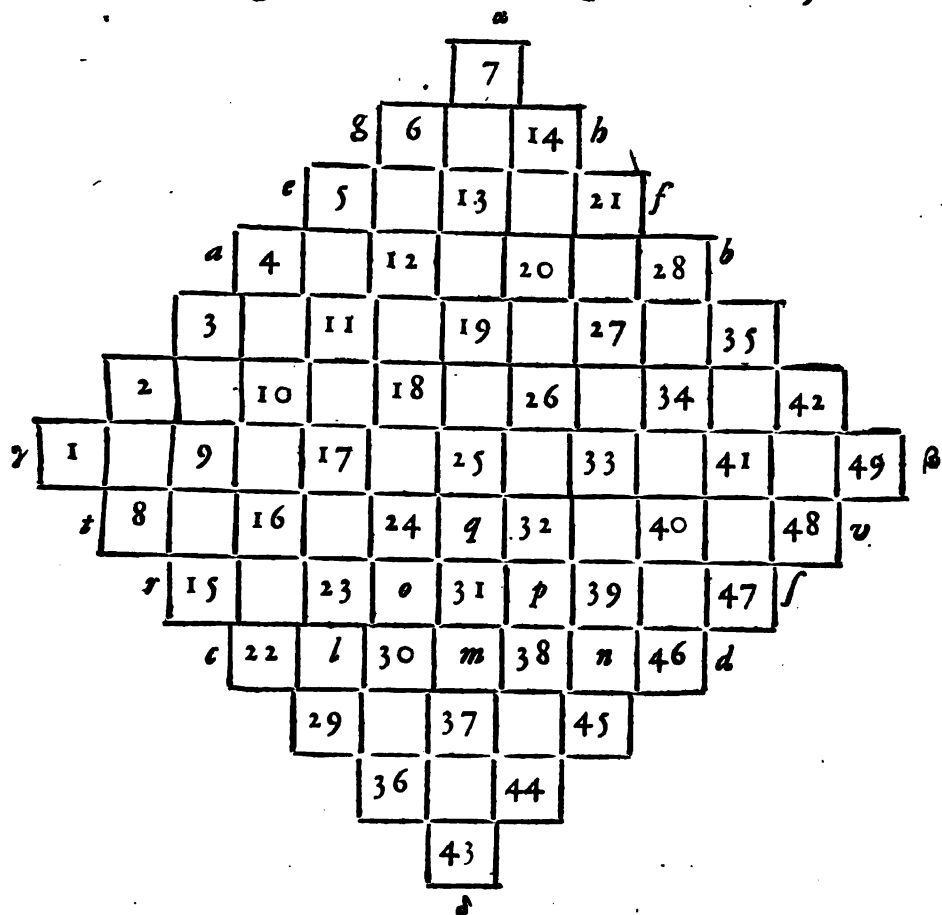
Ayant fait le quarré  $abcd$ , qui a sept cellules à chacun de ses côtez, j'éleve sur le côté  $ab$ , les cinq cellules  $ef$ , sçavoir deux moins que celles du quarré; puis sur ces cinq je mets les trois marquées  $gh$ ; puis sur ces trois j'en pose une marquée  $*$ : car leur nombre doit toujours diminuer de deux.

Semblablement sur chacun des autres côtez, comme sur  $ac$ , sur  $cd$ , & sur  $db$ , je place cinq cellules, puis trois & une. J'écris après les nombres de suite dans ces cellules, commençant par laquelle on voudra des quatre, qui sont comme la pointe, & qui sont les plus éloignées du quarré  $abcd$ , comme par  $\gamma$ , & de là tournant vers quelque côté qu'on voudra, ainsi qu'on voit en cette figure, (car il n'importe point par où on commence) en laquelle les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, vont de  $\gamma$  vers  $*$ . Puis on revient à la cellule extérieure voisine de  $\gamma$ , & tirant vers le même côté, on écrit les nombres suivans 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, & les autres nombres ensuite, comme la figure le pourra mieux représenter que le discours.

Les nombres étant ainsi placez, je considère ceux qui se rencontrent dans les cellules du quarré  $abcd$ , & les écris en la même disposition & situation dans les cellules du quarré  $ABCD$ , apprêté pour cet effet, ainsi qu'on peut voir ici.

Cela fait, on remplira les places vuides avec les nombres des cellules qui sont hors du quarré  $abcd$ , en prenant tout ce qui est dehors, sçavoir  $e, g, *, h, f$ , dans lesquelles cellules sont les nombres 5, 13, 21; 6, 14, 7; & les plaçant, ainsi disposez & tournez comme ils sont, sur le côté opposé  $cd$ , sçavoir les trois cellules de la ligne  $ef$ , où sont les nombres 5, 13, 21, sur les trois cellules vuides du côté  $c, d$ , marquées  $l, m, n$ .

Puis on mettra les deux cellules de  $g, h$ , où sont 6, 14, sur les deux vuides de  $r, f$ , marquées  $o, p$ , &c.



Enfin on mettra 7, qui est en la cellule *a*, en la cellule vuide, qui est au milieu de *tv*, marquée *q*, & ainsi les six nombres 5, 13, 21, 6, 14, 7, se trouveront dans le quarré en la même disposition, & tournez du même côté qu'ils étoient hors du quarré. Les autres côtez se rempliront de la même sorte; car on mettra les six nombres qui sont hors du quarré aux cellules *b*, *β*, *d*, sur le côté opposé *ac*, & sur les deux côtez prochains, tirant vers *β*, en sorte que 49, qui est en *β*, soit plus près du *β* que tous les autres, quand il sera placé.

A

|    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 4  |    | 12 |    | 20 |    | 28 |
|    | 11 |    | 19 |    | 27 |    |
| 10 |    | 18 |    | 26 |    | 34 |
|    | 17 |    | 25 |    | 33 |    |
| 16 |    | 24 |    | 32 |    | 40 |
|    | 23 |    | 31 |    | 39 |    |
| 22 |    | 30 |    | 38 |    | 46 |

C

B A

|    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 4  | 29 | 12 | 37 | 20 | 45 | 28 |
| 35 | 11 | 36 | 19 | 44 | 17 | 3  |
| 10 | 42 | 18 | 43 | 26 | 2  | 34 |
| 41 | 17 | 49 | 25 | 1  | 33 | 9  |
| 16 | 48 | 24 | 7  | 32 | 8  | 40 |
| 47 | 23 | 6  | 31 | 14 | 39 | 15 |
| 22 | 5  | 30 | 13 | 38 | 21 | 46 |

D C

De même les nombres de  $d, \delta, e$ , seront placez du côté de  $ab$ , tournans leur pointe en bas vers  $\delta$ , comme ils sont hors du quarré; & pareillement les nombres de  $a, \gamma, c$ , seront placez en la même façon sur  $b, \beta, d$ , & on aura le quarré magique parfait, ainsi qu'on peut voir ici.

On pourra user d'un autre moyen si on a peur de se méprendre, en voulant remplir les cellules vuides du quarré avec celles qui sont hors du quarré, qui sera comme s'en suit.

Depuis chaque cellule remplie qui est hors du quarré; on comptera en tirant vers le quarré autant de cellules tant pleines que vuides, que le quarré a de cellules à chaque côté, sçavoir 7 au quarré que nous avons pris pour exemple: ainsi comptant sept cellules depuis  $e$  où 5 est écrit, sans l'y comprendre, on rencontrera la cellule marquée  $l$ : & comptant de même sept cellules depuis celle où est le nombre 13, on rencontrera  $m$ , & comptant depuis  $f$ , on trouvera  $n$ . Il faudra donc remplir les trois cellules  $l, m, n$ , des nombres 5, 13, 21. Par la même raison le nombre de la cellule  $g$  viendra en  $o$ , & celui de  $h$  en  $p$ , & enfin celui de  $a$  en  $q$ .

Les



B

|          |          |          |    |          |    |          |          |
|----------|----------|----------|----|----------|----|----------|----------|
|          |          |          |    |          |    |          |          |
|          |          | <i>c</i> |    |          |    |          |          |
|          | <i>a</i> | 6        |    | <i>a</i> |    |          |          |
|          | <i>e</i> | 1        |    | 7        |    | <i>y</i> |          |
| <i>l</i> | 11       |          | 2  |          | 8  |          | <i>e</i> |
| <i>g</i> | 21       |          | 12 |          | 3  |          | 9        |
| 16       |          | 22       |    | 13       |    | 4        | 10       |
|          | 17       |          | 23 |          | 14 |          | 5        |
| <i>β</i> | 18       |          | 24 |          | 15 |          | <i>b</i> |
|          | <i>d</i> | 19       |    | 25       |    | <i>f</i> |          |
|          |          | 20       |    |          |    |          |          |
|          |          |          |    |          |    |          |          |

11 19 2 25 8

9 12 20 3 21

22 10 13 16 4

5 23 6 14 17

18 1 24 7 15

C

|          |          |          |    |          |    |          |          |
|----------|----------|----------|----|----------|----|----------|----------|
|          |          |          |    |          |    |          |          |
|          |          | <i>c</i> |    |          |    |          |          |
|          | <i>l</i> | 6        |    | <i>a</i> |    |          |          |
|          | <i>e</i> | 21       |    | 7        |    | <i>y</i> |          |
| <i>a</i> | 11       |          | 22 |          | 8  |          | <i>e</i> |
| <i>g</i> | 1        |          | 12 |          | 23 |          | 9        |
| 16       |          | 2        |    | 13       |    | 24       | 10       |
|          | 17       |          | 3  |          | 14 |          | 25       |
| <i>β</i> | 18       |          | 4  |          | 15 |          | <i>o</i> |
|          | <i>d</i> | 19       |    | 5        |    | <i>f</i> |          |
|          |          | 20       |    |          |    |          |          |
|          |          |          |    |          |    |          |          |

11 19 22 5 8

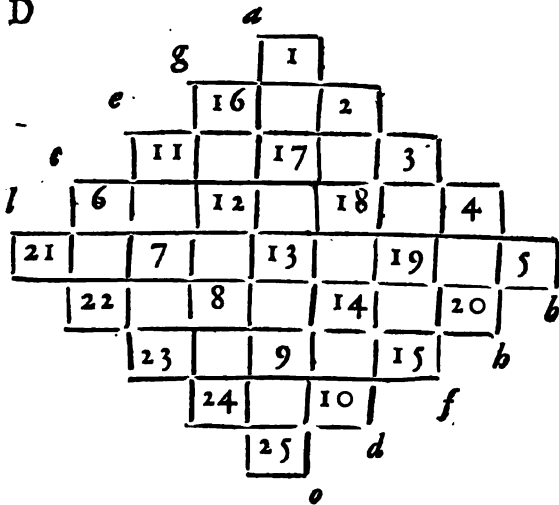
9 12 20 23 1

2 10 13 16 24

25 3 6 14 17

18 21 4 7 15

D



11 24 17 10 3  
4 12 25 18 6  
7 5 13 21 19  
20 8 1 14 22  
23 16 9 2 15

Le changement de ces figures est facile à comprendre par l'inspection de celles qui sont ici représentées, auxquelles on voit qu'on peut transporter les lignes des nombres ainsi qu'on veut, pourvu qu'on change en même sorte la ligne correspondante ou relative. Or les lignes relatives sont celles qui sont également éloignées de celles du milieu; ainsi la relative de  $ab$ , en la figure A, est  $lo$ , & celle de  $cd$ , est  $gh$ : de même celle de  $al$ , est  $bo$ , & celle de  $ac$ , est  $en$ .

Par exemple, la ligne correspondante de  $ab$ , est  $lo$ : & la correspondante de  $cd$ , est  $gh$ . Mais  $e$  n'a point de correspondante, & ainsi elle ne peut être ôtée de sa place.

On voit en la figure B, que la ligne  $cd$  tient le premier lieu, & par conséquent sa relative  $gh$  sera au dernier lieu; &  $ab$  étant au second lieu, sa relative  $lo$  sera au quatrième.

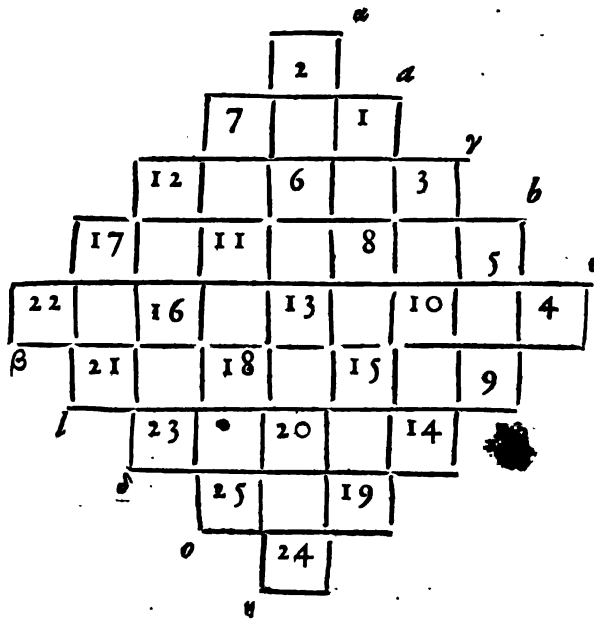
En C, on a transposé la dernière ligne de A, sçavoir  $lo$ , & on l'a mise au second lieu, & sa relative  $ab$  au quatrième lieu; le reste demeurant comme en B.



120 DES QUARREZ MAGIQUES.

En D on a placé  $gh$  au second lieu, & sa relative  $cd$  au quatrième, le reste demeurant comme en A.

On pourra ensuite transporter les lignes  $\alpha\beta, \epsilon\gamma, al, bo$ , & ainsi on auroit les figures suivantes par la transposition des lignes de la figure A; auxquelles transpositions on voit comme ci-devant, que la ligne  $\gamma\delta$ , qui est au milieu, ne se change point, parce qu'elle n'a point de relative,

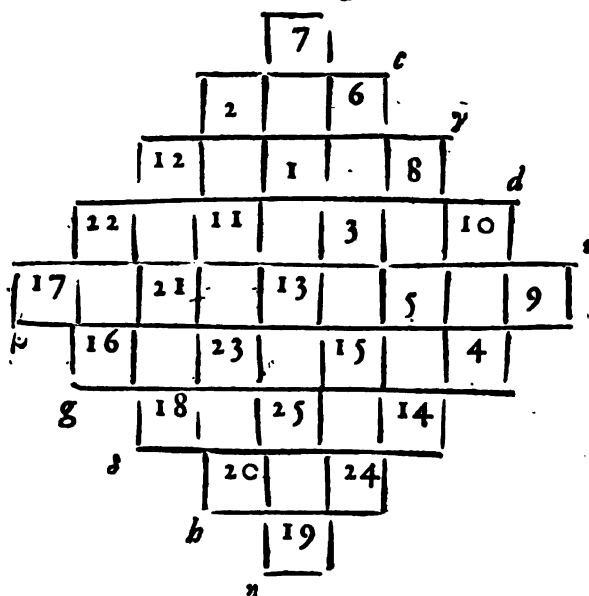


12 25 6 19 3  
 5 11 24 8 17  
 16 4 13 22 10  
 9 18 2 15 21  
 23 7 20 1 14

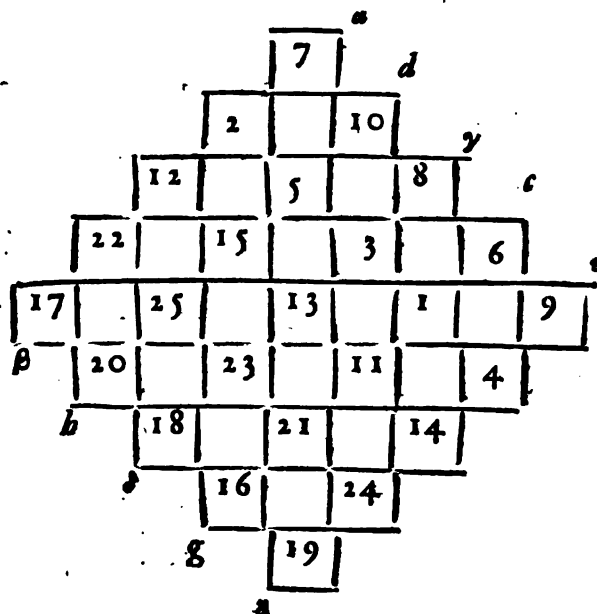


# 222 DES QUARREZ MAGIQUES.

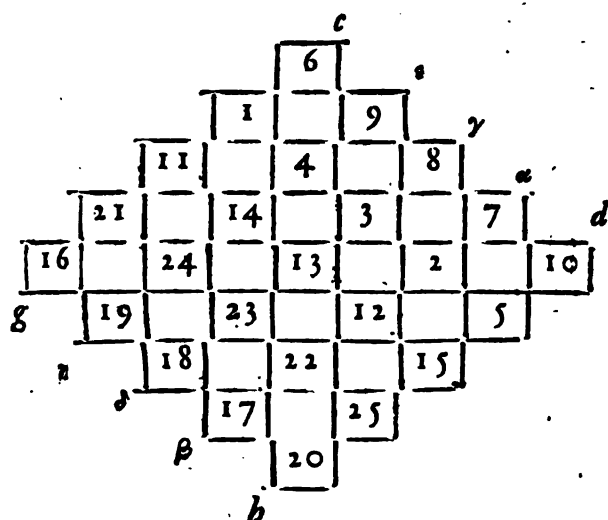
S'en suivent les transpositions des lignes *c*, *g*, *a*, *e*, &c. de la figure B. page 218.



12 20 1 24 8  
10 11 19 3 22  
21 9 13 17 5  
4 23 7 15 16  
18 2 25 6 14

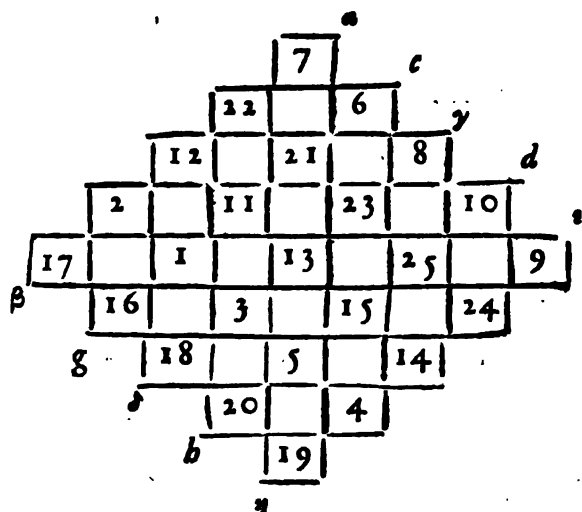


12 16 5 24 8  
6 15 19 3 22  
25 9 13 17 1  
4 23 7 11 20  
18 2 21 10 14



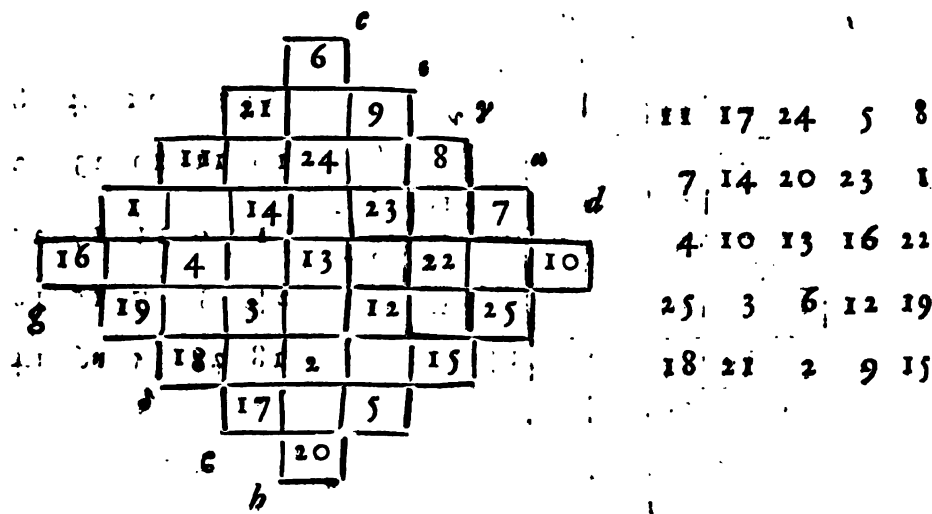
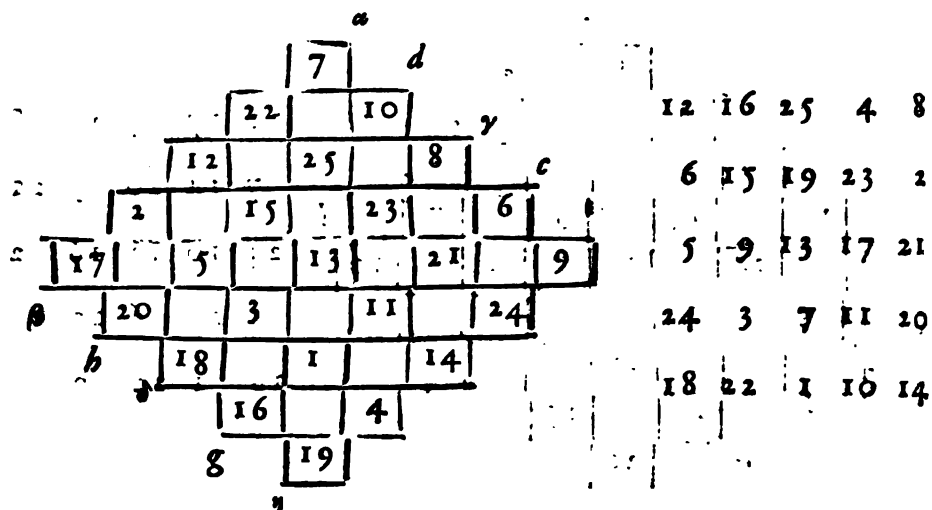
11 17 4 25 8  
 7 14 20 3 21  
 24 10 13 16 2  
 5 23 6 12 19  
 18 1 22 9 15

Voici ensuite les transpositions de la figure C, page 118.



12 20 21 4 8  
 10 11 19 23 2  
 1 9 13 17 25  
 24 3 7 15 16  
 18 22 5 6 14

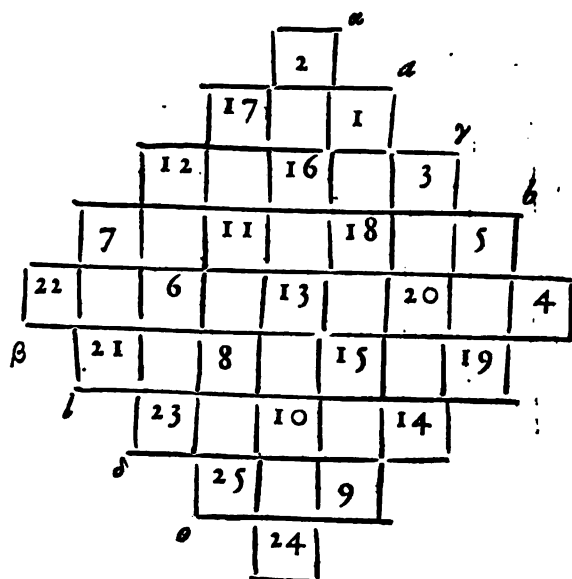
# 224 DES QUARREZ MAGIQUES.



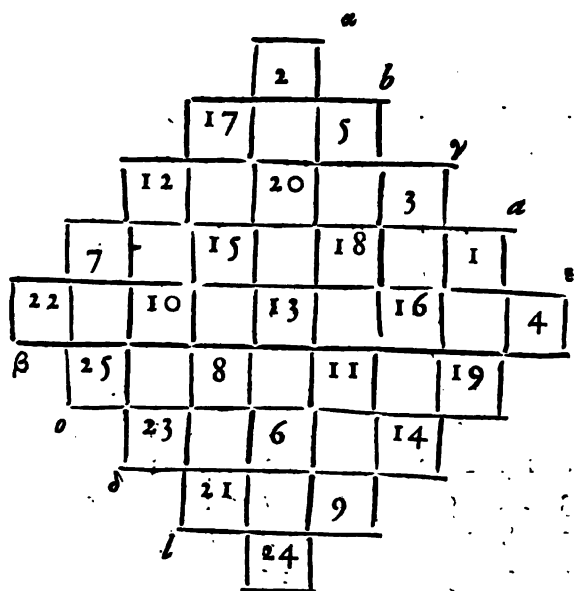
Enfin

# DES QUARREZ MAGIQUES. 225

Enfin voici les changemens de la figure D, cy-dessus.



12 25 16 9 3  
5 11 24 18 7  
6 4 13 22 20  
19 8 2 15 21  
23 17 10 1 14



12 21 20 9 3  
1 15 24 18 7  
10 4 13 22 16  
19 8 2 11 25  
23 17 6 5 14

|    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
|    |    |    |    | 1  |    |    |    |
|    |    |    | 16 |    | 4  |    |    |
|    |    | 11 |    | 19 |    | 3  |    |
|    | 6  |    | 14 |    | 18 |    | 2  |
| 21 |    | 9  |    | 13 |    | 17 | 5  |
|    | 24 |    | 8  |    | 12 |    | 20 |
|    |    | 23 |    | 7  |    | 15 |    |
|    |    |    | 22 |    | 10 |    |    |
|    |    |    |    | 25 |    |    |    |

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| 11 | 22 | 19 | 10 | 3  |
| 2  | 14 | 25 | 18 | 6  |
| 9  | 5  | 13 | 21 | 17 |
| 20 | 8  | 1  | 12 | 24 |
| 23 | 16 | 7  | 4  | 15 |

On peut encore varier ces Tables d'une autre maniere;  
par exemple la premiere Table de 5, qui est

|   |          |          |          |          |          |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|
|   | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | <i>d</i> | <i>e</i> |
|   | 11       | 24       | 7        | 20       | 3        |
|   | <i>a</i> | 4        | 12       | 25       | 8        |
| A | <i>y</i> | 17       | 5        | 13       | 21       |
|   | <i>e</i> | 10       | 18       | 1        | 14       |
|   |          | 23       | 6        | 19       | 2        |
|   | <i>f</i> |          |          |          |          |
|   |          | <i>g</i> | <i>h</i> | <i>i</i> | <i>p</i> |

|          |    |    |    |    |
|----------|----|----|----|----|
| 11       | 20 | 7  | 24 | 3  |
| <i>a</i> | 4  | 8  | 25 | 12 |
| B        | 17 | 21 | 13 | 5  |
| <i>e</i> | 10 | 14 | 1  | 18 |
|          | 23 | 2  | 19 | 6  |

|   |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|
|   | 11 | 24 | 7  | 20 | 3  |
|   | 10 | 18 | 1  | 14 | 22 |
| C | 17 | 5  | 13 | 21 | 9  |
|   | 4  | 12 | 25 | 8  | 16 |
|   | 23 | 6  | 19 | 2  | 15 |

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| 11 | 20 | 7  | 24 | 3  |
| 10 | 14 | 1  | 18 | 22 |
| D  | 17 | 21 | 13 | 5  |
|    | 4  | 8  | 25 | 12 |
|    | 23 | 2  | 19 | 6  |

Considerant que les nombres des diagonales également distans du milieu 13, & pris deux à deux, font toujours un même nombre, sçavoir le double de 13 : car de là s'ensuit que mettant la ligne *bg*, à la place de *dl*, on aura la Table suivante qui est encore selon les règles, vû que la ligne *bg* étant égale à *dl*, la transposition ne leur apporte aucun changement, non plus qu'aux lignes *ae*, *ae*, *gd*, &c. desquelles on n'ôte aucun nombre. *Voyez la figure B.*

Toute la difficulté se pourroit rencontrer aux diagonales, mais les nombres également distans du milieu 13, faisant tous une même somme ( ce qui arrive en toutes les tables faites comme il a été montré ci-devant ) on n'ôte rien à l'une des diagonales, qu'on n'en remette autant en nombres équivalens ; ainsi en la diagonale *ef*, de la table A, au lieu de 8, 18, qui font 26, on remettra 12, 14, qui font pareillement 26.

On pourra encore changer la figure A, en transposant la ligne *ae*, & la mettant en la place de *en*, comme on voit ci-dessus en la figure C.

Après on changera tout ensemble les lignes *bg*, & *ae*, de la figure A, mettant *bg* à la place de *dl*, & *ae*, à la place de *en* : ou ce qui est la même chose, mettant seulement *ae*, de la figure B, en la place de *en*, on aura la figure D.

On changera encore d'une autre sorte la figure A, en mettant *ep*, à la place de *dl*, & *af*, à la place de *bf*.

Comme aussi on pourra mettre *ae*, à la place de *ae*, & *fp*, à la place de *en*.

Enfin on fera tous ces changemens ensemble, ce qui donnera les trois figures suivantes ; en la premiere desquelles est le premier changement ; en la seconde le second ; & en la troisième les deux ensemble.





# 228 DES QUARREZ MAGIQUES.

| <i>Première.</i> | <i>Seconde.</i> | <i>Troisième.</i> |
|------------------|-----------------|-------------------|
| 24 11 7 3 20     | 4 12 25 8 16    | 12 4 25 16 8      |
| 12 4 25 16 8     | 11 24 7 20 3    | 24 11 7 3 20      |
| 5 17 13 9 21     | 17 5 13 21 9    | 5 17 13 9 21      |
| 18 10 1 22 14    | 23 6 19 2 15    | 6 23 19 15 2      |
| 6 23 19 15 2     | 10 18 1 14 22   | 18 10 1 22 14     |

Si on donne à la figure B, les trois changemens, on aura aussi pareillement trois autres figures, qui sont les suivantes.

|               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|
| 20 11 7 3 24  | 4 8 25 12 16  | 8 4 25 16 12  |
| 8 4 25 16 12  | 11 20 7 24 3  | 20 11 7 3 24  |
| 21 17 13 9 5  | 17 21 13 5 9  | 21 17 13 9 5  |
| 14 10 1 22 18 | 23 2 19 6 15  | 2 23 19 15 6  |
| 2 23 19 15 6  | 10 14 1 18 22 | 14 10 1 22 18 |

Pareils changemens étant observez en C, donneront

|               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|
| 24 11 7 3 20  | 10 18 1 14 22 | 18 10 1 22 14 |
| 18 10 1 22 14 | 11 24 7 20 3  | 24 11 7 3 20  |
| 5 17 13 9 21  | 17 5 13 21 9  | 5 17 13 9 21  |
| 12 4 25 16 8  | 23 6 19 2 15  | 6 23 19 15 2  |
| 6 23 19 15 2  | 4 12 25 8 16  | 12 4 25 16 8  |

De la figure D, on aura aussi les deux suivantes.

|               |               |
|---------------|---------------|
| 20 11 7 3 24  | 10 14 1 18 22 |
| 14 10 1 22 18 | 11 20 7 24 3  |
| 21 17 13 9 5  | 17 21 13 5 9  |
| 8 4 25 16 12  | 23 2 19 6 15  |
| 2 23 19 15 6  | 4 8 25 12 16  |

La troisième est semblable à une figure qui est ci-devant au haut de la page 224, & dont la première ligne est 12, 16, 25, 4, 8.

On aura donc par ce moyen quatorze transpositions de la figure marquée A, cy-dessus, qui avec la figure A, font quinze figures, & parce qu'ensuite de la figure A, il y a encore 15 autres figures, qui se font par le rombe ou chassis; comme on peut voir aux pages 218, & suivantes, si chacune d'elles donne autant de figures différentes, on auroit en tout 240 figures: mais il faut prendre garde s'il n'y aura point de figures semblables parmi ce nombre.

Voici des exemples de la figure B cy-dessus, que nous avons remise ici, afin de la comparer avec celles qui en proviennent.

11 19 2 25 8  
9 12 20 3 21  
22 10 13 16 4 B  
5 23 6 14 17  
18 1 24 7 15

|               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|
| 11 25 2 19 8  | 11 19 2 25 8  | 11 25 2 19 8  |
| 9 3 20 12 21  | 5 23 6 14 17  | 5 14 6 23 17  |
| 22 16 13 10 4 | 22 10 13 16 4 | 22 16 13 10 4 |
| 5 14 6 23 17  | 9 12 20 3 21  | 9 3 20 12 21  |
| 18 7 24 1 15  | 18 1 24 7 15  | 18 7 24 1 15  |

Ce sont là les premiers changemens, chacun desquels souffre encore d'autres transpositions, ainsi que l'on a pu remarquer en la figure A, & qui donnent les figures suivantes.

|               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|
| 9 12 20 3 21  | 19 11 2 8 25  | 1 18 24 15 7  |
| 11 19 2 25 8  | 12 9 20 21 3  | 12 9 20 21 3  |
| 22 10 13 16 4 | 10 22 13 4 16 | 10 22 13 4 16 |
| 18 1 24 7 15  | 23 5 6 17 14  | 23 5 6 17 14  |
| 5 23 6 14 17  | 1 18 24 15 7  | 19 11 2 8 25  |

# 230 DES QUARREZ MAGIQUES.

|               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|
| 9 3 20 12 21  | 25 11 2 8 19  | 3 9 20 21 12  |
| 11 25 2 19 8  | 3 9 20 21 12  | 25 11 2 8 19  |
| 22 16 13 10 4 | 16 22 13 4 10 | 16 22 13 4 10 |
| 18 7 24 1 15  | 14 5 6 17 23  | 7 18 24 15 1  |
| 5 14 6 23 17  | 7 18 24 15 1  | 14 5 6 17 23  |
| 5 23 6 14 17  |               | 23 5 6 17 14  |
| 11 19 2 25 8  |               | 19 11 2 8 25  |
| 22 10 13 16 4 |               | 10 22 13 4 16 |
| 18 1 24 7 15  |               | 1 18 24 15 7  |
| 2 12 20 3 21  |               | 12 9 20 21 3  |
| 5 14 6 23 17  | 25 11 2 8 19  |               |
| 11 25 2 19 8  | 14 5 6 17 23  |               |
| 22 16 13 10 4 | 16 22 13 4 10 |               |
| 18 7 24 1 15  | 3 9 20 21 12  |               |
| 9 3 20 12 21  | 7 18 24 15 1  |               |

Les deux places vuides montrent que les figures qui y devroient être sont semblables à quelques-unes des tables précédentes, & elles ont été omises pour éviter la répétition.

On peut donc voir que la table B, se varie en 14 façons elle comprise ; mais la précédente table A, se varie en 15 sortes, d'où s'enfuit qu'on n'aura pas 240 variations en tout, car il faudroit que chacune des tables eût autant de variations que la première, ce qui n'est pas, à cause que les mêmes reviennent.

On pourra faire les variations des autres tables ainsi qu'on a fait aux deux premières A, & B.

Il se trouve encore d'autres variations, qui ne sont pas si faciles que les précédentes ; sçavoir celles auxquelles le nombre 13, qui tient le milieu à toutes les tables précédentes, se trouve changé, & hors de cette place.

Mais toutes les tables précédentes ne peuvent pas souffrir cette variation, car entre les premières qui se font par les rombes ou chassis, il n'y a que la première marquée A, & la première de la page 431, & cette façon de changement, sçavoir de la figure A, ne fait pas que toutes sortes de nombres puissent occuper le milieu; mais on n'y pourra placer par cette voye que 7, 9, 17, 19.

Les autres figures qui sont ensuite des premières, donnent bien aussi quelques variations, qui néanmoins se peuvent faire sans elles en conséquence des changemens des deux premières marquées A, A.

Voici donc de quelle façon on changera la figure A.

|   |          |    |          |    |          |
|---|----------|----|----------|----|----------|
|   | <i>a</i> |    | <i>c</i> |    | <i>e</i> |
|   | 11       | 24 | 7        | 20 | 3        |
|   | 4        | 12 | 25       | 8  | 16       |
| A | 7        | 17 | 5        | 13 | 21       |
|   | 10       | 18 | 1        | 14 | 22       |
|   | 23       | 6  | 19       | 2  | 15       |
|   | <i>f</i> |    | <i>b</i> |    | <i>p</i> |

Cette figure se changera en quatre façons.

La première, mettant la ligne *ae*, à la place de *γδ*.

La seconde, mettant la ligne *ep*, à la place de *cb*.

La troisième, mettant la ligne *fp*, au lieu de *γδ*.

Et la quatrième, mettant la ligne *af*, au lieu de *cb*. Et on aura les quatre figures suivantes, la première desquelles a 7 au milieu, au lieu de 13, la seconde a 9 au milieu, la troisième a 19, & la quatrième 17.

|      |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 17   | 5  | 13 | 21 | 9  | 11 | 24 | 3  | 20 | 7  | 11 | 24 | 7  | 20 | 3  |
| 4    | 12 | 25 | 8  | 16 | 4  | 12 | 16 | 8  | 25 | 4  | 12 | 25 | 8  | 16 |
| H 11 | 24 | 7  | 20 | 3  | 17 | 5  | 9  | 21 | 13 | 23 | 6  | 19 | 2  | 15 |
| 10   | 18 | 1  | 14 | 22 | 10 | 18 | 22 | 14 | 1  | 10 | 18 | 1  | 14 | 22 |
| 23   | 6  | 19 | 2  | 15 | 23 | 6  | 15 | 2  | 19 | 17 | 5  | 13 | 21 | 9  |

On fera les mêmes changemens à cette autre figure marquée L, qui suit, comme on le peut voir : mais il faut montrer que ce changement-cy ne peut apporter aucune inégalité aux lignes, & par conséquent que les figures mêlées demeureront bonnes.

Parce qu'on transporte la ligne toute entière de sa place, il ne peut pas arriver d'inégalité aux lignes, & toute l'inégalité qui pourroit survenir par ce changement, seroit aux Diagonales. Mais le tout est bien récompensé ; car au premier changement on met 7 à la place de 13, d'où il arriveroit que chacune des diagonales auroit faute de 6, mais ce 6 est mis en chacune d'elles en changeant les lignes, car mettant la ligne *γδ*, de la Table A, à la place de *ae*, 17 occupera la place de 11, d'où vient que la diagonale *ap*, est augmentée de 6, ce qui récompense la diminution précédente de 7, au lieu de 13.

Pareillement 9 viendra à la place de 3, ce qui corrigera le défaut de la diagonale *ef*.

On vérifiera de la même sorte, que les autres changemens n'ôtent point les égalitez qui sont requises aux Tables.

La figure L, sera variée en la même manière ; mais il faudra prendre une des lignes du milieu, au lieu qu'on changeoit les extrêmes à la Table précédente, comme on peut voir ici,

|             |          |          |          |             |
|-------------|----------|----------|----------|-------------|
|             | <i>a</i> | <i>c</i> | <i>e</i> |             |
| 12          | 16       | 25       | 4        | 8           |
| <i>a</i> 6  | 15       | 19       | 23       | 2 <i>c</i>  |
| 7 5         | 9        | 13       | 17       | 21 <i>d</i> |
| <i>f</i> 24 | 3        | 7        | 11       | 20 <i>p</i> |
| 18          | 22       | 1        | 10       | 14          |
|             | <i>β</i> | <i>b</i> | <i>n</i> |             |

où on changera *ac*, en *ch*, pour avoir la premiere figure  
*en*, en *ch* pour la seconde *ac* en *γδ*, pour la troisieme, &  
 enfin *fp*, en *γδ*, pour la derniere, & on aura les figures  
 suivantes.

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 12 | 25 | 16 | 4  | 8  | 12 | 16 | 4  | 25 | 8  | 12 | 16 | 25 | 4  | 8  |
| 6  | 19 | 15 | 23 | 2  | 6  | 15 | 23 | 19 | 2  | 5  | 9  | 13 | 17 | 21 |
| 5  | 13 | 9  | 17 | 21 | 5  | 9  | 17 | 13 | 21 | 6  | 15 | 19 | 23 | 2  |
| 24 | 7  | 3  | 11 | 20 | 24 | 3  | 11 | 7  | 20 | 24 | 3  | 7  | 11 | 20 |
| 18 | 1  | 22 | 10 | 14 | 18 | 22 | 10 | 1  | 14 | 18 | 22 | 1  | 10 | 14 |

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 12 | 16 | 25 | 4  | 8  | 12 | 16 | 25 | 4  | 8  |
| 6  | 15 | 19 | 23 | 2  | 6  | 15 | 19 | 23 | 2  |
| 24 | 3  | 7  | 11 | 20 | 24 | 3  | 7  | 11 | 20 |
| 5  | 9  | 13 | 17 | 21 | 5  | 9  | 13 | 17 | 21 |
| 18 | 22 | 1  | 10 | 14 | 18 | 22 | 1  | 10 | 14 |

Chacune de ces figures, & des quatre autres précédentes qui sont en l'autre page, souffrent encore plusieurs sortes de changemens, dont on donnera ici quelques exemples.

Premierement on leur peut attribuer les mêmes changemens qu'à la figure dont elles proviennent: ainsi la premiere figure de celles qui viennent de A, sçavoir celle qui est ici marquée H, souffre les mêmes variations que A, car on pourra transposer *af*, & *ep*, en *ch*, & pareillement *ac*, & *fp* en *γδ*, mais entre ces Tables il y en aura une semblable à la Table A: on mettra seulement ici celles qui

|   |    |    |    |    |    |   |
|---|----|----|----|----|----|---|
|   |    |    |    |    |    |   |
|   | 17 | 5  | 13 | 21 | 9  |   |
|   | 4  | 12 | 25 | 8  | 16 |   |
| H | 7  | 11 | 24 | 7  | 20 | 3 |
|   | 10 | 18 | 1  | 14 | 22 | 7 |
|   | 23 | 6  | 19 | 2  | 15 |   |
| f |    |    | b  |    | p  |   |

ont un nouveau nombre au milieu ; car il n'y a aucun nombre impair, qui ne puisse tenir le milieu de la figure, comme l'on voit par les suivantes.

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 8  | 17 | 5  | 13 | 21 | 9  | 17 | 5  | 9  | 21 | 13 |
| 12 | 4  | 12 | 25 | 8  | 16 | 4  | 12 | 16 | 8  | 25 |
|    | 7  | 24 | 11 | 20 | 3  | 11 | 24 | 3  | 20 | 7  |
|    | 1  | 18 | 10 | 14 | 22 | 10 | 18 | 22 | 14 | 1  |
|    | 19 | 6  | 23 | 2  | 15 | 23 | 6  | 15 | 2  | 19 |

De ces deux on pourra aussi faire les suivantes.

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 13 | 5  | 17 | 21 | 9  | 17 | 5  | 9  | 21 | 13 |
| 25 | 12 | 4  | 8  | 16 | 4  | 12 | 16 | 8  | 25 |
| 19 | 6  | 23 | 2  | 15 | 23 | 6  | 15 | 2  | 19 |
| 1  | 18 | 10 | 14 | 22 | 10 | 18 | 22 | 14 | 1  |
| 7  | 24 | 11 | 20 | 3  | 11 | 24 | 3  | 20 | 7  |

Il y a encore une autre transposition de la figure H cy-devant, sçavoir en mettant 11, à la place de 7<sup>d</sup>, comme on voit ici.

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| 17 | 5  | 13 | 21 | 9  |
| 4  | 12 | 25 | 8  | 16 |
| 10 | 18 | 1  | 14 | 22 |
| 11 | 24 | 7  | 20 | 3  |
| 23 | 6  | 19 | 2  | 15 |

Et changeant en cette même sorte les trois autres figures de la page 232, on aura les suivantes.

# DES QUARREZ MAGIQUES. 235

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 11 | 3  | 24 | 20 | 7  | 11 | 24 | 7  | 20 | 3  | 7  | 24 | 20 | 11 | 3  |
| 4  | 16 | 12 | 8  | 25 | 23 | 6  | 19 | 2  | 15 | 25 | 12 | 8  | 4  | 16 |
| 17 | 9  | 5  | 21 | 13 | 4  | 12 | 25 | 8  | 16 | 13 | 5  | 21 | 17 | 9  |
| 10 | 22 | 18 | 14 | 1  | 10 | 18 | 1  | 14 | 22 | 1  | 18 | 14 | 10 | 22 |
| 23 | 15 | 6  | 2  | 19 | 17 | 5  | 13 | 21 | 9  | 19 | 6  | 2  | 23 | 15 |

On a donc ici des exemples de tous les nombres impairs qui tiennent le milieu des figures; pour ce qui est des nombres pairs, il y auroit plus de difficulté à leur faire tenir le milieu de la figure, & peut-être il est impossible.

Ces figures se varient encore d'une autre sorte, dont il a été fait mention cy-devant: par exemple, la figure H se

|   |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|
| a |    |    |    | b  |    |
|   | 17 | 5  | 13 | 21 | 9  |
|   | 4  | 12 | 25 | 8  | 16 |
|   | 11 | 24 | 7  | 20 | 3  |
| f | 10 | 18 | 1  | 14 | 22 |
|   | 23 | 6  | 19 | 2  | 15 |
| c |    |    |    | d  |    |

variera, mettant *ab*, en la place de *cd*, comme aussi *ac* en la place de *bd*: & enfin, assemblant ces deux variations, sçavoir, transposant tout ensemble *ab*, en *cd*, & *ac* en *bd*, on aura les trois Tables suivantes.

|   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
|   | 9  | 5  | 13 | 21 | 17 | 23 | 6  | 19 | 2  | 15 | 15 | 6  | 19 | 2  | 23 |
|   | 16 | 12 | 25 | 8  | 4  | 4  | 12 | 25 | 8  | 16 | 16 | 12 | 25 | 8  | 4  |
| F | 3  | 24 | 7  | 20 | 11 | 11 | 24 | 7  | 20 | 3  | 3  | 24 | 7  | 20 | 11 |
|   | 22 | 18 | 1  | 14 | 10 | 10 | 18 | 1  | 14 | 22 | 22 | 18 | 1  | 14 | 10 |
|   | 15 | 6  | 19 | 2  | 23 | 17 | 5  | 13 | 21 | 9  | 9  | 5  | 13 | 21 | 17 |

Les autres Tables peuvent souffrir les mêmes variations, qui seroient trop longues à déduire, & cela fera une fort grande quantité de Tables différentes: & celles-cy suffiront pour faire voir de quelle façon elles se pourront trouver.



# 336 DES QUARRÉS MAGIQUES.

On pourra encore faire d'autres sortes de transpositions; par exemple, de la figure F, mettant la ligne 9, 5, 13, 21, 17, à la place de 16, 12, 25, 8, 4, parce que 17, & 8, qui sont dans la diagonale, sont égaux à 21, & 4. Et pareillement de l'autre côté 16, & 5, sont égaux à 9 & 12, & pareillement on pourra mettre la ligne 3, 24, 7, 20, 11, à la place de 22, 18, 1, 14, 10, parce que 14, & 7, en la diagonale sont égaux à 20, & 1; & pareillement 7, & 18, sont égaux à 24, & 1.

Comme aussi en la figure H, on pourroit transporter la ligne 17, 5, 13, 21, 9, à la place de 10, 18, 1, 14, 22, parce que les nombres de la diagonale 9, & 18, sont égaux à 5, 22, & les deux 17, 14, à 21, & 10. on peut voir ces deux Tables transposées cy-après, & cette transposition se peut faire toutes fois & quantes qu'on peut choisir un quarré dans la figure qui ait deux de ses angles dans la diagonale de la figure, & auquel les nombres des angles opposez soient égaux à ceux des deux autres angles, & que la même chose arrive au quarré pris dans les mêmes lignes qui bornent le quarré dans l'autre côté de la figure.

Ainsi en la figure H, je choisis un quarré dont les angles sont 5, 9, 22, 18, dont deux, sçavoir 18 & 9, sont dans la diagonale, & les angles opposez, comme 18 & 9, sont ensemble égaux aux deux autres 22 & 5; & si on prend le quarré qui est de l'autre côté de la figure entre les mêmes lignes *ab*, & *fg*, dont les angles sont 17, 21, 14, 10, on trouvera de même que les angles opposez 17, 14, sont égaux aux deux autres 10, 21.

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 16 | 12 | 25 | 8  | 4  | 9  | 5  | 13 | 21 | 17 | 10 | 18 | 1  | 14 | 22 |
| 9  | 5  | 13 | 21 | 17 | 16 | 12 | 25 | 8  | 4  | 4  | 12 | 25 | 8  | 16 |
| 3  | 24 | 7  | 20 | 11 | 22 | 18 | 1  | 14 | 10 | 11 | 24 | 7  | 20 | 3  |
| 22 | 18 | 1  | 14 | 10 | 3  | 24 | 7  | 20 | 11 | 17 | 5  | 13 | 21 | 9  |
| 15 | 6  | 19 | 2  | 23 | 15 | 6  | 19 | 2  | 23 | 23 | 6  | 19 | 2  | 15 |

## DES QUARREZ MAGIQUES. 237

Les Tables, dont le côté est pair, se trouveront d'une autre façon, laquelle est aussi commune avec les impairs: mais premierement nous donnerons celle de 16, qui a 4 de côté.

Il faut disposer les 16 nombres selon leur ordre naturel, comme on voit ici.

1      2      3      4

5      6      7      8

9      10      11      12

13      14      15      16

Puis on marque les diagonales avec des points, afin de remarquer les nombres qui s'y trouvent, car les mêmes seront aussi dans les diagonales de la Table, en même situation qu'ils sont ici. Je mets donc à part les nombres qui composent les diagonales en la même disposition, comme il est ici marqué.

1                      4

6      7

10      11

13                      16

Et pour achever la Table on met les nombres qui sont hors des diagonales, vers leurs opposez en croix; sçavoir 14 à la place de 3, 15 à la place de 2, 12 à la place de 5, & 8 à la place 9, & on aura la figure suivante.

1      15      14      4

12      6      7      9

8      10      11      5

13      3      2      16

H h ü j

*M E T H O D E G E N E R A L E  
pour faire les Tables Magiques.*

**P**Ar la méthode suivante on pourra faire toutes sortes de Tables tant paires qu'impaires, mais il faut remarquer une propriété particulière des Tables faites par cette méthode, qui est que si on ôte l'enceinte de quelqu'une de ces Tables, celle qui restera ne laissera pas d'avoir encore toutes ses lignes égales; & si de ce reste on ôte encore une enceinte, le reste aura encore ses lignes égales, & ainsi jusqu'à ce que la dernière Table qui reste n'ait plus que 4 de côté si elle est paire; & 3 de côté si elle est impaire, car il n'y a point de Table de 4 de côté, dont ôtant une enceinte, le reste ait ses lignes égales.

Exemple, Que la Table ait 12 de chaque côté, si on ôte la première enceinte, il restera une Table qui aura 10 à chacun de ses côtes, & qui aura encore ses lignes égales. Et ôtant une enceinte de cette Table de 10, on aura une Table de 8 qui aura encore toutes ses lignes égales.

Et si de cette Table de 8 on ôte encore une enceinte, il restera une Table de 6.

Enfin si on ôte une enceinte de cette Table de 6, il restera une Table de 4, qui aura encore les conditions requises.

Et ainsi ayant une Table de 12, on en aura aussi une de 10, une de 8, une de 6, & de 4.

On trouve ensuite des moyens pour faire qu'il n'y ait qu'une seule Table qui soit bonne, & qu'ôtant les enceintes, celle qui reste ne soit plus selon les règles; ou si l'on veut, telle Table qu'on voudra sera bonne, & les autres ne vaudront rien. Ainsi ayant une Table de 12, on pourra faire qu'ôtant quelques enceintes qu'on voudra, le reste ne soit pas bon; ou bien que les Tables de 8 & de 4 qui y sont contenues, seront bonnes, & les autres non; & cela se peut faire en toutes les manières qu'on voudra,

Mais parce que les exemples apprendront mieux la maniere de faire ces Tables, que tous les préceptes qu'on en pourroit donner, il sera plus à propos de faire connoître ceux-ci par le moyen de ceux-là.

*Exemple premier d'une Table de 6.*

Il faut en premier lieu disposer les nombres dont on doit remplir les 36 cellules de la Table, selon leur ordre naturel, & en faire deux lignes, qui seront l'une dessus l'autre, en telle sorte que les nombres des deux lignes qui sont l'une sur l'autre fassent 37, sçavoir 1, plus que le plus grand nombre, qui est 36, comme on les voit ici; & les nombres de ces deux lignes se nommeront relatifs: ainsi 35 est relatif de 2, 34 de 3, & ainsi des autres: de même 6 sera relatif de 31, 7 de 30, &c.

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 36 | 35 | 34 | 33 | 32 | 31 | 30 | 29 | 28 | 27 | 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 |

Et cela se doit observer en toutes Tables, afin de pouvoir avec plus de facilité choisir les nombres dont on a besoin.

Après on prendra seize nombres, sçavoir huit de la premiere ligne, & les huit correspondans ou relatifs dans la seconde. Il sera bon que les huit nombres soient de suite ou qu'ils ayent entre eux une difference égale, quoiqu'il suffise que quatre de ces nombres ayent une même difference, & les quatre autres aussi, & ensuite on prendra leur relatifs; car en cette façon de construire les Tables, il faut être soigneux de ne prendre jamais un nombre, qu'on ne se serve aussi de son relatif, autrement on ne pourroit pas faire une Table par cette méthode.

Je prens donc les huit premiers nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, & leurs relatifs 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, qui sont 16 nombres, dont je fais une Table de 4, ainsi qu'il a été enseigné à la page 237 du Traité précé-

240 DES QUARREZ MAGIQUES.  
 dent ; sçavoir écrivant les seize nombres , comme on voit  
 ici.

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  |
| 5  | 6  | 7  | 8  |
| 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 |

Puis retenant les diagonales , comme l'on voit dans la  
 figure suivante.

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  |    |    | 4  |
|    | 6  | 7  |    |
|    | 30 | 31 |    |
| 33 |    |    | 36 |

Et enfin remplissant les espaces vuides , en y mettant  
 les nombres opposez en croix ; sçavoir 35 à la place de 1 ,  
 & 2 à la place de 35 , puis 34 à la place de 3 , & ainsi des  
 autres , on aura la figure disposée comme il suit.

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 35 | 34 | 4  |
| 32 | 6  | 7  | 29 |
| 8  | 30 | 31 | 5  |
| 33 | 3  | 2  | 36 |

Ces nombres étant employez , je les marque par quel-  
 que signe , comme on peut voir en la page précédente , où  
 tous les trente - six nombres sont de suite en deux lignes ,  
 afin qu'on puisse connoître ceux qui ont déjà servi à faire  
 la Table intérieure , & qu'on ne prenne point deux fois  
 un même nombre.

Cela fait , je choisis deux nombres de ceux qui restent ,  
 pour mettre près des angles de la figure de quatre , sça-  
 voir

voir en continuation de la diagonale, qui serviront d'angles à l'autre enceinte extérieure.

On prendra, par exemple, 9 & 10 pour les deux angles, ou extrémitez d'une même ligne.

Ayant mis les nombres 9 & 10 aux angles prochains, & non pas oppoſez, je mets leurs complémens aux angles oppoſez, comme on voit ici, ſçavoir 28 à l'oppoſite de 9, & 27 à l'oppoſite de 10.

|    |    |    |    |    |  |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|--|----|----|----|----|----|----|
| 9  |    |    |    | 10 |  | 9  | 25 | 26 | 23 | 18 | 10 |
|    | 1  | 35 | 34 | 4  |  | 16 | 1  | 35 | 34 | 4  | 21 |
|    | 32 | 6  | 7  | 29 |  | 20 | 32 | 6  | 7  | 29 | 17 |
|    | 8  | 30 | 31 | 5  |  | 24 | 8  | 30 | 31 | 5  | 15 |
|    | 33 | 3  | 2  | 36 |  | 15 | 33 | 3  | 2  | 36 | 22 |
| 27 |    |    |    | 28 |  | 27 | 12 | 11 | 14 | 19 | 28 |

Cela fait , je considère ce qu'il faut dans deux lignes prochaines de la dernière enceinte pour les achever ; car lors qu'on a deux lignes prochaines , les complémens des nombres donnent les opposez. Je trouve que dans la ligne 9 , 10 , il faut 92 pour parfaire la ligne ; car chaque ligne doit être de 111 ; ce qui se trouve multipliant la somme des deux nombres extrêmes de la figure , qui sont 1 , & 36 , dont la somme est 37 , par la moitié des nombres qui sont en chaque ligne , sçavoir par 3 .

Et de ce produit 111, ôtant 19, qui est la somme de 9 & 10, il restera 92 pour la somme des quatre nombres qui doivent être mis entre 9 & 10.

De même, si de 111 j'ôte 38, qui est la somme de 28 & 10, qui sont aux angles qui bornent la ligne 10, 28, il restera 73 pour les quatre nombres qui manquent à la ligne 10, 28.

Il faut donc chercher dans les nombres qui restent, quatre nombres, dont la somme soit 92 ; & quatre autres dont la somme soit 73 , à telle condition toutefois, qu'après avoir pris un nombre , on ne se serve plus de son com-

plément dans ces deux premières lignes, parce que ce complément doit être mis dans la ligne opposée; ce qui doit toujours être exactement observé.

Pour venir plus facilement à bout de cela, l'on écrira les nombres qui restent de suite, & leurs complémens au-dessous, comme il suit.

|    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 |
|    |    |    |    |    |    |    |    |

Cela fait, je cherche quatre nombres dans ces deux lignes qui fassent 92: je trouve 26, 25, 23, 18: je les marque au-dessous avec de petites lignes, afin de ne les plus reprendre, ni leurs complémens aussi. Après, je choisis quatre nombres dans les huit qui restent, qui fassent 73; mais en choisissant les deux premiers, il faut faire en sorte qu'il ne reste pas 37 pour les deux autres, ainsi les deux nombres ne pourront pas être 16, & 20, qui font 36, parce qu'il resteroit 37 pour les deux autres nombres, ce qui ne se peut faire que par deux relatifs, comme par 15, 22, & 13, 24, ce qui est contre les regles; c'est pourquoi il faudra prendre deux nombres qui fassent plus ou moins de 36, comme 21 & 17, qui font 38, & reste 35. Pour achever 73, on fera 35 avec 13, & 22: on aura donc les quatre nombres 21, 17, 13, 22; qu'on mettra entre 10, & 28, & il n'importe pas en quel ordre, pourvu que vis-à-vis d'eux en la même ligne de la colonne opposée; savoir entre 9, & 27, on mette leurs complémens selon le même ordre, comme on voit en la figure qui est achevée en la page précédente.

De même, je mets entre 9 & 10 les quatre nombres qui ont été premièrement trouvez, savoir 26, 25, 23, 18; & vis-à-vis en la ligne opposée, & entre 27, 28, je mets leurs complémens 11, 12, 14, 19. Et ainsi on aura la figure parfaite.

*Second exemple de la Table de 6.*

Il y a une chose à observer quand les nombres de la Table intérieure de quatre sont tous de suite, & que les vingt de l'enceinte extérieure sont les dix premiers, & leurs complémens; sçavoir,

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| 36 | 35 | 34 | 33 | 32 | 31 | 30 | 29 | 28 | 27 |

En ce cas il ne faudra pas prendre pour les angles prochains, deux nombres qui soient en quotité pairs ou impairs, sçavoir en cet exemple deux pairs ou deux impairs; comme 2, 4, ou 3, 5, ou 5, 9, & autres semblables, autrement on ne pourroit pas achever la Table, parce qu'il arrive toujours en faisant la seconde ligne, que la somme des nombres est paire quand elle doit être impaire, & au contraire, la raison est qu'en la seconde ligne il faut toujours prendre deux des grands nombres, & deux des moindres, à cause qu'ils sont beaucoup differens l'un de l'autre.

Voici une Table qui a ces nombres à son enceinte extérieure.

|   |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
|   | 1  | 8  | 31 | 32 | 35 | 4  |    |    |     |
|   | 27 | 11 | 25 | 24 | 14 | 10 |    |    |     |
|   | 34 | 22 | 16 | 17 | 19 | 3  |    |    |     |
|   | 9  | 18 | 20 | 21 | 15 | 28 |    |    |     |
|   | 7  | 23 | 13 | 12 | 26 | 30 |    |    |     |
|   | 33 | 29 | 6  | 5  | 2  | 36 |    |    |     |
| 1 | 2  | 3  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 106 |
|   |    |    |    |    |    |    |    |    | 71  |
|   | 35 | 34 | 32 | 31 | 30 | 29 | 28 | 27 |     |

Il arrive assez souvent en ces petites figures, à cause du peu de nombres qu'il y a en chaque ligne, qu'ayant choisi



les quatre pour la première ligne, ceux de la seconde ne peuvent pas faire la somme qui seroit nécessaire ; comme en cet exemple, si entre 1 & 4 on mettoit 35, 32, 30, 9, qui ensemble font 106, ainsi qu'il est requis, il resteroit 3, 6, 8, 10, & leurs complémens 34, 31, 29, 27, qu'on ne peut pas employer pour faire 71, qui est la somme que doivent avoir les quatre nombres qu'on doit mettre entre 4 & 36, c'est pourquoi on changera les quatre de la première ligne qui sont entre les angles, & au lieu de 35, 32, 30, 9, on en prendra d'autres équivalens, par exemple, 35, 32, 29, 10. Mais parce que les nombres qui restent pour l'autre ligne ne peuvent pas encore faire 71, il les faudra encore changer, & prendre 35, 31, 30, 10, & ceux qui resteront pourront faire 71, comme l'on voit assemblant les quatre nombres, 3, 8, 28, 32.

Que si après avoir changé les lignes en diverses manières, on ne pouvoit trouver son compte, il faudroit avoir recours aux angles & les changer, ou du moins l'un d'eux, & son complément, tant que la difficulté cesse.

Enfin cela dépend plus de l'industrie de celui qui cherche, que non pas de certaine règle infallible qu'on pourroit donner pour cet effet, laquelle se peut bien trouver pour les impairs, comme il a été montré cy-devant, mais la même chose ne succede pas aux Tables paires. Voici pourtant une méthode qui facilitera beaucoup cette recherche.

Ayant écrit les huit nombres entre les deux qui sont aux angles, comme on voit au bas de la page 243, on mettra ensuite la valeur des quatre nombres qui doivent être entre 1 & 4, qui est 106, parce qu'ôtant 5, sçavoir la somme de 4 & 1, de 111, qui est la valeur de chaque ligne, il reste 106 ; on mettra aussi la valeur des quatre nombres qui doivent être entre 4 & 36, qui est 71 ; je cherche après quatre nombres dans les seize des deux lignes, qui valent 106, à telle condition qu'après avoir

# DES QUARREZ MAGIQUES. 245

pris un des nombres, on ne prenne pas aussi son complément, & commençant par les deux plus grands 35 & 34, qui ensemble valent 69, il faut ôter cette somme de 106, reste 37; qui étant la somme des deux relatifs, ne peut pas être employée dans ces Tables. Il faut donc prendre deux autres nombres, sçavoir 35 & 32, la somme est 67, qui ôlée de 106, reste 39, on fera 39 avec 31, 8: on aura donc les quatre nombres 35, 32, 31, 8, qu'il faudra mettre entre 1 & 4 de la Table A. Il faut après remplir la ligne 4, 36, avec quatre des nombres qui restent, qui sont 3, 7, 9, 10, & leurs complémens 34, 30, 28, 27.

Voici comme on y procédera. Il faut assembler les quatre moindres nombres, sçavoir 3, 7, 9, 10: la somme est 29, qui ôlée de 71 qui est la valeur de quatre nombres, qui doivent être mis entre 4 & 36 de la table A, reste 42.

| A  |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  |    |    | 4  |
| 11 | 25 | 24 | 14 |
| 22 | 16 | 17 | 19 |
| 18 | 20 | 21 | 15 |
| 23 | 13 | 12 | 26 |
| 33 |    |    | 36 |

Il faut voir si on pourra faire 42 avec la différence qui est entre les quatre nombres, 3, 7, 9, 10, & leurs complémens 34, 30, 28, 27; comme on peut voir en cette figure, & leur différence entre deux; on trouve 13 & 19.

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 3  | 7  | 9  | 10 |
| 21 | 23 | 19 | 17 |
| 34 | 30 | 28 | 27 |

différences entre 7, 30, & 9, 28, qui font 42. On prendra donc 3, 30, 28, 10, pour les quatre nombres qui doivent être mis entre 4, 36, qui sont aux extrémités.

# 246 DES QUARREZ MAGIQUES.

de la dernière colonne, car puisque les quatre nombres 3, 7, 9, 10, manquent de 42 pour faire 71, qui est la valeur de quatre nombres qui doivent être entre 4 & 36, & que 30 & 28 surpassent 7 & 9 de 42, il faudra prendre 30 & 28, au lieu de 7 & 9; on aura donc la table accomplie, comme on la voit ici, mettant les quatre nombres

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 35 | 32 | 31 | 8  | 4  |
| 34 | 11 | 25 | 24 | 14 | 3  |
| 7  | 22 | 16 | 17 | 19 | 30 |
| 9  | 18 | 20 | 21 | 15 | 28 |
| 27 | 23 | 13 | 12 | 26 | 10 |
| 33 | 2  | 5  | 6  | 29 | 36 |

ci-devant trouvez, sçavoir 35, 32, 31, 8, entre 1 & 4, & les complémens de ces nombres 2, 5, 6, 29, en la même colonne, & vis-à-vis des précédens en la ligne opposée, avec les deux nombres 33, complément de 4 & 36, complément de 1, qu'il faut mettre aux angles en même diagonale: puis entre 4 & 36 on mettra les quatre autres nombres 3, 30, 28, 10, & leurs relatifs 34, 7, 9, 27, vis-à-vis des précédens dans la colonne opposée, & à l'autre extrémité de la même ligne.

Si on avoit pris 1, 3, pour les nombres qui doivent être aux angles, ou aux extrémités d'une même ligne, on ne pourroit pas parfaire cette ligne, comme il a été remarqué ci-devant. La raison est, qu'on est obligé pour

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1  | 2  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | [3 | 107 |
| 35 | 33 | 32 | 31 | 30 | 29 | 28 | 27 |    |    | 72  |
|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |

faire 107, de prendre trois nombres de la ligne inférieure, où sont les plus grands nombres, & un de la supérieure, parce que les quatre moindres de la ligne inférieure,

ſçavoir 27, 28, 29, 30, font plus de 107, encore que 107 ſoit le plus grand nombre que puiſſent avoir les quatre nombres, en prenant des nombres ſemblables pour les angles, ſçavoir tous deux pairs ou impairs, & ſi on n'en prenoit que deux dans la ligne inférieure, & deux dans la ſupérieure, ils ne ſeroient pas aſſez grands; car encore que l'on mît aux angles les plus grands nombres de la ligne ſupérieure, ſçavoir 8 & 10 qui ſont ſemblables en parité ou imparité, étant tous deux pairs, il reſteroit 93 pour la ſomme des quatre nombres qui devroient être entre-deux. Or prenant les deux plus grands nombres de la ligne inférieure, & les deux plus grands de la ſupérieure, ſçavoir 35, 33, 7, 9, ils feront moins de 93. Il faut donc prendre trois nombres de la ligne inférieure, & un de la ſupérieure.

Or après avoir pris ces quatre nombres qui faſſent 107, ou autre nombre requis: Par exemple, après avoir pris 35, 33, 32, 7, qui font 107, on ne pourra jamais faire 72, qui eſt la ſomme des nombres qui doivent faire l'autre ligne, avec quatre des nombres qui reſtent, car prenant deux de ces nombres dans la ligne inférieure, & deux dans la ſupérieure, comme il eſt néceſſaire pour faire 72, ſçavoir la ſomme des quatre nombres qui doi-

$$\begin{array}{cccccccccc|c}
 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 3 & 107 \\
 35 & 33 & 32 & 31 & 30 & 29 & 28 & 27 & & & 72 \\
 | & | & | & & & & & & & & 
 \end{array}$$

vent achever l'autre ligne; en ſorte que dans ces quatre nombres il n'y en ait point deux qui ſoient relatifs, c'eſt-à-dire dont la ſomme faſſe 37, car il arrivera toujours que la ſomme de ces quatre nombres ſera un nombre impair, au lieu que 72 eſt pair. Ainſi prenant 31, 29, qui enſemble font un nombre pair, il reſtera 9, 10, qui en-

semble font un impair, & ainsi la somme des quatre sera impaire.

De même, si on prenoit 31, 28, dont la somme est impaire, les deux autres qui restent seroient 10, 8, dont la somme est paire; qui jointe à la somme précédente qui est impaire, la somme sera encore impaire; & cela arrivera toujours de la même façon, si ce n'est que les nombres soient tels, qu'on puisse prendre pour la seconde ligne trois nombres dans une des lignes, & un dans l'autre; ou bien que pour la première ligne, on puisse prendre tous les quatre nombres dans une même ligne.

Pour les tables impaires, si on les veut faire en la même manière que les paires, sçavoir, faisant que les relatifs soient opposez, il faut prendre garde qu'entre les nombres qui doivent servir à remplir les deux côtes prochains, c'est-à-dire, qui aboutissent à un même angle, après que ceux des angles seront placez, s'il se trouve des impairs, ils doivent être en multitude paires, comme 2, 4, ou 6, &c. ce qui se doit entendre prenant le nombre & son complément pour un seul nombre, car s'il n'y avoit qu'un impair, ou 3, ou 5, ou autre multitude impaire pour les deux lignes qu'il faut remplir, cela ne se pourroit; la raison est, que si les deux nombres des angles sont tous deux pairs, ou tous deux impairs, la somme des nombres qui restent à mettre en chaque ligne doit être impaire; à cause que la somme des nombres de la ligne doit être impaire, supposant que les nombres commencent par 1, & soient de suite. Si donc on avoit trois impairs, ou autre multitude impaire, il faudroit les mettre tous trois dans une même ligne pour la faire impaire, ou si l'on n'en mettroit qu'un, il en resteroit deux pour l'autre ligne, ce qui fera que cette portion de ligne sera impaire, sçavoir autrement qu'elle ne doit être, à cause des nombres qui sont aux angles, dont la somme est impaire, & joignant cette impaire à l'autre portion de ligne qui seroit aussi impaire,

paire ; sçavoir , la portion qui est entre les deux angles , feroit toute la ligne paire ; mais elle doit être impaire.

Que si le nombre de l'un des angles est pair , & l'autre impair , la somme des nombres qui restent à mettre à chaque ligne sera paire ; & ainsi étant contraint de mettre à une des lignes un ou trois impairs , cela fera que la portion de la ligne qui est entre deux angles sera impaire , sçavoir autrement qu'elle ne doit être.

Ainsi après avoir fait la table de trois , qui est ci-dessous , pour faire l'enceinte extérieure de cinq , on a de reste les nombres 1 , 3 , 4 , 6 , &c. & leurs compléments , comme on voit ensuite. Si on met donc 1 à l'un des angles , & son complément 25 à l'angle opposé , & qu'à l'autre angle on mette le nombre suivant 3 , il resteroit trois impairs dans la ligne supérieure pour remplir les deux lignes , sçavoir 7 , 9 , 11 , c'est pourquoi on ne pourra pas mettre 3 à cet angle , ni aucun autre impair , mais un pair comme 4 , parce que mettant 4 , il restera 4 impairs ; sçavoir 3 , 7 , 9 , 11 , & on pourra achever la table de 5 , comme on la voit ensuite.

|    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 3  | 4  | 6  | 7  | 9  | 11 | 12 |
| 25 | 23 | 22 | 20 | 19 | 17 | 15 | 14 |

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  |    |    | 4  | 1  | 23 | 20 | 17 | 4  |
| 10 | 24 | 5  |    | 19 | 10 | 24 | 5  | 7  |
| 8  | 13 | 18 |    | 11 | 8  | 13 | 18 | 15 |
| 21 | 2  | 16 |    | 12 | 21 | 2  | 16 | 14 |
| 22 |    |    | 25 | 22 | 3  | 6  | 9  | 25 |

### Troisième exemple de 6.

ON n'est pas obligé de prendre huit nombres de suite ; & leurs compléments , pour faire la table intérieure qui a quatre de côté ; mais il suffit que quatre de ces nombres aient même différence , & les quatre autres pareillement. Ainsi on pourra prendre 1 , 2 , 3 , 4 , 8 , 9 , 10 , 11 ,

# 250 DES QUARREZ MAGIQUES.

& leurs complémens, 26, 27, 28, 29, 33, 34, 35, 36, pour la table de quatre qui sera

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 35 | 34 | 4  | 13 | 22 | 20 | 30 | 12 | 14 |
| 29 | 9  | 10 | 26 | 5  | 1  | 35 | 34 | 4  | 32 |
| 11 | 27 | 28 | 8  | 31 | 29 | 9  | 10 | 26 | 6  |
| 33 | 3  | 2  | 36 | 21 | 11 | 27 | 28 | 8  | 16 |
|    |    |    |    | 18 | 33 | 3  | 2  | 36 | 19 |
|    |    |    |    | 23 | 15 | 17 | 7  | 25 | 24 |

Et prenant pour les angles 13 & 14, & leurs complémens 24 & 23, on aura la figure de 6 ci-dessus.

## Quatrième exemple de 6.

ON peut aussi commencer les huit, & leurs complémens, de la table interieure de quatre, par un autre nombre que 1, & aussi ne les point prendre de suite, comme on voit en la table suivante, en laquelle on a pour la table interieure de 4, les nombres 2, 4, 6, 8, 13, 15, 17, 19, & leurs complémens 18, 20, 22, 24, 29, 31, 33, 35. Laquelle table de 4 sera,

|    |    |    |    |   |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|---|----|----|----|----|----|----|
|    |    |    |    | A |    |    |    |    |    | B  |
|    |    |    |    |   | 1  | 34 | 27 | 26 | 16 | 7  |
| 2  | 33 | 31 | 8  |   | 9  | 2  | 33 | 31 | 8  | 28 |
| 24 | 15 | 17 | 18 |   | 14 | 24 | 15 | 17 | 18 | 23 |
| 19 | 20 | 22 | 13 |   | 25 | 19 | 20 | 22 | 13 | 12 |
| 29 | 6  | 4  | 35 |   | 32 | 29 | 6  | 4  | 35 | 5  |
|    |    |    |    | D | 30 | 3  | 10 | 11 | 21 | 36 |
|    |    |    |    |   |    |    |    |    |    | C  |

Et prenant pour les angles 1 & 7, & leurs complémens 36, 30, on fera la dernière enceinte qui est l'exterieure des nombres qu'on voit à la figure ci-dessus.

Cette dernière façon se trouve assez souvent difficile, car il peut arriver qu'on prendra pour les angles de tels nombres, que les lignes de l'enceinte exterieure ne pourront pas être remplies, ou ce ne sera qu'après une re-

cherche ennuieuse. Par exemple, si on prenoit 10 & 16, & leurs complémens 27 & 21 pour les angles de l'enceinte extérieure, au lieu de 1, 7, 36, 30, on ne pourroit parfaire la figure, & on seroit contraint de prendre d'autres nombres pour les angles.

Pour voir maintenant de quels nombres il faut remplir les lignes, je considère combien il faut de reste à chaque ligne, ou plutôt à deux, sçavoir à deux lignes qui ne soient point opposées l'une à l'autre : Par exemple, je cherche combien il faut pour achever la ligne A, B, & la ligne B, C, auxquelles on suppose déjà les coins 1 7, & 7 36.

Or parce que chaque ligne doit contenir 111 en ses six nombres, il faut pour la ligne A, B, prendre la somme de 1 & 7, qui est 8, & l'ôter de 111, restera 103 que doivent faire les quatre nombres qui restent à trouver pour la ligne A, B.

De même je prens la somme de 7 & 36, qui est 43, que j'ôte de 111, reste 68 pour les quatre nombres qu'il faut mettre à la ligne B C.

Pour les deux autres lignes C D, & A D, il ne s'en faut pas mettre en peine ; car elles s'ensuivent nécessairement de leurs opposées A B, B C, puisque l'une des lignes doit avoir les complémens de la ligne qui lui est opposée.

Je prens après les huit nombres qui restent, & les complémens au-dessous, comme on voit ici.

|    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 3  | 5  | 9  | 10 | 11 | 12 | 14 | 16 |
| 34 | 32 | 28 | 27 | 26 | 25 | 23 | 21 |

103

|    |    |
|----|----|
| 34 | 3  |
| 28 | 9  |
| 27 | 10 |
| 14 | 23 |

Puis j'écris à part la somme que doivent faire ensemble les quatre nombres de chacune des deux lignes, sçavoir 103 & 68, & je cherche quatre nombres qui fassent l'un de ces nombres, par exemple 103 ; mais afin de voir si on peut trouver quatre nombres qui fassent

K k ij



103, & quatre autres qui fassent 68, il faut faire toutes les combinaisons possibles. Premièrement, je prendrai 34 & 32, qui ensemble font 66, & pour aller jusques à 103, il faut encore 37 pour deux nombres. Mais on ne peut trouver deux nombres qui fassent 37, s'ils ne sont complémens l'un de l'autre. Or il ne faut jamais mettre en une même ligne deux nombres qui soient les complémens l'un de l'autre, parce que le complément de chaque nombre se doit mettre en la ligne opposée, ce qu'il faut entendre pour cette méthode seulement; car il y a diverses voyes par lesquelles on pourra bien faire, que deux nombres qui soient les complémens l'un de l'autre, se trouvent en même ligne.

Puis donc que 32 ne peut être avec 34, je prens le nombre suivant 28, qui avec 34 fait 62; & parce que la ligne doit avoir 103, les deux autres nombres doivent faire ensemble 41. Je prens donc le nombre qui suit 28, sçavoir 27 qui avec 14 fait 41. Voilà pour la ligne A B.

Je viens maintenant à la ligne B C, qui doit avoir 68 en ses quatre nombres, qui doivent être mis entre les coins B & C, & les quatre nombres qui restent font

32 26 25 21

& leurs complémens qui sont au-dessous, 5 11 12 16

Je prens premierement 32, lequel étant joint à 26, donnera 58, & parce que la ligne doit avoir 68, il ne reste plus que 10 qu'il faudroit faire avec deux nombres, ce qui ne se peut avec les quatre nombres restans, 25, 21, 16, 12.

Si on joint 32 à 25, ou même à 21, on tombera en même inconvenient, car 32 & 21 font 53, qui ôtés de 68 reste 15, qu'il faut faire en deux nombres; mais il ne reste plus que 12 & 11 qui font plus de 25.

Si on joint 32 à 16, on aura 48, qui ôtés de 68 restera 20, qui ne se peuvent faire par 11 & 12.

On ne sçauroit passer plus outre, parce que si on joignoit 12 à 32, on seroit contraint de mettre aussi en même ligne que 32 quelqu'un des nombres précédens, ce que néanmoins on a reconnu être impossible.

Il faut donc prendre un autre nombre que 32, puisqu'il ne peut être en la ligne B C, & ce sera le nombre suivant 26, qui étant joint à 25 fait 51, qui ôtez de 68, reste 17, qu'il faut faire avec deux nombres pris dans les trois qui restent, qui sont 21, 16, 5, car 32 en a déjà été exclus. Mais 17 ne se peut faire avec ces nombres.

On joindra après 26 à 21 : la somme est 47, qui étant ôtée de 68, reste 21, qu'il faudroit faire avec les deux nombres qui restent 12 & 5 ; mais parce qu'ils sont trop petits pour cet effet, il ne faut point passer outre, car ce seroit encore pis, si on joignoit 26 à 16, ou 25 à 21.

Puis donc que cette seconde ligne B C ne se peut faire, il faut changer la première ligne A B.

Mais afin de n'omettre aucune façon par laquelle on la puisse faire, (car si on en laissoit quelqu'une, ce pourroit être celle dont on auroit besoin) il faut continuer par le même ordre qu'on a commencé.

On avoit pris 34 & 28 pour les deux premiers nombres, & il restoit 41 à faire en deux nombres pour aller jusques à 103.

Pour faire ces 41 on avoit pris 27 & 14, lesquels n'ayant pas bien réussi, je cherche si on peut faire les mêmes 41 avec deux autres nombres, & je trouve 25 & 16.

Il restera donc pour la seconde ligne les quatre nombres

32 27 26 25

& leurs complémens

5 10 11 14

Si on examine ces nombres comme ci-devant, on trouvera qu'on ne peut en choisir quatre d'entr'eux, qui ensemble fassent 68, pourvu qu'il n'y en ait point deux, qui soient complémens l'un de l'autre, car on pourroit bien prendre 27, 26, 10, 5, qui ensemble font 68 ; mais

# 254 DES QUARREZ MAGIQUES.

parce que 27 & 10 sont complémens l'un de l'autre, on ne pourroit avec eux parfaire la figure, comme il a été dit.

|    |    |    |    |    |    |    |    |  |  | 103 |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|--|--|-----|----|
| 3  | 5  | 9  | 10 | 11 | 12 | 14 | 16 |  |  | 34  | 3  |
| 34 | 32 | 28 | 27 | 26 | 25 | 23 | 21 |  |  | 28  | 9  |
|    |    |    |    |    |    |    |    |  |  | 25  | 12 |
|    |    |    |    |    |    |    |    |  |  | 16  | 21 |

On ne peut donc pas faire la premiere ligne avec les quatre nombres 34, 28, 25, 16; & parce qu'on ne peut plus faire 41 avec deux autres nombres, (puisque 23 & 21 qui restent à considerer font plus de 41) il faut changer 28, & mettre avec 34 le suivant 27.

On aura donc 34 & 27, dont la somme est 61, qui ôté de 103, reste 42, qu'il faut trouver en deux nombres, tous deux moindres que 27; car si l'un des deux nombres étoit plus grand que 27, & si c'étoit par exemple 28 & 14, ce seroit refaire la même chose qu'on a ci-devant considérée & trouvée impossible, car on auroit les quatre mêmes nombres qu'on a eus auparavant, sçavoir 34, 28, 27, 14.

Or les 42 qui restent ne se peuvent faire que par 26 & 16, car 25 & 21, ou 23 & 21 qui restent, sont trop grands.

On aura donc 34, 27, 26, 16 pour la premiere ligne A B.

Pour la seconde B C, qui doit avoir 68, je prens premierement 32 & 28, qui ensemble font 60; mais parce qu'il faudroit faire 8 en deux nombres, il en faut mettre un autre avec 32, & afin de les avoir séparés de ceux de la premiere ligne, je les écrirai à part avec leurs complémens.

| 103 |    | 68 |    |    |    |    |    |
|-----|----|----|----|----|----|----|----|
| 34  | 3  | 28 | 9  | 32 | 28 | 17 | 23 |
| 27  | 10 | 23 | 14 | 5  | 9  | 12 | 14 |
| 26  | 11 | 12 | 25 |    |    |    |    |
| 16  | 21 | 5  | 32 |    |    |    |    |

Je joindrai donc 32 à 25, la somme est 57, qui ôtée de 68, reste 11, qu'on ne peut faire en deux nombres, puisque les deux moindres qui restent, sçavoir 9 & 14, font plus de 11.

On assemblera après 32 & 23, la somme est 55, qui ôtée de 68, reste 13; mais 9 & 12 qui restent font plus de 13.

Enfin on ajoutera 32 à 14, la somme est 46, qui ôtée de 68, reste 22; mais 12 & 9 qui restent ne font que 21, & ainsi on ne peut mettre 32 en cette ligne B C, puisque parcourant tous les nombres avec 32, on ne peut trouver 68.

Il faut donc changer 32, & prendre le nombre suivant qui est 28, lequel étant joint avec 25 fait 53, qui étant ôté de 68, reste 15, qu'on ne peut faire avec les nombres suivans, puisque les deux moindres 5 & 14 font plus de 15.

Après on ajoutera 28 à 23: la somme est 51, qui ôtée de 68, reste de 17, qui se fait avec les deux nombres qui restent, sçavoir avec 12 & 5.

On aura donc par ce moyen la table parfaite, car la première ligne A B sera 34, 27, 26, 16, près desquels nombres je mets leurs complémens 3, 10, 11, 21, qui doivent faire la ligne D C de la figure qui est ci-devant à la page 250, & qui est opposée à A B, & on mettra les nombres & les complémens vis-à-vis l'un de l'autre, comme on voit en la figure, en laquelle 3 est vis-à-vis de 34, 10 vis-à-vis de 27, & ainsi des autres.

La ligne B C se fera des nombres 28, 23, 12, 5, & la ligne A D qui lui est opposée se fera des complémens de

## 256 DES QUARREZ MAGIQUES.

ces nombres, sçavoir de 9, 14, 25, 32, qu'on voit en l'autre page vis-à-vis de 28, 23, 12, 5, & les autres, sçavoir 9, 14, 25, 32 se doivent mettre aussi chacun vis-à-vis de leurs complémens, sçavoir 9 vis-à-vis de 28, 14 vis-à-vis de 23, &c.

On peut passer outre à examiner si on ne peut point faire cette table de 6 d'une autre façon, les coins demeurans comme ils sont, & en leur même situation.

Premièrement, il est bien certain que la ligne A B demeurant telle qu'elle est, on ne peut pas faire la ligne B C d'une autre forte, parce que si au lieu de 28 & 23, on prenoit 28 & 14, ou 15 & 23, les nombres qui resteroient ne seroient pas suffisans d'achever 68, parce que nécessairement ils seroient moindres que ceux qui restent lorsqu'on prend 28 & 23.

|    |    |    |    |    |    |    |    | 103 | 68 |    |    |  |
|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|----|----|----|--|
| 3  | 5  | 9  | 10 | 11 | 12 | 14 | 16 | 34  | 3  | 28 | 9  |  |
| 34 | 32 | 28 | 27 | 26 | 25 | 23 | 21 | 25  | 12 | 23 | 14 |  |
|    |    |    |    |    |    |    |    | 23  | 14 | 12 | 25 |  |
|    |    |    |    |    |    |    |    | 21  | 16 | 5  | 32 |  |

Il faut donc changer la ligne A B, dont les quatre nombres qui sont entre les coins 1 & 7, doivent faire ensemble 103.

Et parce que l'on a déjà pris 34 & 27, & qu'on ne peut faire les 42 qui restent par d'autres nombres que par 26 & 16, qui ont déjà été employez, il faut changer 27, & prendre 26 avec 34, qui ensemble font 60, qui ôtez de 103, reste 43, qu'on ne peut faire avec deux des nombres qui restent, & qui soient moindres que 26,

Il faut donc passer plus outre, & joindre 25 à 34, dont la somme est 59, qui ôlée de 103, reste 44 qui se peuvent faire avec 23 & 21. La ligne A B sera donc 34, 25, 23, 21.

Et

Et il faudra faire 68 en quatre nombres pour la ligne BC, avec les quatre qui restent, 5 9 10 11 & leurs complémens, qui sont 32 28 27 26

Mais on ne sçauroit trouver quatre de ces nombres selon la règle, qui est de ne point mettre un nombre & son complément en même ligne, qui fassent 68, d'où s'ensuit que la ligne AB ne peut pas être composée de 34, 25, 23, 21.

Si on veut passer outre, on ne pourra plus ajoûter aucun nombre avec 34, car on ne feroit que des répétitions de ce qui a été déjà examiné : car si après 25 il faut prendre les deux plus grands nombres qui restent, sçavoir 23 & 21, si on mettoit 23 avec 34, on ne pourroit pas trouver deux nombres moindres que 23, qui fissent ensemble ce qu'il faudroit de reste pour achever 103, ainsi qu'il est requis.

Il faut donc abandonner 34, & se servir de 32, en le comparant aux nombres suivans, comme on a fait 34.

Je joins 32 à 28 : la somme est 60, qui ôtée de 103, reste 43, qu'on peut faire avec 27 & 16 seulement.

La ligne AB aura donc 32, 28, 27, 16 pour les quatre nombres qui sont entre les coins 1, 7.

|                         | 103 | 68 |
|-------------------------|-----|----|
| 3 5 9 10 11 12 14 16    | 32  | 5  |
| 34 32 28 27 26 25 23 21 | 28  | 9  |
|                         | 27  | 10 |
|                         | 16  | 21 |

Pour faire la ligne BC, qui doit être de 68, sans les coins, on se servira des nombres restans, qui sont

34 26 25 23  
3 11 12 14

Si on prend 34 & 26, on aura 60, restera 8 qu'on ne peut pas faire en deux nombres ; & le même inconvenient arrive à 34 & 25, commeaussi à 34 & 23, qui ensemble

font 57, qui ôtés de 68, reste 11, qu'on ne sçauroit faire avec 11 & 12.

Pareillement si on se sert de 34 & 14, la somme est 48, qui ôlée de 68, reste 20, qui est encore moindre que la somme de 11 & 12 qui restent.

Il faut donc laisser 34, & se servir de 26, qui étant joint à 25, fait 51, qui ôté de 68, reste 17, qui se peut faire avec 14 & 3.

La seconde ligne B C sera donc de 26, 25, 14, 3.

| 103 |    | 68 |    |
|-----|----|----|----|
| 32  | 5  | 26 | 11 |
| 28  | 9  | 25 | 12 |
| 27  | 10 | 14 | 23 |
| 16  | 21 | 3  | 34 |

On disposera la première ligne au-dessous de 103, & les compléments à côté, & de même la seconde ligne au-dessous de 68, afin de les disposer après en leur place en ce même ordre pour avoir la figure suivante, en laquelle la figure intérieure de 4 de côté est la même que ci-devant.

Si on vouloit passer outre à la recherche d'autres figures, il faudroit joindre 32 à 25 : la somme est 59, qui ôlée de 103, reste 44, qu'on fera en prenant 23 & 21, & ainsi on auroit pour la première ligne 32, 27, 23, 21, mais on ne pourra composer la seconde ; de sorte qu'il faut changer la première.

|   |    |    |    |    |    |    |   |
|---|----|----|----|----|----|----|---|
| A |    |    |    |    |    |    | B |
|   | 1  | 32 | 28 | 27 | 16 | 7  |   |
|   | 11 | 2  | 33 | 31 | 8  | 26 |   |
|   | 12 | 24 | 15 | 17 | 18 | 25 |   |
|   | 23 | 19 | 20 | 22 | 13 | 14 |   |
|   | 34 | 29 | 6  | 4  | 35 | 3  |   |
|   | 30 | 5  | 9  | 10 | 21 | 36 |   |
| D |    |    |    |    |    |    | C |

Si on joint 32 à 26 ou à 25, on ne pourra faire 103, c'est pourquoi il faut laisser 32, & considérer 28, qui étant

joint à 27, donne 55, qui ôté de 103, reste 48, qui seront faits par 25 & 23. On aura donc pour la première ligne 28, 27, 25, 23, mais on ne pourra faire la seconde ligne qui doit être de 68, avec les nombres qui restent.

Il faudroit donc réformer encore la première ligne, ce qui ne se peut, parce qu'ayant pris les quatre nombres 28, 27, 25, 23, si l'on change quelqu'un des deux premiers 28 & 27, on ne pourra prendre que 26 au lieu de l'un d'eux; mais il faudroit en même temps augmenter 23 ou 25, ce qui ne se peut, parce qu'entre les nombres qu'on peut choisir, & dont on se peut servir, il n'y a que le même 26 qui soit plus grand qu'eux.

Il est donc manifeste, que laissant la Table intérieure de 4 en l'état qu'elle est, & les coins 1 & 7, avec leurs complémens, on ne peut faire que les deux Tables de 6 cy-devant écrites, qui sont marquées A B C D, si ce n'est que l'on veuille considérer l'ordre des nombres, chacun demeurant dans la même ligne sans en sortir, mais il sera parlé cy-après de cette variation.

Que si on vouloit rechercher plus outre, il faudroit mettre un autre nombre que 7 à l'un des angles, & les ayant tous éprouvés à cet angle, on changeroit aussi l'angle où l'on a mis 1, mettant à la place le nombre suivant qui est 3, & son complément 34 à l'angle opposé; & à l'autre angle qui borne la même ligne, on mettroit le nombre suivant 5, puis 7, & les autres.

#### *Exemple d'une Table de 8.*

**I**L faut maintenant donner l'exemple de la fabrique d'une autre Table, sur laquelle on se puisse conduire, pour en former d'autres plus grandes, qui sera celle qui a 8 à chacun de ses côtez.

J'arrange premièrement la moitié des nombres de suite, sçavoir jufques à 32, & leurs complémens au-dessous, & chaque couple de nombres fera 65, sçavoir autant que



les deux extrêmes ensemble 64 & 1, & ce 65 est la valeur que doivent avoir deux nombres l'un portant l'autre en chaque ligne ; & ainsi le premier quarré qui est de 4 aura deux fois 65, qui font 130 ; le second qui a six nombres aura 195, sçavoir trois fois 65 ; & le dernier qui est l'enceinte extérieure, & qui a huit nombres en chaque ligne, contiendra 260.

Voici donc les nombres de suite ainsi qu'il les faut ranger.

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 64 | 63 | 62 | 61 | 60 | 59 | 58 | 57 | 56 | 55 | 54 | 53 | 52 | 51 | 50 | 49 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 48 | 47 | 46 | 45 | 44 | 43 | 42 | 41 | 40 | 39 | 38 | 37 | 36 | 35 | 34 | 33 |

Ayant ainsi disposé les nombres, je prens les huit premiers & leurs complémens, sçavoir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, desquels je fais, comme il a été montré cy-devant, la Table suivante de 4.

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 63 | 62 | 4  |
| 60 | 6  | 7  | 57 |
| 8  | 58 | 59 | 5  |
| 61 | 3  | 2  | 64 |

Après je prens les dix nombres suivans & leurs complémens, pour l'enceinte suivante, qui fera le quarré ou Table de 6. Ces nombres sont,

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 56 | 55 | 54 | 53 | 52 | 51 | 50 | 49 | 48 | 47 |

Avec ces nombres on fera la dernière enceinte de la Table de 6, par quelqueune des façons cy-devant déduites.

Ou bien on prendra une des Tables de 6 qui sont cy-devant, par exemple, la première qui est en la page 241, qui est répétée ici.

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 9  | 25 | 26 | 23 | 18 | 10 |
| 16 | 1  | 35 | 34 | 4  | 21 |
| 20 | 32 | 6  | 7  | 29 | 17 |
| 24 | 8  | 30 | 31 | 5  | 13 |
| 15 | 33 | 3  | 2  | 36 | 22 |
| 27 | 12 | 11 | 14 | 19 | 28 |

Ayant cette Table, je remarque où sont les 18 premiers & moindres nombres qui sont la moitié des nombres de la Table, & les laisse en leurs places, mais au lieu des 18 autres, je mets les complémens pris sur le quarre 64, comme on les a mis cy-devant: mais afin de ne se point troubler, on pourra écrire les nombres de la Table de 6, & leurs complémens au-dessous pris sur 36, & au-dessous de ceux-là les complémens pris sur 64, comme on voit ici.

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 36 | 35 | 34 | 33 | 32 | 31 | 30 | 29 | 28 | 27 | 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 |
| 64 | 63 | 62 | 61 | 60 | 59 | 58 | 57 | 56 | 55 | 54 | 53 | 52 | 51 | 50 | 49 | 48 | 47 |

La premiere ligne contient les nombres qui appartiennent à chacune des deux Tables, tant à celle qu'on prend pour patron, que celle qui fait partie de la Table de 8.

La seconde ligne appartient à la Table de 6, qui est cy-dessus, & qui sert de patron, & contient les complémens de la premiere ligne, & chaque couple de nombres fait 37.

La troisieme contient les complémens de la premiere ligne, & appartient à la Table de 6, qui fait partie de celle de 8, & chaque couple de nombres fait 65.

Cela fait, il faut mettre à part le reste des nombres jusques à 32, & leurs complémens au-dessous, comme on voit ici.

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 46 | 45 | 44 | 43 | 42 | 41 | 40 | 39 | 38 | 37 | 36 | 35 | 34 | 33 |

Ll iij

Après on prendra pour les coins de la dernière enceinte les moindres nombres 19 & 20, & leurs compléments 46, 45 : ce n'est pas pourtant qu'on ne puisse prendre d'autres nombres que 19 & 20, car cela est visible, vu que la figure se peut faire en beaucoup de façons.

Maintenant je ferai facilement la Table de 6 sur la précédente, laissant les nombres de la première ligne au lieu où on les trouvera, & mettant ceux de la troisième ligne à la place de ceux de la seconde : & ainsi on aura la figure suivante.

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 19 |    |    |    |    | 20 |
|    | 9  | 53 | 54 | 51 | 18 |
|    | 16 | 1  | 63 | 62 | 4  |
|    | 48 | 60 | 6  | 7  | 57 |
|    | 52 | 8  | 58 | 59 | 5  |
|    | 15 | 61 | 3  | 2  | 64 |
|    | 55 | 12 | 11 | 14 | 47 |
| 45 |    |    |    |    | 46 |

J'assemble 19 & 20, la somme est 39, que j'ôte de 260, qui est la somme que doivent faire les nombres de chaque ligne, reste 221 pour les six nombres, qu'il faut mettre entre 19 & 20.

Pareillement j'assemble 20 & 46, la somme est 66, qui ôtez de 260, reste 194 pour les six nombres qui doivent être entre 20 & 46.

On peut voir aussi quelle doit être la somme des six nombres, qui seront entre 19 & 45, & cette somme sera 196, afin que si on trouvoit 196 avant 194 on s'en pût servir.

Je fais premièrement la ligne 19, 20, & parce que 19, 20, sont les moindres nombres des coins, je prens des plus grands nombres qui restent pour suppléer à leur défaut. Je considérerai donc les quatre plus grands, 44, 43, 42, 41, dont la somme est de 170 : & parce que les six nombres doivent valoir ensemble 221, il reste 51 pour

les deux nombres qui sont encore à trouver. On prendra donc 25 & 26, qui ensemble font 51 : cette première ligne fera donc 44, 43, 42, 41, 26, 25, entre les coins 19 & 20.

Reste à trouver les six nombres qu'il faut à la ligne qui a 20 & 46 à ses extremittez, lesquels six nombres doivent faire ensemble 194, & les six nombres de la ligne opposée, dont les extremittez sont 19, 45, doivent faire ensemble 196, lesquels nombres on doit choisir parmi les suivans,

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 38 | 37 | 36 | 35 | 34 | 33 |

Je divise 194 par six, pour voir ce que doivent avoir les nombres l'un portant l'autre : je trouve 32, & reste 2 ; d'où s'ensuit que les nombres pris deux à deux doivent faire 64, mais l'un des couples doit faire 66, ainsi on aura deux couples de nombres de 64 chacun, & un couple de 66, qui font les six nombres, car on ne peut pas faire deux couples de 65 par exemple, & un de 64, parce qu'il est impossible de faire 69 en deux nombres, si on ne prend les deux, qui sont complémens l'un de l'autre ; ce qui est directement contre la principale & generale regle, qui est,

Que jamais dans la construction qu'on donne ici, on ne doit mettre en même ligne deux nombres qui soient complémens l'un de l'autre, c'est-à-dire, qui étant joints ensemble fassent autant que les deux extrêmes ensemble, qui sont ici 64 & 1.

On cherchera donc deux couples de nombres qui fassent 64, & un couple qui fasse 66, on aura 33, 31 ; 35, 29, & 38 28. Les 37 & 27 font 64 ; mais parce qu'un des couples doit avoir deux de plus, on prend 38 au lieu de 37, & 28 au lieu de 27.

Les six nombres seront donc 28, 29, 31, 33, 35, 38, qu'il faut mettre entre 20, 46, & les six autres qu'il faut

# 264 DES QUARREZ MAGIQUES.

mettre en la ligne opposée, entre 19, 45, sont leurs complémens, sçavoir 37, 36, 34, 32, 30, 27, qui seront disposez selon cet ordre, en telle sorte que les complémens soient toujours vis - à - vis l'un de l'autre ; & ainsi on aura la figure suivante.

|    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 19 | 44 | 43 | 42 | 41 | 26 | 25 | 20 |
| 37 | 9  | 53 | 54 | 51 | 18 | 10 | 28 |
| 36 | 16 | 1  | 63 | 62 | 4  | 49 | 29 |
| 34 | 48 | 60 | 6  | 7  | 57 | 17 | 31 |
| 32 | 52 | 8  | 58 | 59 | 5  | 13 | 33 |
| 30 | 15 | 61 | 3  | 2  | 64 | 50 | 35 |
| 27 | 55 | 12 | 11 | 14 | 47 | 56 | 38 |
| 45 | 21 | 22 | 23 | 24 | 39 | 40 | 46 |

On pourra encore faire ces lignes d'une autre sorte ; sçavoir, prenant 34, 32 pour le couple qui doit faire 66, & 35, 29 ; 37, 27 pour les deux autres ; & ainsi les six nombres qu'il faudroit mettre entre 20 & 46, seroient 27, 29, 32, 34, 35, 37.

Et les six autres qui doivent être mis entre 19, 45, seroient leurs complémens ; sçavoir 38, 36, 33, 31, 30, 28, avec lesquels on aura une autre figure.

20 27 29 32 34 35 37 46 à la place de 20 28 29 31 33 35 38 46  
 & 19 38 36 33 31 30 28 45 à la place de 19 37 36 34 32 30 27 45

On pourroit encore faire 194 par d'autres couples, prenant 30 & 36 pour faire 66, & les deux autres couples de 64, qui seront 27, 37, & 31, 33, & les six nombres qu'on mettra entre 20 & 46, seront 27, 30, 31, 33, 36, 37 ; & entre 19, 45, on mettra leurs complémens 38, 35, 34, 32, 29, 28.

On se peut encore servir d'autres manieres pour trouver 194, ou 196, sans considerer ni prendre les couples des nombres, ainsi qu'on a fait pour la derniere enceinte des précédentes figures de six ; ce qui seroit trop long à repeter ici, vû même qu'on en donnera des exemples, & qu'on

qu'on s'en servira en quelqu'une des lignes de la figure suivante.

*Exemple d'une Table de 14.*

**A** Fin qu'on puisse voir toutes les façons de choisir les nombres pour remplir les lignes des enceintes diverses de la figure, on donnera encore l'exemple d'une Table de 14.

Et parce qu'en cette méthode-cy il n'y a que trois façons de ranger les nombres, on prendra le carré de 8, (considéré comme faisant partie du carré de 14) sur le modèle du carré précédent de 8, & ensuite l'enceinte de 10 se fera d'une façon, celle de 12 d'une autre, & l'enceinte extérieure, qui est celle de 14, encore d'une autre.

Je mets donc premièrement de suite les nombres qui doivent remplir les 196 places du carré, & les dispose en deux lignes; sçavoir la moitié dans une des lignes, & l'autre moitié qui sert de complément à la première, dans l'autre ligne au-dessous de la première, en telle sorte que chaque couple de nombres fasse 197, qui est la somme des deux nombres extrêmes, comme on voit cy-dessous,

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 11  | 12  |
| 196 | 195 | 194 | 193 | 192 | 191 | 190 | 189 | 188 | 187 | 186 | 185 |
| 13  | 14  | 15  | 16  | 17  | 18  | 19  | 20  | 21  | 22  | 23  | 24  |
| 184 | 183 | 182 | 181 | 180 | 179 | 178 | 177 | 176 | 175 | 174 | 173 |
| 25  | 26  | 27  | 28  | 29  | 30  | 31  | 32  | 33  | 34  | 35  | 36  |
| 172 | 171 | 170 | 169 | 168 | 167 | 166 | 165 | 164 | 163 | 162 | 161 |
| 37  | 38  | 39  | 40  | 41  | 42  | 43  | 44  | 45  | 46  | 47  | 48  |
| 160 | 159 | 158 | 157 | 156 | 155 | 154 | 153 | 152 | 151 | 150 | 149 |
| 49  | 50  | 51  | 52  | 53  | 54  | 55  | 56  | 57  | 58  | 59  | 60  |
| 148 | 147 | 146 | 145 | 144 | 143 | 142 | 141 | 140 | 139 | 138 | 137 |

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 61  | 62  | 63  | 64  | 65  | 66  | 67  | 68  | 69  | 70  | 71  | 72  |
| 136 | 135 | 134 | 133 | 132 | 131 | 130 | 129 | 128 | 127 | 126 | 125 |
| 73  | 74  | 75  | 76  | 77  | 78  | 79  | 80  | 81  | 82  | 83  | 84  |
| 124 | 123 | 122 | 121 | 120 | 119 | 118 | 117 | 116 | 115 | 114 | 113 |
| 85  | 86  | 87  | 88  | 89  | 90  | 91  | 92  | 93  | 94  | 95  | 96  |
| 112 | 111 | 110 | 109 | 108 | 107 | 106 | 105 | 104 | 103 | 102 | 101 |
| 97  | 98  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 100 | 99  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |

Ces nombres étant ainsi disposez , je prens les 32 premiers , & leurs complémens , pour faire le quarré intérieur de 8 en la même façon qu'on a fait le précédent de 8 , ou si on veut on le fera sur son modele , laissant les 32 premiers nombres en la même place qu'ils sont au précédent ; mais pour les nombres qui surpassent 32 , il les faudra changer aux complémens correspondans pris sur 196 ; & afin que cela se puisse faire plus aisément & sans être en danger de prendre un nombre pour un autre, on écrira les 64 nombres de la précédente Table de 8 en deux lignes , qui serviront de complément l'une à l'autre ; & au-dessous de cette seconde , on en mettra une troisième qui contiendra les 32 premiers complémens de la page précédente, sçavoir depuis 196 jusques à 165 , qui est dessous 32.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 11  | 12  |
| 64  | 63  | 62  | 61  | 60  | 59  | 58  | 57  | 56  | 55  | 54  | 53  |
| 196 | 195 | 194 | 193 | 192 | 191 | 190 | 189 | 188 | 187 | 186 | 185 |
| 13  | 14  | 15  | 16  | 17  | 18  | 19  | 20  | 21  | 22  | 23  | 24  |
| 52  | 51  | 50  | 49  | 48  | 47  | 46  | 45  | 44  | 43  | 42  | 41  |
| 184 | 183 | 182 | 181 | 180 | 179 | 178 | 177 | 176 | 175 | 174 | 173 |
| 25  | 26  | 27  | 28  | 29  | 30  | 31  | 32  |     |     |     |     |
| 40  | 39  | 38  | 37  | 36  | 35  | 34  | 33  |     |     |     |     |
| 172 | 171 | 170 | 169 | 168 | 167 | 166 | 165 |     |     |     |     |

# DES QUARREZ MAGIQUES. 267

Et laissant les nombres de la premiere ligne en même place dans la figure B, qu'on la voit dans la figure A, on mettra dans la figure B ceux de la troisieme ligne, aux mêmes places que ceux de la seconde ligne sont dans la figure suivante A, comme l'on voit ici.

|      |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |     |
|------|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 19   | 44 | 43 | 42 | 41 | 26 | 25 | 20 | 19  | 176 | 175 | 174 | 173 | 26  | 25  | 20  |
| 38   | 9  | 53 | 54 | 51 | 18 | 10 | 27 | 170 | 9   | 185 | 186 | 183 | 18  | 10  | 27  |
| 36   | 16 | 1  | 63 | 62 | 4  | 49 | 29 | 168 | 16  | 1   | 195 | 194 | 4   | 181 | 29  |
| A 33 | 48 | 60 | 6  | 7  | 57 | 17 | 32 | 165 | 180 | 192 | 6   | 7   | 189 | 17  | 32  |
| 31   | 52 | 8  | 58 | 59 | 5  | 13 | 34 | 31  | 184 | 8   | 190 | 191 | 5   | 13  | 166 |
| 30   | 15 | 61 | 3  | 2  | 64 | 50 | 35 | 30  | 15  | 193 | 3   | 2   | 196 | 182 | 167 |
| 28   | 55 | 12 | 11 | 14 | 47 | 56 | 37 | 28  | 187 | 12  | 11  | 14  | 179 | 188 | 169 |
| 45   | 21 | 22 | 23 | 24 | 39 | 40 | 46 | 177 | 21  | 22  | 23  | 24  | 171 | 172 | 178 |

Pour avoir plus de facilité à faire ces Tables, il faut mêler les nombres le moins qu'on peut, c'est-à-dire les prendre de suite autant que faire se pourra. Par exemple, le plus grand d'entre les moindres nombres de la Table précédente B, est 32; or on appelle les moindres nombres ceux de la premiere ligne, sçavoir depuis 1, jusques à 98, & les grands nombres, ceux de la seconde ligne qui sont les complémens des premiers, depuis 99, jusques 196 inclusivement.

Je prens donc 33 & 34, & leurs complémens, pour les angles de la figure de 10, qui entoure la précédente de 8; & parce qu'entre les angles de chaque ligne de l'enceinte de 10, il y a huit nombres, je prens les seize nombres qui suivent 34, & leurs complémens, pour deux lignes prochaines, & qui font un des angles de la figure, & pour les deux autres lignes qui leur sont opposées. Ces nombres sont,

35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50  
 162 161 160 159 158 157 156 155 154 153 152 151 150 149 148 147  
 M m ij



Je prens après les deux nombres suivans 51 & 52, & leurs complémens, pour les angles de la suivante enceinte de 12, & les vingt nombres suivans, & leurs complémens pour les lignes.

Enfin on prendra le reste des nombres pour la dernière enceinte: ce n'est pas qu'il faille nécessairement suivre cet ordre; car on peut entremêler les nombres comme on veut, & en prendre au commencement, au milieu, & à la fin pour une même ligne: mais on trouvera plus de facilité en suivant l'ordre précédent.

Or voici les trois voyes dont on se pourra servir pour parfaire les lignes, après que les coins sont remplis; mais avant tout, il faut observer ce qui est commun à toutes ces voyes, & ce qui se doit pratiquer auparavant.

Je suppose donc premièrement, que les nombres soient aux angles de la figure, & leurs complémens aux angles oppozés, comme on voit ici, où 164 complément de 33, est opposé à 33, & 163 complément de 34, est opposé à 34.

Cela fait, je considère ce que tous  
 33                      34 les dix nombres de l'enceinte doivent  
                          faire ensemble; & pour trouver cette  
                          somme, on remarquera que deux  
                          nombres l'un portant l'autre doivent  
                          faire 197, & cela doit être dans tou-  
 163                      164 tes les lignes de chaque enceinte, le-  
                          quel 197 est la somme de 196 & 1,  
 qui sont les deux extrêmes de tous les nombres qui com-  
 posent la figure de 14.

Or si chaque couple de nombres doit faire 197, les dix nombres, qui sont cinq couples, feront 985, sçavoir cinq fois 197. Puis donc que chaque ligne doit avoir 985, pour sçavoir quelle somme doivent faire les huit nombres qu'il faut mettre entre 33 & 34, il faut ôter de 985 la somme de 33 & 34, qui est 67, & il restera 918 pour les huit nombres.

Semblablement j'ôte de 985 la somme de 34 & 164, qui est 198, restera 787 pour les huit nombres qu'il faut mettre entre 34 & 164; & cette opération doit être faite à chaque enceinte après que les angles sont posez.

Pour les deux lignes opposées, sçavoir 163, 164, ou 33, 163, il ne s'en faut pas mettre en peine; car leurs opposées étant faites, nécessairement elles le seront aussi en y mettant les complémens de leurs opposées. Il est vrai que pour l'opération précédente, qui sert à trouver combien les nombres qu'on doit mettre entre les angles doivent faire ensemble, on se peut servir de deux telles lignes qu'on voudra, pourvu qu'elles ne soient pas opposées l'une à l'autre. Par exemple, au lieu d'ôter de 985 la somme de 33 & 34, on pourroit ôter la somme de 163 & 164; & au lieu de la somme de 34 & 164, on pourroit prendre celle de 33 & 163, car cela est indifférent.

La première méthode de trouver les nombres de chaque ligne sert pour avoir toutes les façons possibles de faire & remplir la ligne avec les nombres donnez; & à cause que par cette méthode on compare chaque nombre avec tous les autres, il s'ensuit qu'on ne doit pas s'en servir lorsqu'il y a beaucoup de nombres en la ligne, parce que cela seroit trop long, mais on s'en servira utilement lorsqu'il y a peu de nombres; c'est pourquoi nous la prendrons ici pour remplir les lignes de l'enceinte de 10, en chacune desquelles lignes il y a huit nombres, sans les coins qui sont 33, 34, & leurs complémens 164, 163.

Les huit nombres d'une des lignes, sçavoir de celle qui est entre 34 & 33, doivent faire ensemble 918, qu'il faut mettre à part au-dessous de 34, 33, & les nombres qui doivent être mis entre 34 & 164, feront ensemble 787 que je mets aussi à part afin de ne rien confondre.

$$\begin{array}{r|l} 34 & 33 \\ \hline 918 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 34 & 164 \\ \hline 787 & \end{array}$$

Les nombres des deux lignes & leurs complémens, sont

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 35  | 36  | 37  | 38  | 39  | 40  | 41  | 42  | 43  | 44  | 45  | 46  | 47  | 48  | 49  | 50  |
| 162 | 161 | 160 | 159 | 158 | 157 | 156 | 155 | 154 | 153 | 152 | 151 | 150 | 149 | 148 | 147 |
|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |

Pour faire 918, parce que le nombre est grand, & qu'il doit récompenser la petitesse de 34, 33, je prens les quatre plus grands nombres, sçavoir 162, 161, 160, 159, qui ensemble font 642, qui ôtez de 918, restera 276 pour les quatre nombres restans. Pour faire 276, je ne puis pas me servir des deux nombres suivans 158, 157, parce qu'ils feroient plus de 276, ni même des deux moindres de la seconde ligne, sçavoir de 148, 147, parce qu'ils font aussi plus de 276. Mais si on prenoit les quatre plus grands de la premiere ligne, sçavoir 47, 48, 49, 50, la somme seroit moindre que 276, c'est pourquoi il faudra prendre un des nombres de la seconde ligne, & trois de la premiere. Prenons, par exemple, 158, restera 118, mais 118 ne se peut faire avec trois nombres de cette ligne; car les trois moindres sont 40, 41, 42, qui ensemble font 123, qui est 5 plus que 118.

Il faut donc diminuer 158. Je prens 155 au lieu de lui; qui ôtez de 276, restera 121 qu'il faut faire en trois nombres; ce qui ne se peut point encore, non plus qu'avec 157 & 156; mais prenant 154, il restera 122, qui se feront avec 39, 41, 42.

Et ainsi on pourra éprouver à faire la ligne, en prenant 153, 152, & les autres.

Et pour continuer la recherche des différentes sortes de lignes qu'on peut faire avec les seize nombres, & leurs complémens, je change le dernier des quatre nombres premierement pris, & mets 158 au lieu de 159, & j'aurai 162, 161, 160, 158, qui ensemble font 641, qui ôtez de 918, reste 277, qu'il faut faire avec quatre nombres, desquels on a reconnu cy-devant que l'un devoit être de

la seconde ligne, & les trois autres de la premiere.

Je prens donc 157, qui ôtez de 277, reste 120, qu'on ne sçauroit faire avec trois nombres; car si on prend les trois moindres 38, 41, 42, on aura 121. Il faut donc diminuer 157, & prendre 156, qui ôtez de 277, restera 121, qu'on fera avec trois nombres, sçavoir avec 38, 40, 43.

On pourroit continuer cette recherche prenant un autre nombre que 156, puis diminuant encore 158, & revenant après à faire la même chose à 160, 161, & enfin à 162. Ce qui seroit trop long à déduire.

La premiere ligne entre 33 & 34, sera donc 162, 161, 160, 158, 156, 38, 40, 43.

Pour la seconde ligne qui est entre 34 & 164, & dont les huit nombres doivent faire ensemble 787, je cherche à la faire comme s'ensuit, avec les nombres qui restent; sçavoir,

|     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 42  | 44  | 45  | 46  | 47  | 48  | 49  | 50  |
| 155 | 153 | 152 | 151 | 150 | 149 | 148 | 147 |

Parce que la somme des angles 14 & 164 est 198, qui ne differe que de l'unité de 197, qui est la somme de chaque couple de nombres l'un portant l'autre, il faudra prendre quatre nombres de la ligne inferieure, & quatre de la superieure, à telle condition toutefois qu'on prenne une quotité impaire de nombres impairs, afin que la somme soit impaire, comme est 787. Je prendrai donc par exemple 155, 153, 152, 150: la somme est 610, qui ôté de 787, reste 177, qu'on ne peut pas faire avec quatre nombres, car les quatre qui restent sont 46, 48, 49, 50, qui ensemble font 193: & si je prens 147 au lieu de 150, la somme sera encore trop petite.

Et parce que la difference de 193 à 177 est grande, je diminuë tout à coup 152 de beaucoup, & sans s'amuser à prendre 151, ou 150, l'on prendra d'abord les quatre

nombres 155, 153, 148, 147, dont la somme est 603, qui ôtée de 787, reste 184; mais les quatre nombres qui restent, ſçavoir 45, 46, 47, 48, font 186. Ils ſeront donc trop grands de 2, & ainſi il faudra diminuer 153. Je prens 152 en ſa place, & laiſſe 148 & 147, puisſque 153 n'eſt diminué que de 1.

On aura donc 155, 152, 148, 147, dont la ſomme eſt 602, qui ôtée de 787, reſte 185; les quatre nombres qui reſtent ſont 44, 46, 47, 48, dont la ſomme eſt 185, ainſi qu'il eſt requis. On a donc les nombres qui doivent être entre 34 & 164, qui ſeront 155, 152, 148, 147, 44, 46, 47, 48.

Mais ſi on vouloit chercher plus outre, on diminueroit encore 152, prenant d'autres nombres que 148 & 147.

Et enfin on diminueroit le premier nombre 155, prenant 153 en ſa place, & cherchant comme devant, on trouvera que les huit nombres ſuivans 153, 152, 150, 147, 49, 48, 46, 42 étant joints enſemble, font 787.

Je mets donc au-deſſous de 918, les nombres de la ligne 34, 33, cy-devant trouvez; & au-deſſous de 787, ceux de la ligne 34, 164, & leurs complémens à côté, comme on voit ici,

| 34  | 33  | 34  | 164 |
|-----|-----|-----|-----|
| 918 |     | 787 |     |
| 162 | 35  | 153 | 44  |
| 161 | 36  | 152 | 45  |
| 160 | 37  | 150 | 47  |
| 158 | 39  | 147 | 50  |
| 156 | 41  | 49  | 148 |
| 43  | 154 | 48  | 149 |
| 40  | 157 | 46  | 151 |
| 38  | 159 | 42  | 155 |

Ces nombres étant ainſi diſpoſez, je les range à l'en-  
tour

tour de la figure de 8 marquée Ben la page 267, entre leurs angles qui sont marquez au-dessus d'iceux, & en fais la figure suivante de 10.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 34  | 162 | 161 | 160 | 158 | 156 | 43  | 40  | 38  | 33  |
| 153 | 19  | 176 | 175 | 174 | 173 | 26  | 25  | 20  | 44  |
| 152 | 170 | 9   | 185 | 186 | 183 | 18  | 10  | 27  | 45  |
| 150 | 168 | 16  | 1   | 195 | 194 | 4   | 181 | 29  | 47  |
| 147 | 165 | 180 | 192 | 6   | 7   | 189 | 17  | 32  | 50  |
| 49  | 31  | 184 | 8   | 190 | 191 | 5   | 13  | 166 | 148 |
| 48  | 30  | 15  | 193 | 3   | 2   | 196 | 182 | 167 | 149 |
| 46  | 28  | 187 | 12  | 11  | 14  | 179 | 188 | 169 | 151 |
| 42  | 177 | 21  | 22  | 23  | 24  | 171 | 172 | 178 | 155 |
| 164 | 35  | 36  | 37  | 39  | 41  | 154 | 157 | 159 | 163 |

Mais cette méthode est trop longue, quoi qu'elle soit de grande commodité aux petites figures, comme de six ou huit nombres à chaque côté : toutefois on pourroit choisir tels nombres pour les angles & pour les lignes qu'on se trouveroit si embarrassé, qu'on seroit obligé de recourir à cette voye, si on ne vouloit point changer les nombres; & c'est ici le dernier refuge : car puisque par cette méthode on trouve toutes les façons de faire les lignes avec les nombres donnez, si on la met en pratique, nécessairement elle découvrira, (si on la suit de point en point & sans rien omettre) si la ligne se peut parfaire avec les nombres dont on se veut servir.

Il la faudroit aussi nécessairement mettre en usage, si on vouloit avoir toutes les façons possibles de faire une Table sans changer les nombres de chaque enceinte.

Maintenant il faut passer aux deux autres voyes, par l'une desquelles on fera l'enceinte de 12, & par l'autre la dernière qui est de 14.

Il faut premièrement sçavoir combien chaque ligne doit avoir en l'enceinte de 12; ce qui se fait multipliant

# 274 DES QUARRÉZ MAGIQUES.

197 par 6 , le produit sera 1182 , car puisque chaque couples de nombres , l'un portant l'autre , doit faire 197, les six couples , qui sont douze nombres , feront 1182.

Je choisis après les deux nombres qu'il faut mettre aux angles ; on a pris pour la Table précédente tous les nombres jusques à 50 , & leurs complémens ; on prendra pour ces deux angles ici les deux nombres suivans , sçavoir 51 , 52 , & leurs complémens 146 , 145 , qui seront disposez aux angles de la figure , comme on voit ici.

J'assemble après 51 & 52 , la somme est 103 , qui ôtée de 1182 , qui est la somme des douze nombres de la ligne , reste 1079 pour les dix nombres qui restent à mettre entre 51 & 52.

Pareillement j'assemble 51 & 145 , la somme est 196 , qui ôtée de 1182 , reste 986 pour les dix nombres qui doivent être entre 51 & 145.

Cela fait, je prens

|       |    |       |     |
|-------|----|-------|-----|
| 51    | 52 | 51    | 145 |
| <hr/> |    | <hr/> |     |
| 1079  |    | 989   |     |

les vingt nombres qui suivent 52 , & leurs complémens , car il en faut dix en chacune des lignes entre les angles.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 53  | 54  | 55  | 56  | 57  | 58  | 59  | 60  | 61  | 62  |
| 144 | 143 | 142 | 141 | 140 | 139 | 138 | 137 | 136 | 135 |
|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 63  | 64  | 65  | 66  | 67  | 68  | 69  | 70  | 71  | 72  |
| 134 | 133 | 132 | 131 | 130 | 129 | 128 | 127 | 126 | 125 |

Seconde méthode: Pour cette enceinte on se servira de la seconde méthode qui est la plus facile de toutes , & se fait comme s'ensuit.

Je divise 1079 par 10 , à cause que les dix nombres doivent faire 1079 ; tous ensemble on aura 108 moins 1 ;

de sorte que neuf des nombres vaudront 108, & le dixième vaudra 107 : (ce qui se doit entendre l'un portant l'autre) chaque couple de nombres vaudra donc 216, excepté une qui ne vaudra que 215.

Mais parce qu'il n'y a que deux nombres qui puissent faire 216, sçavoir 144 & 12, il faudra prendre quelques uns des plus grands nombres, afin que les autres en soient d'autant diminuez. Par exemple, on prendra 144 & 143, dont la somme est 287, qui ôcée de 1079, reste 792, qui divisé par 8, à cause des huit nombres qui restent, on aura 99 : chaque couple de nombres vaudra donc 198, & il y a quatre couples.

On observera de faire en sorte que les nombres qui resteront pour l'autre ligne, soient de suite le plus qu'on pourra, car on y trouvera plus de facilité.

On fera aisément 198 plusieurs fois, & tant qu'on voudra, comme si on prend 142, 56, | 140, 58, | 138, 60, | & 136, 62. |

Mais on le peut encore trouver d'une autre sorte, prenant des couples de nombres qui valent plus de 198, & d'autres qui valent d'autant moins, car il arrive par fois qu'on ne peut trouver deux nombres qui fassent ce qui est requis.

Si donc je ne pouvois faire 198 en deux nombres, j'en prendrois deux qui fassent par exemple 188, sçavoir 125 & 63, & en échange il en faudroit prendre deux qui fissent ensemble 208, comme 142, 66.

Le premier couple vaut 10 moins que 198, & le second vaut 10 plus : je prendrai après 126, 64, qui font ensemble 190, qui est huit moins que 198; & en échange je prendrai 141, 65, dont la somme est 206, qui surpasse 198 de huit.

On aura donc 144, 143, 142, 141, 125, 126, 63, 64, 65, 66, pour les dix nombres qu'il faut mettre entre 51, 52.

Pour la ligne 51, 145, je divise 986 par dix, & je trou-



# 276 DES QUARREZ MAGIQUES.

ve 98, & reste 6, ce qui me montre qu'il y aura six nombres qui auront 99 l'un portant l'autre, & quatre qui auront 98.

Il faudra donc trouver trois couples de nombres, dont chacune sera 198, double de 99, & deux couples de 196 chacune.

Je marque les nombres de la ligne précédente avec une petite ligne ou tiret au-dessous, & me sers des dix qui restent, qui étant de suite en quotité paire, (car il y en a premièrement six de suite, & puis quatre, ce qu'il faut observer le plus qu'on peut pour la facilité, sçavoir que les nombres qui suivent soient en quotité paire) il sera facile de trouver des couples de 198 & de 196; les trois couples de 198 seront 140, 58, | 138, 60, | & 136, 62. | Les deux couples de 196 seront 67, 129, | & 69, 127: on aura donc 140, 138, 136, 129, 127, 69, 67, 62, 60, 58 pour la ligne 51, 145.

Ayant ces nombres, afin de ne se point méprendre & de n'être point en danger de les mettre en une ligne autre que celle où ils doivent être mis, & aussi pour avoir plus en mains leurs complémens, on mettra les nombres de chaque ligne au-dessous des deux nombres qui sont aux angles qui la bornent, comme on voit cy-dessous, & leurs complémens à côté.

| 51   | 52  | 51  | 145 |
|------|-----|-----|-----|
| 1079 |     | 986 |     |
| 144  | 53  | 140 | 57  |
| 143  | 54  | 138 | 59  |
| 142  | 55  | 136 | 61  |
| 141  | 56  | 129 | 68  |
| 125  | 72  | 127 | 70  |
| 126  | 71  | 69  | 128 |
| 63   | 134 | 67  | 130 |
| 64   | 133 | 62  | 135 |
| 65   | 132 | 60  | 137 |
| 66   | 131 | 58  | 139 |

Puis on disposera ces lignes autour de la figure de dix cy-devant trouvée, & l'on aura la figure suivante de douze.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 73  | 51  | 144 | 143 | 142 | 141 | 125 | 126 | 63  | 64  | 65  | 66  | 74  |
|     | 140 | 34  | 162 | 161 | 160 | 158 | 156 | 43  | 40  | 38  | 33  | 57  |
|     | 138 | 153 | 19  | 176 | 175 | 174 | 173 | 26  | 25  | 20  | 44  | 59  |
|     | 136 | 152 | 170 | 9   | 185 | 186 | 183 | 18  | 10  | 27  | 45  | 61  |
|     | 129 | 150 | 168 | 16  | 1   | 195 | 194 | 4   | 181 | 29  | 47  | 68  |
|     | 127 | 147 | 165 | 180 | 192 | 6   | 7   | 189 | 17  | 32  | 50  | 70  |
|     | 69  | 49  | 31  | 184 | 8   | 190 | 191 | 5   | 13  | 166 | 148 | 128 |
|     | 67  | 48  | 30  | 15  | 193 | 3   | 2   | 196 | 182 | 167 | 149 | 130 |
|     | 62  | 46  | 28  | 187 | 12  | 11  | 14  | 179 | 188 | 169 | 151 | 135 |
|     | 60  | 42  | 177 | 21  | 22  | 23  | 24  | 171 | 172 | 178 | 155 | 137 |
|     | 58  | 164 | 35  | 36  | 37  | 39  | 41  | 154 | 157 | 159 | 163 | 139 |
| 123 | 145 | 53  | 54  | 55  | 56  | 72  | 71  | 134 | 133 | 132 | 131 | 124 |

Cette méthode est la plus facile de toutes, mais il seroit aisé de la découvrir en voyant la figure, si l'on n'y apporte un peu d'artifice; ce qui se pourra faire en mêlant davantage les nombres.

Par la troisième méthode les figures sont rendues plus embarrassées, parce que suivant ce qu'elle ordonne, on ne s'étudie pas à prendre les nombres de suite, comme on a fait cy-devant; mais on les prend par hazard selon qu'ils se rencontrent, considérant toutefois à peu-près ce qu'il faut pour parfaire la ligne.

On fera la même opération qu'aux précédentes, pour sçavoir combien chaque ligne doit avoir, sçavoir multipliant 197 par 7; (car 197 est la somme de chaque couple de nombres l'un portant l'autre par toute la figure, & y ayant quatorze nombres en chaque ligne de cette dernière enceinte, on aura sept couples) si donc on multiplie 197 par 7, le produit sera 1379, qui est la somme des quatorze nombres de chaque ligne de la dernière enceinte.

Je prendrai donc comme cy-devant , pour les angles deux nombres qui s'entresuivent ; par exemple , les deux moindres de ceux qui restent , sçavoir 73 , 74 , & leurs complémens 124 , 123 , & je les disposerai comme on voit ici , & ainsi qu'ils doivent être dans la figure , & qu'ils seront après appliquez sur les angles de la figure de douze , comme l'on voit de l'autre part.

J'assemble après 73 & 74 : la somme est

73      74 147 , qui ôtée de 1379 , ( qui est la somme des quatorze nombres de chaque ligne ) reste 1232 pour les douze nombres qu'il faudra mettre entre 73 & 74.

Je prens aussi la somme de 73 & 123 ,  
123      124 qui est 196 , qui ôtée de 1379 , reste 1183 pour les douze nombres qui doivent être mis entre 73 & 123.

On disposera après de suite les vingt-quatre nombres qu'il faut mettre dans ces lignes , & leurs complémens.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 75  | 76  | 77  | 78  | 79  | 80  | 81  | 82  | 83  | 84  | 85  | 86  |
| 122 | 121 | 120 | 119 | 118 | 117 | 116 | 115 | 114 | 113 | 112 | 111 |
| 87  | 88  | 89  | 90  | 91  | 92  | 93  | 94  | 95  | 96  | 97  | 98  |
| 110 | 109 | 108 | 107 | 106 | 105 | 104 | 103 | 102 | 101 | 100 | 99  |

Je dispose comme cy-devant les nombres qu'il faut pour chaque ligne , lesquels on vient de trouver.

Pour remplir ces lignes par la troisième méthode : Par exemple , la ligne qui doit avoir 1232 ,

je vois que les nombres des angles sont tous deux petits , c'est pourquoi il faudra se récompenser aux douze nombres qu'on cherche , & pour cet effet prendre davantage des nombres de la seconde ligne , que de ceux de la pre-

miere ; & sur tout observer, que les nombres impairs qu'on prendra soient en quotité paire , afin qu'ils puissent faire un nombre pair tel qu'est 1232. Je prens donc par exemple les nombres qui s'ensuivent , que je mets au-dessous de 1232.

|      |     |
|------|-----|
| 1232 |     |
| —122 | 75  |
| —121 | 76  |
| —120 | 77  |
| —78  | 119 |
| —79  | 118 |
| 117  |     |
| 116  |     |
| 115  |     |
| 83   |     |
| 113  |     |
| —85  | 112 |
| 111  |     |
| 1260 |     |

La somme de ces nombres est 1260 , mais il ne falloit trouver que 1232 , qui ôtée de 1260 , reste 28. Il faut donc diminuer ces nombres de 28 , ce qui se peut faire en diverses façons, comme mettant en la place de quelqu'un des nombres qui sont ici , un nombre qui soit moindre de 28 , pourvû que ce nombre ne soit point déjà employé dans la ligne , ni son complément aussi. Par exemple , si au lieu de 122 on prenoit 94 , ou bien on peut faire cette déduction en deux nombres ou plus ; ainsi au lieu de 116 on peut prendre 103 , & 100 au lieu de 115 : ce qui diminueroit les nombres de 28.

Mais il ya encore une autre méthode , par laquelle on change les nombres de la ligne , en d'autres qui ont leurs complémens employez dans la même ligne ; mais en ce cas il ne faut diminuer ou augmenter le nombre que de la moitié , comme ici de 14 , parce qu'on sera obligé de changer aussi les complémens ; ce qui fait doubler la correction , laquelle par conséquent ne se doit faire que de la moitié , comme on verra incontinent.

On se peut aussi servir de ces deux voyes ensemble , pour corriger le défaut ou excès des nombres.

Nous choisirons ici la seconde méthode pour corriger l'excès de 28 , lequel doit être réduit à la moitié , sçavoir 14 , comme il a été dit. Pour changer 122 , je cherche dans la ligne quelque petit nombre dont le complé-

ment soit beaucoup moindre ; par exemple 85, dont le complément est 112, qui est moindre de 10 que 122. Je mets donc 112 à la place de 85, & de même à la place de 122 je mets son complément 75, comme on voit à côté de la ligne ; & ainsi on aura 20 de diminution, au lieu de 10, car on ôte 122, & on met 112 ; comme aussi on ôte 85, & on met 75 à sa place.

Reste donc à diminuer les nombres de 4, pour achever 14.

Parce que les nombres qu'on a pris sont eux, ou leurs complémens tous de suite ( car le complément de 78 est 119, qui précède 120, & ainsi des autres ) il sera facile de voir de combien les complémens des nombres de la ligne seront moindres que celui avec lequel on les voudra comparer. Par exemple, le complément de 79 sera moindre de trois que 121, parce que 79 est le troisième nombre après 121, & pour la même raison le complément de 78 sera moindre de 1, que 120. Or 3 & 1 font 4, qui est la correction requise ; je mets donc au lieu de 121, 120, 78, 79, leurs complémens sçavoir 76, 77, 119, 118, comme on voit de l'autre part, où les complémens sont écrits à côté de leurs nombres, lesquels nombres sont marquez pour montrer qu'ils ne servent plus de rien, & qu'en leur place il faut prendre ceux qui sont à côté.

Les nombres de cette ligne, dont les angles sont 73, 74, seront donc 75, 76, 77, 119, 118, 117, 116, 115, 83, 113, 112, 111, qui font ensemble la somme requise 1232.

Pour l'autre ligne, dont les angles sont 73, 123, & qui doit contenir 1183 en ses douze nombres, je prens les nombres qui restent ; sçavoir,

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |    |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|
| 87  | 88  | 89  | 90  | 91  | 92  | 93  | 94  | 95  | 96  | 97  | 98 |
| 110 | 109 | 108 | 107 | 106 | 105 | 104 | 103 | 102 | 101 | 100 | 99 |

Et parce que les angles 73, 123, valent à peu-près 197,

197, qui est la valeur que doit avoir chaque couple de nombres l'un portant l'autre, il faut aussi que les nombres qu'on emploiera soient à peu près de cette valeur : mais on prendra garde d'avoir une quotité impaire de nombres impairs, parce que la somme des douze nombres, sçavoir 1183, est impaire.

On remarquera aussi que les nombres qui sont l'un dessus l'autre, valant ensemble 197, & n'étant differens l'un de l'autre que de l'unité ; si on prend un des nombres de dessous, avec le suivant de la ligne supérieure, comme 110, & 88, on aura 1 plus que 197 : mais si avec le nombre de dessous, on prend le précédent de la ligne supérieure, comme 109 & 87, on aura 1 moins que 197.

Si donc on veut que les nombres aient 1183, 197 l'un portant l'autre, il faut mêler ces deux façons, & prendre les nombres qu'on voit ici au-dessous de 1183, qui ensemble font 1181, qui est 2 moins qu'il ne faut : d'où s'enfuit qu'il faudra augmenter un des nombres de 1, car ainsi le complément étant augmenté de 1, toute l'augmentation sera de 2. Or cela se peut faire en beaucoup de manieres ; par exemple, mettant 108 au lieu de 107 ; car cela étant, il faudra mettre 90, complément de 107, à la place de 107, & 108, complément de 89, à la place de 89, comme on voit ici ; & ainsi 89 & 107 seront chacun augmentez de 1, puisqu'au lieu d'iceux on aura 90 & 108.

Voici donc les nombres de la ligne qui doit être entre les angles 73, 123, qui sont 110, 88, 108, 90, 106, 92, 93, 103, 102, 96, 97, 98. On mettra donc, comme on a fait ci-devant, les nombres de ces deux lignes au-dessous de

# 282 DES QUARREZ MAGIQUES.

leurs angles, & leurs complémens à côté, comme l'on voit ci-après.

| 73  | 74  |  |  | 73  | 123 |
|-----|-----|--|--|-----|-----|
| 75  | 122 |  |  | 110 | 87  |
| 76  | 121 |  |  | 88  | 109 |
| 77  | 120 |  |  | 108 | 89  |
| 119 | 78  |  |  | 90  | 107 |
| 118 | 79  |  |  | 106 | 91  |
| 117 | 80  |  |  | 92  | 105 |
| 116 | 81  |  |  | 93  | 104 |
| 115 | 82  |  |  | 103 | 94  |
| 83  | 114 |  |  | 102 | 95  |
| 113 | 84  |  |  | 96  | 101 |
| 112 | 85  |  |  | 97  | 100 |
| 111 | 86  |  |  | 98  | 99  |

Cela fait, je les dispose autour de la précédente figure de 12, & on aura la figure de 14 parfaite, comme on la voit cy-après.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 73  | 75  | 76  | 77  | 119 | 118 | 117 | 116 | 115 | 83  | 113 | 112 | 111 | 74  |
| 110 | 51  | 144 | 143 | 142 | 141 | 125 | 126 | 63  | 64  | 65  | 66  | 52  | 87  |
| 88  | 140 | 34  | 162 | 161 | 160 | 158 | 156 | 43  | 40  | 38  | 33  | 57  | 109 |
| 108 | 138 | 153 | 19  | 176 | 175 | 174 | 173 | 26  | 25  | 20  | 44  | 59  | 89  |
| 90  | 136 | 152 | 170 | 9   | 185 | 186 | 183 | 18  | 10  | 27  | 45  | 61  | 107 |
| 106 | 129 | 150 | 168 | 16  | 1   | 195 | 194 | 4   | 181 | 29  | 47  | 68  | 91  |
| 92  | 127 | 147 | 165 | 180 | 192 | 6   | 7   | 189 | 17  | 32  | 50  | 70  | 105 |
| 93  | 69  | 49  | 31  | 184 | 8   | 190 | 191 | 5   | 13  | 166 | 148 | 128 | 104 |
| 103 | 67  | 48  | 30  | 15  | 193 | 3   | 2   | 196 | 182 | 167 | 149 | 130 | 94  |
| 102 | 62  | 46  | 28  | 187 | 12  | 11  | 14  | 179 | 188 | 169 | 151 | 135 | 95  |
| 96  | 60  | 42  | 177 | 21  | 22  | 23  | 24  | 171 | 172 | 178 | 155 | 137 | 101 |
| 97  | 58  | 164 | 35  | 36  | 37  | 39  | 41  | 154 | 157 | 159 | 163 | 139 | 100 |
| 98  | 145 | 53  | 54  | 55  | 56  | 72  | 71  | 134 | 133 | 132 | 131 | 146 | 99  |
| 123 | 122 | 121 | 120 | 78  | 79  | 80  | 81  | 82  | 114 | 84  | 85  | 86  | 124 |

On pourroit bien faire que la figure auroit à ses angles quatre nombres de suite, ſçavoir 97, 98, 99, 100, qui ſeroient diſpoſez comme on voit cy-après.

La ligne qui doit être entre 97 & 98 auroit 1184 en ſes 12 nombres, & celle qui ſeroit miſe entre 97 & 99 aura 1183, on trouvera que la première doit avoir deux couples de 196 chacun, & quatre de 198, & la ſeconde devroit avoir deux couples de 196, trois de 198, & un de 197, mais

parce qu'on ne peut faire aucun couple de 197, à cauſe qu'il faudroit prendre deux nombres qui ſeroient complétement l'un de l'autre, au lieu du couple de 197, j'en prendrai un de 198, & en récompénſe au lieu d'un de 196, j'en prendrai un de 195; on en aura donc quatre de 198, un de 196, & un de 195. Les nombres dont il ſe faut ſervir ſont les ſuivans.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 73  | 74  | 75  | 76  | 77  | 78  | 79  | 80  | 81  | 82  | 83  | 84  |
| 124 | 123 | 122 | 121 | 120 | 119 | 118 | 117 | 116 | 115 | 114 | 113 |
|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 85  | 86  | 87  | 88  | 89  | 90  | 91  | 92  | 93  | 94  | 95  | 96  |
| 112 | 111 | 110 | 109 | 108 | 107 | 106 | 105 | 104 | 103 | 102 | 101 |

|       |  |
|-------|--|
| 1183  | La ligne qui doit être entre 97 & 98, & qui vaut 1184, ſe fera aiſément, prenant |
| 112   | 73, 123,   75, 121, pour les deux couples  |
| 86    | de 196;   & 120, 78,   118, 80,   116, 82,                                       |
| 110   | 114, 84,   pour les quatre couples de  |
| 88    | 198  |
| 103   | L'autre ligne qui doit être entre 97 &   |
| 90    | 99, ne ſe fera pas ſi aiſément, parce que  |
| 106   | la ſomme des nombres eſt impaire. On   |
| — 72  | prendra 112, 86,   110, 88,   108, 90,   |
| 93    | 106, 92, pour les quatre couples de 198,   |
| — 103 | & 93, 103 pour le couple de 196; mais  |
| 95    |  |
| 96    |  |



on ne scauroit faire 195 avec les nombres qui restent. J'en prens donc deux au hasard, en sorte toutefois que l'un d'eux soit pair, & l'autre impair, afin que leur somme soit impaire, comme l'est 195. Par exemple, je prens 95, 96, dont la somme est 191, qui est moindre de 4 que 195. Il faut donc augmenter un des nombres de 2, & pour le faire, j'en choisis un, qui étant augmenté de 2, ne se trouve point dans la ligne, mais que son complément y soit : par exemple, je change 92, parce que 94 qui le surpasse de 2, n'est pas dans la ligne, mais son complément 103 s'y trouve.

Je mets donc au lieu de 92, son complément 105, & au lieu de 103, son complément 94, & on aura les douze nombres de cette ligne. Je les dispose après comme l'on voit ici, & leurs complémens après eux.

| 97  | 98  |  | 97  | 99  |
|-----|-----|--|-----|-----|
| 73  | 124 |  | 112 | 85  |
| 123 | 74  |  | 86  | 111 |
| 75  | 122 |  | 110 | 87  |
| 121 | 76  |  | 88  | 109 |
| 120 | 77  |  | 108 | 89  |
| 78  | 119 |  | 90  | 107 |
| 118 | 79  |  | 106 | 91  |
| 80  | 117 |  | 105 | 92  |
| 116 | 81  |  | 93  | 104 |
| 82  | 115 |  | 94  | 103 |
| 114 | 83  |  | 95  | 102 |
| 84  | 113 |  | 96  | 101 |

Je mets donc ces quatre angles & ces quatre lignes en la disposition que l'on voit dans la page qui suit autour de la figure de 12, avec laquelle on pourra remplir l'espace vuide.

# DES QUARREZ MAGIQUES. 285.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 97  | 73  | 123 | 75  | 121 | 120 | 78  | 118 | 80  | 116 | 82  | 114 | 84  | 98  |
| 112 |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     | 85  |
| 86  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     | 111 |
| 110 |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     | 87  |
| 88  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     | 109 |
| 108 |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     | 89  |
| 90  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     | 107 |
| 106 |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     | 91  |
| 105 |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     | 92  |
| 93  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     | 104 |
| 94  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     | 103 |
| 95  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     | 102 |
| 96  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     | 101 |
| 99  | 124 | 74  | 122 | 76  | 77  | 119 | 79  | 117 | 81  | 115 | 83  | 113 | 100 |

Il faut remarquer, qu'avec la méthode dont on s'est servi pour faire cette figure; on pourra construire les autres figures intérieures, comme de 12, 10, 8 ou 6, & par la même façon qu'on a fait ci-devant celle de 8 qui est au-dedans de celle de 14; se servant d'une autre de 8 qui ne dépend que d'elle-même, & dont le plus grand nombre est 64. Or ce qui fait que les figures intérieures se peuvent construire de celle-ci, & ses semblables, est que les nombres & leurs complémens vont de suite dans toutes les enceintes des figures, & n'anticipent point sur les nombres.

# 286. DES QUARREZ MAGIQUES.

destinez pour les figures suivantes. Ainsi en la Table de 6 comprise dans celle de 14, les 36 nombres sont les 18 moindres, & leurs complémens pris, eu égard à 196.

En la Table de 8, les 64 nombres sont les 32 moindres, & leurs complémens pris sur 196.

En celle de 10, les 100 nombres sont les 50 moindres, & leurs complémens.

Et en celle de 12, les 144 nombres sont les 72 moindres, & leurs complémens pris toujours sur 196.

Mais pour faire de la précédente Table de 14 une figure moindre: par exemple, celle de 10 en laquelle le plus grand nombre soit 100, il faut laisser les 50 premiers & moindres nombres en la disposition qu'on les trouvera en la Table de 10, faisant partie de celle de 14; & pour les autres 50 qui sont les complémens des 50 premiers, au lieu qu'en la Table de 10 qui fait partie de celle de 14, on les a pris sur 196, il ne les faudra prendre que sur 100: & afin de ne se point tromper, & de ne prendre point un nom pour un autre, on écrira les 50 premiers nombres, sçavoir 1, 2, 3, 4, &c. & au dessous dans une seconde ligne, leurs complémens pris sur 196, comme ils sont ci-devant; & dans une troisième ligne au-dessous, on mettra les complémens des mêmes nombres de la première ligne pris sur 100, comme on voit ici.

| 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 11  | 12  |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 196 | 195 | 194 | 193 | 192 | 191 | 190 | 189 | 188 | 187 | 186 | 185 |
| 100 | 99  | 98  | 97  | 96  | 95  | 94  | 93  | 92  | 91  | 90  | 89  |

| 13  | 14  | 15  | 16  | 17  | 18  | 19  | 20  | 21  | 22  | 23  | 24  |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 184 | 183 | 182 | 181 | 180 | 179 | 178 | 177 | 176 | 175 | 174 | 173 |
| 88  | 87  | 86  | 85  | 84  | 83  | 82  | 81  | 80  | 79  | 78  | 77  |

# DES QUARREZ MAGIQUES. 279

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 25  | 26  | 27  | 28  | 29  | 30  | 31  | 32  | 33  | 34  | 35  | 36  |
| 172 | 171 | 170 | 169 | 168 | 167 | 166 | 165 | 164 | 163 | 162 | 161 |
| 76  | 75  | 74  | 73  | 72  | 71  | 70  | 69  | 68  | 67  | 66  | 65  |

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 37  | 38  | 39  | 40  | 41  | 42  | 43  | 44  | 45  | 46  | 47  | 48  |
| 160 | 159 | 158 | 157 | 156 | 155 | 154 | 153 | 152 | 151 | 150 | 149 |
| 64  | 63  | 62  | 61  | 60  | 59  | 58  | 57  | 56  | 55  | 54  | 53  |

|     |     |
|-----|-----|
| 49  | 50  |
| 148 | 147 |
| 52  | 51  |

A

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 34  | 162 | 161 | 160 | 158 | 156 | 45  | 40  | 38  | 33  |
| 153 | 19  | 176 | 175 | 174 | 173 | 26  | 25  | 20  | 44  |
| 152 | 170 | 9   | 185 | 186 | 183 | 18  | 10  | 27  | 45  |
| 150 | 168 | 16  | 1   | 195 | 194 | 4   | 181 | 29  | 47  |
| 147 | 165 | 180 | 192 | 6   | 7   | 189 | 17  | 32  | 50  |
| 49  | 31  | 184 | 8   | 190 | 191 | 5   | 13  | 166 | 148 |
| 48  | 30  | 15  | 193 | 3   | 2   | 196 | 182 | 167 | 149 |
| 46  | 28  | 187 | 12  | 11  | 14  | 179 | 188 | 169 | 151 |
| 42  | 177 | 21  | 22  | 23  | 24  | 171 | 172 | 178 | 155 |
| 164 | 35  | 36  | 37  | 39  | 41  | 154 | 157 | 159 | 163 |

B

|    |    |    |    |    |    |     |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|-----|----|----|----|
| 34 | 66 | 65 | 64 | 62 | 60 | 43  | 40 | 38 | 33 |
| 57 | 19 | 80 | 79 | 78 | 77 | 26  | 25 | 20 | 44 |
| 56 | 74 | 9  | 89 | 90 | 87 | 18  | 10 | 27 | 45 |
| 54 | 72 | 16 | 1  | 99 | 98 | 4   | 85 | 29 | 47 |
| 51 | 69 | 84 | 96 | 6  | 7  | 93  | 17 | 32 | 50 |
| 49 | 31 | 88 | 8  | 94 | 95 | 5   | 13 | 70 | 52 |
| 48 | 30 | 15 | 97 | 3  | 2  | 100 | 86 | 71 | 53 |
| 46 | 28 | 91 | 12 | 11 | 14 | 83  | 92 | 73 | 55 |
| 42 | 81 | 21 | 22 | 23 | 24 | 75  | 76 | 82 | 59 |
| 68 | 35 | 36 | 37 | 39 | 41 | 58  | 61 | 63 | 67 |

La Table cottée A, est celle de 10 qui fait partie de celle de 14, & contient les nombres de la première & seconde ligne.

La Table cõtée B, est celle de 10 simplement, & ne fait partie de nulle autre, & contient les nombres de la première & troisième ligne.

En cette Table B, les nombres de la première ligne, sçavoir depuis 1 jusques à 50, sont aux mêmes lieux qu'en la Table A.

Et ceux de la troisième ligne, sçavoir depuis 51 jusques à 100, sont à la place de ceux de la seconde ligne, en la Table A; ainsi pour faire la Table B, je commence par le premier nombre 34 de la Table A, lequel étant moindre que 50, je le laisse en la Table B au même lieu, & poursuivant je trouve 162, 161, 160, 158, 156, qui surpassent 50, c'est pourquoi je cherche dans la seconde ligne le lieu où ils sont, & prens au lieu d'eux le nombre qui est dans la troisième ligne, sçavoir 66, 65, 64, 62, 60, que je mets ensuite de 34, & aux mêmes lieux où étoient 162, 161, 160, 158, 156; & ainsi continuant en la même sorte, on achevera la Table B, comme elle est ici.

Mais on n'est pas obligé de faire les Tables en telle sorte, que les nombres d'une enceinte n'anticipent pas sur l'autre, car on peut prendre les nombres au hazard & comme ils viendront, & si on ne laissera pas d'avoir une figure parfaite, mais elle ne pourra pas servir, comme la précédente, à faire une figure moindre. Par exemple, si en la ligne intérieure de 10 il y avoit des nombres plus grands que 50, & moindres que 99, on ne pourroit pas la transformer en une simple, dont le plus grand nombre fût 100.

On pourroit aussi mettre les nombres de suite aux enceintes sans les entremêler; mais par un ordre contraire au précédent, sçavoir mettant les nombres du milieu à la figure de 4, & les suivans, avec leurs complémens à l'en-

ceinte

# DES QUARREZ MAGIQUES. 289

ceinte de 6, & ainsi continuant jusques à la dernière enceinte.

Par ce moyen la Table de 4 contiendrait les nombres suivans.

|    |     |     |     |     |     |     |     |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 98 | 97  | 96  | 95  | 94  | 93  | 92  | 91  |
| 99 | 100 | 101 | 102 | 103 | 104 | 105 | 106 |

L'enceinte de la Table de 6 contiendra,

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 90  | 89  | 88  | 87  | 86  | 85  | 84  | 83  | 82  | 81  |
| 107 | 108 | 109 | 110 | 111 | 112 | 113 | 114 | 115 | 116 |

Celle de la Table de 8 contiendrait,

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 80  | 79  | 78  | 77  | 76  | 75  | 74  | 73  | 72  | 71  | 70  | 69  |
| 117 | 118 | 119 | 120 | 121 | 122 | 123 | 124 | 125 | 126 | 127 | 128 |
| 68  | 67  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 129 | 130 |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |

Celle de 10 auroit,

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 66  | 65  | 64  | 63  | 62  | 61  | 60  | 59  | 58  | 57  | 56  | 55  |
| 131 | 132 | 133 | 134 | 135 | 136 | 137 | 138 | 139 | 140 | 141 | 142 |
| 54  | 53  | 52  | 51  | 50  | 49  |     |     |     |     |     |     |
| 143 | 144 | 145 | 146 | 147 | 148 |     |     |     |     |     |     |

Celle de 12 contiendrait

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 48  | 47  | 46  | 45  | 44  | 43  | 42  | 41  | 40  | 39  | 38  | 37  |
| 149 | 150 | 151 | 152 | 153 | 154 | 155 | 156 | 157 | 158 | 159 | 160 |
| 36  | 35  | 34  | 33  | 32  | 31  | 30  | 29  | 28  | 27  |     |     |
| 161 | 162 | 163 | 164 | 165 | 166 | 167 | 168 | 169 | 170 |     |     |

Enfin la dernière enceinte de 14 contiendrait le reste des nombres, qui est,

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 26  | 25  | 24  | 23  | 22  | 21  | 20  | 19  | 18  | 17  | 16  | 15  |
| 171 | 172 | 173 | 174 | 175 | 176 | 177 | 178 | 179 | 180 | 181 | 182 |

## 290 DES QUARREZ MAGIQUES.

14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3  
183 184 185 186 187 188 189 190 191 192 193 194

2 1  
195 196

Et la figure étant disposée selon la méthode dont il a été parlé ci-devant, on aura celle qui suit.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 195 | 171 | 25  | 180 | 23  | 179 | 21  | 178 | 24  | 175 | 16  | 14  | 177 | 1   |
| 3   | 28  | 31  | 32  | 164 | 163 | 162 | 161 | 160 | 159 | 48  | 47  | 27  | 194 |
| 189 | 30  | 49  | 133 | 66  | 137 | 65  | 136 | 54  | 135 | 63  | 147 | 167 | 8   |
| 13  | 39  | 146 | 129 | 77  | 118 | 70  | 121 | 71  | 72  | 130 | 51  | 158 | 184 |
| 4   | 44  | 144 | 73  | 116 | 85  | 110 | 89  | 109 | 82  | 124 | 53  | 153 | 193 |
| 15  | 40  | 58  | 78  | 84  | 103 | 93  | 92  | 106 | 113 | 119 | 139 | 157 | 182 |
| 185 | 156 | 56  | 128 | 86  | 98  | 100 | 101 | 95  | 111 | 69  | 141 | 41  | 12  |
| 7   | 155 | 138 | 74  | 83  | 102 | 96  | 97  | 99  | 114 | 123 | 59  | 42  | 190 |
| 187 | 154 | 57  | 117 | 107 | 91  | 105 | 104 | 94  | 90  | 80  | 140 | 43  | 10  |
| 6   | 168 | 142 | 122 | 115 | 112 | 87  | 108 | 88  | 81  | 75  | 55  | 29  | 191 |
| 186 | 152 | 145 | 67  | 120 | 79  | 127 | 76  | 126 | 125 | 68  | 52  | 45  | 11  |
| 188 | 46  | 50  | 64  | 131 | 60  | 132 | 61  | 143 | 62  | 134 | 148 | 151 | 9   |
| 5   | 170 | 166 | 165 | 33  | 34  | 35  | 36  | 37  | 38  | 149 | 150 | 169 | 192 |
| 196 | 26  | 172 | 17  | 174 | 18  | 176 | 19  | 173 | 22  | 181 | 183 | 20  | 2   |

---

### DE L'ATTACHEMENT DES FIGURES *partiales & interieures.*

**E**N la façon précédente de faire les figures, celles qui sont au-dedans sont en quelque façon détachées, ou plutôt sont capables d'être détachées l'une d'avec l'autre, ainsi qu'il a été dit : car si on ôte la première enceinte de la précédente figure de 14, la figure de 12 qui restera aura les conditions requises ; pareillement si on ôte deux enceintes, il demeurera une figure de 10, qui aura encore toutes les lignes égales.

Que si on ôte trois enceintes, on aura encore la table de 8, avec les mêmes conditions; & si on ôte quatre enceintes, on aura la Table de 6, qui sera encore selon les règles: enfin si on ôte cinq enceintes, il restera la Table de 4 qui aura pareille qualité.

Mais il y a moyen d'attacher les enceintes l'une à l'autre, en telle sorte que lorsqu'on en ôtera quelqu'une, les autres, ou laquelle on voudra de celles qui restent, ne soit point selon les loix; quoique la figure totale qui est ici de 14, demeure toujours bonne. Ce qui doit toujours être supposé, & en ceci il n'y a point de restriction; car on choisit laquelle on veut, pour être bonne, ou mauvaise.

Exemple. On pourra faire que la Table entière de 14 demeurant bonne, celle de 12 ne vaudra rien, mais les autres de 10, 8, 6 & 4, seront bonnes.

Ou bien qu'il n'y aura que celle de 10 qui n'ait pas les conditions requises, ou que ce sera celle de 8, 6 ou 4 seulement, en laquelle arrivera ce défaut.

On peut faire aussi qu'il y en aura deux, & lesquelles on voudra, qui n'auront pas les conditions requises, comme celles de 12 & de 10, ou de 12 & de 8, ou de 12 & de 6, ou de 12 & de 4.

Ou bien celles de 10 & de 8, de 10 & de 6, ou de 10 & de 4.

Ou celles de 8 & de 6, de 8 & de 4, ou de 6 & de 4.

Comme aussi on pourra faire que trois de ces figures ne vaudront rien, mais que les autres seront bonnes: par exemple, que celles de 12, 10 & 8 ne vaudront rien, ou: celles de 12, 10 & 6, ou de 12, 10, & 4, ou de 12; 8, 6, ou de 12, 8, 4, ou de 12, 6, 4, ou de 10, 8, 6, ou de 10, 8, 4, ou de 10, 6, 4, ou enfin de 8, 6 & 4. Les autres étant disposées selon les loix.

Pareillement on fera que quatre des Tables intérieures ne vaudront rien; & la cinquième sera bonne, & cette cinquième sera laquelle on voudra; sçavoir celle de 12,



ou celle de 10 & de 8, de 6 ou de 4, où il faut toujours supposer que l'extérieure, ou totale, soit bonne.

Enfin on peut faire en sorte que la seule figure totale sera bonne, & qu'aucune des particulières & intérieures n'aura les conditions requises.

Cet attachement se fait, transposant deux nombres d'une enceinte, à la place de deux autres équivalens d'une autre enceinte, en telle sorte que les nombres demeurent en la même ligne ou colonne où chacun d'eux étoit auparavant; de sorte que pour faire cette transmutation ou transport, il faut que les nombres soient vis-à-vis l'un de l'autre, & s'ils n'y sont pas, il les y faut mettre, changeant aussi leurs complémens pour les mettre vis-à-vis de leurs nombres, les laissant pourtant dans leur même enceinte, de peur que la figure totale ne soit gâtée. On peut voir ensuite des exemples de cela.

On veut faire en sorte qu'en la précédente figure de 14, qui est en la page 290, si on ôte une enceinte, la figure de 12 qui restera ne vaille rien, mais les autres 10, 8 & 6 soient bonnes. Je prens deux lignes prochaines & parallèles, l'une de la figure de

| A   | B   | C   | D   | 14, & l'autre de celle de 12,                     |
|-----|-----|-----|-----|---|
| 3   |     |     | 194 | & mets aussi leurs complémens vis-à-vis, comme on |
| 189 | 30  | 167 | 8   | voit ici. Or il ne faut point                     |
| 13  | 39  | 158 | 184 | comprendre dans ces lignes                        |
| 4   | 44  | 153 | 193 | les nombres qui sont aux an-                      |
| 15  | 40  | 157 | 182 | gles.   |
| 185 | 156 | 41  | 12  | Les nombres de la colom-                          |
| 7   | 155 | 42  | 190 | ne D, sont complémens de                          |
| 187 | 154 | 43  | 10  | ceux de la colonne A, &                           |
| 6   | 168 | 29  | 191 | ceux de la colonne C, sont                        |
| 186 | 152 | 45  | 11  | complémens de ceux de la                          |
| 188 | 46  | 151 | 9   | colonne B.  |
| 5   |     |     | 192 |   |

*Première Fig.*

Pour attacher ces deux

# DES QUARREZ MAGIQUES. 293

figures ensemble, je cherche deux nombres dans la colonne A, égaux à deux de la colonne B, comme s'enfuit.

La somme de 3 & de 189, est 192, je cherche en B ou en C deux nombres qui fassent pareillement 192. Prenons 30 pour un des deux nombres, l'autre doit être 162, lequel n'est point dans la ligne B. Je prens le suivant 39; le reste pour parvenir à 192 seroit 153, qui n'est point en B, prenant 44, il faudroit avoir 148 : & enfin prenant 40, le reste sera 152 qui se trouve en B; on aura donc 40 & 152 qui ensemble font autant que 3 & 189.

Mais parce que 3 & 189 ne sont pas vis-à-vis de 40 & 152, il les y faut mettre en plaçant 3 à la place de 15, & ensuite 15 à la place de 3; & par même moyen 194, complément de 3, en la colonne D, en la place de 182, complément de 15, parce que 15 étoit vis-à-vis de l'un des nombres de la ligne B, sçavoir de 40.

| A   | B   | C   | D   |
|-----|-----|-----|-----|
| 15  |     |     | 182 |
| 186 | 30  | 167 | 11  |
| 13  | 39  | 158 | 184 |
| 4   | 44  | 153 | 193 |
| 3   | 40  | 157 | 194 |
| 185 | 156 | 41  | 12  |
| 7   | 155 | 42  | 190 |
| 187 | 154 | 43  | 10  |
| 6   | 168 | 29  | 191 |
| 189 | 152 | 45  | 8   |
| 188 | 46  | 151 | 9   |
| 5   |     |     | 192 |

Seconde Fig.

Semblablement je fais un échange de place entre 189, & son complément 8 avec 186, & son complément 11,

parce que 186 est vis-à-vis de l'autre nombre 152 : on aura donc 3, 189, vis-à-vis de 40, 152, comme on voit en la seconde Table.

| A   | B   | C   | D   |
|-----|-----|-----|-----|
| 15  |     |     | 182 |
| 186 | 30  | 167 | 11  |
| 13  | 39  | 158 | 184 |
| 4   | 44  | 153 | 193 |
| 40  | 3   | 157 | 194 |
| 185 | 156 | 41  | 12  |
| 7   | 155 | 42  | 190 |
| 187 | 154 | 43  | 10  |
| 6   | 168 | 29  | 191 |
| 152 | 189 | 45  | 8   |
| 188 | 46  | 151 | 9   |
| 5   |     |     | 192 |

*Troisième Fig.*

Maintenant pour faire l'attachement, je mets 3 à la place de 40 qui est vis-à-vis, & 189 à la place de 152 ; & cette transposition étant faite, si on ôtoit la première enceinte de la figure en laquelle les lignes seroient disposées selon la suite des nombres contenus aux colonnes A, B, C, D, de la troisième figure, la Table de 12 n'auroit pas ses lignes égales, mais bien celles de 10, 8, 6, & 4.

Il faut remarquer, qu'à cette seconde transposition on ne touche point aux colonnes C, D où sont les compléments.

Par ce changement, la figure entière de 14 ne reçoit aucun dommage, puisque les lignes disposées selon la suite A, B, C, D, ne changent point de nombres, mais retiennent toujours les mêmes ; & les colonnes qui vont de haut en bas changent bien de nombres, mais en leurs places,

elles en reçoivent d'équivalens. Par exemple, la colonne A, au lieu de 3, 189 qu'elle avoit, reçoit 40, 152, qui valent autant : mais si on prend la figure de 12 toute seule, il n'en ira pas ainsi ; car encore que la colonne B, à la prendre de haut en bas, ne reçoive aucun dommage, il n'en est pas de même aux deux lignes qui vont selon la suite A, B, C, D, car en celle où font 3, 157, on a mis 3 tout seul à la place de 40, puisque la ligne de la Table de 12 ne commence qu'en 40 ; d'où s'enfuit que cette ligne sera trop petite de 37 ; & en la ligne 189, 45, on a mis 189 à la place de 152, & ainsi elle sera trop grande de 37.

Pour les autres figures de 10, 8, 6 & 4, elles ne reçoivent aucun changement, parce qu'on n'y a point touché.

On peut prendre, si on veut, trois nombres ou plus dans la colonne A, & en choisir autant d'autres, dont la somme soit égale dans la colonne B, ou dans son opposée C, & les transposer comme devant.

|     |     |   |
|-----|-----|---|
| A   | B   |   |
| 30  |     | On auroit pu prendre 41, 151 dans la        |
| 39  | 146 | colonne C de la première figure, pour faire |
| 44  | 144 | 192. De même, si on avoit pris 3, 188 dans  |
| 40  | 58  | la colonne A, qui font 191, on trouveroit   |
| 156 | 56  | 39, 152 dans la colonne B, qui font 191.    |
| 155 | 138 | Enfin on peut trouver ces égalitez en beau- |
| 154 | 57  | coup de manieres.                           |
| 168 | 142 |   |
| 152 | 145 |   |
| 46  |     |   |

Si on vouloit gâter la figure de 10 seulement, il faudroit transposer des nombres de l'enceinte de la figure de 12, à la place d'autres nombres équivalens de la figure de 10, & prendre leurs lignes ou colonnes comme devant, & comme on les voit ici.

Ainsi ayant trouvé que 44 & 155 de la colonne A en la Table précédente, font égaux à 57, 142 de la colonne B, après avoir mis 44, 155 vis-à-vis de 57, 142, comme devant, & pareillement leurs complémens qui sont en la colonne opposée de la Table, je les transpose d'une co-

lomme en l'autre, mettant 44, 155 à la place de 57, 142; & on les aura en la façon qu'ils sont ici.

|     |     |   |
|-----|-----|---|
| A   |     | Et si on les applique à la figure de 14 en cette disposition, & qu'on en ôte deux enceintes, la figure de 10 qui restera ne sera pas bonne; mais quelqu'autres enceintes qu'on puisse ôter, ce qui restera ne laissera pas d'être bon. On auroit pû prendre 30, |
| 30  |     | 168, la somme est 198; leurs égaux dans la  |
| 39  | 146 | colonne B, sont 56, 142, ou bien 39, 156,   |
| 154 | 144 | auxquels sont égaux 138, 57 en l'autre co-  |
| 40  | 58  | lonne, ou bien 39, 155, & on aura 56, 138,  |
| 156 | 56  | qui valent autant, comme aussi 44, 156 font   |
| 168 | 138 | autant que 144, 56, & que 58, 142, & 44,  |
| 57  | 44  | 155 font autant que 57, 142, &c.  |
| 142 | 155 |   |
| 152 | 145 |   |
| 46  |     |   |

On fera la même chose des autres enceintes; car si on vouloit que la Table de 8 toute seule ne valût rien, on mêleroit l'enceinte de 8 avec la précédente qui est de 10; & pour gâter la Table de 6, on changera des nombres de son enceinte avec celle de 8, &c.

Pour gâter deux Tables de suite, il faut mêler les nombres de la moindre, avec ceux de l'enceinte qui les enveloppe toutes deux. Par exemple, pour faire que les Tables de 12 & de 10 ne valent rien, les autres demeurant bonnes, on changera les nombres de l'enceinte de 14, en des équivalens de celle de 10.

Et pour gâter les Tables de 10 & de 8 seulement, on changera les nombres de la Table de 8, en ceux de la Table de 12, qui est celle qui enveloppe celle de 10.

Toutes les autres diversitez qu'on pourroit apporter à faire quelques-unes des figures bonnes, & quelqu'autres mauvaises, se feront en la façon qui a été montrée, changeant toujours les nombres de la figure qu'on veut gâter, avec la précédente qu'on veut conserver bonne. Il seroit trop long d'apporter des exemples de chaque sorte, vû même

même que ce qui a été dit peut suffire étant bien entendu.

Il y a plusieurs autres manieres de gâter ou attacher les figures. En voici des exemples.

Je cherche deux nombres aux deux colonnes marquées A de la figure précédente, sçavoir un en chacune, qui soient égaux à deux autres des mêmes lignes : par exemple, 154 & 144 font 298, & pareillement 146 & 152 font 298. Et parce que 154 & 144 sont vis-à-vis l'un de l'autre, on n'aura que faire d'y toucher; mais pour 152, il le faudra mettre vis-à-vis de 146, ou 146 à la place de 145, vis-à-vis de 152, & la ligne sera comme on la voit ici; & en même temps aussi on transposera le complément de 152 qui est en la ligne opposée dans la figure précédente de 14, vis-à-vis de 152, & pareillement le complément de 39, parce qu'on a mis 152 en sa place.

B

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| 30  |     | 30  |     |
| 152 | 146 | 154 | 144 |
| 154 | 144 | 152 | 146 |
| 40  | 58  | 40  | 58  |
| 156 | 56  | 156 | 56  |
| 168 | 138 | 168 | 138 |
| 57  | 44  | 57  | 44  |
| 142 | 155 | 142 | 155 |
| 39  | 145 | 39  | 145 |
| 46  |     | 46  |     |

Cela fait, on mettra 152, 146 à la place de 154, 144, comme on voit en la figure B; & en faisant ce dernier changement, il ne faut point toucher aux complémens, car c'est en cela que consiste l'attachement des enceintes l'une à l'autre; sçavoir à transposer d'une enceinte à l'autre, ou d'une ligne à l'autre des nombres équivalens, sans toucher à leurs complémens.

On a encore 142, 56, qui font 198.

On a aussi 154, 56, qui font 210, & 152, 58 qui font autant.

On peut aussi changer les nombres qui sont aux angles. Ainsi en la figure qui a 14 de côté, on pourra mettre 196 à la place de 190; & parce que 196 surpasse 170 de 26, il faudra trouver dans la colonne 171, 26; entre les nombres 28, 170, qui sont les angles de la Table de 12, un nombre qui surpasse de 26 quelqu'un de ceux qui sont entre 195, 196; tel est 39 qui surpasse 13 de 26, comme aussi 30 qui surpasse 4 de 26; & par même moyen il faudroit un nombre entre 170 & 169 de la ligne 5, 192, un nombre qui surpassât de 26 quelqu'un des nombres qui sont entre 196 & 2: & parce qu'il ne s'en trouve point, on en cherchera deux entre 170 & 169 qui surpassent de 26 deux autres de la ligne 196, 2; tels sont 33 & 35, dont la somme est 68, qui surpassent de 26 les nombres 20 & 22, dont la somme est 42, de même 33 & 34, dont la somme est 67, surpassent de 26 les nombres 19 & 22, dont la somme est 41. Si on ne trouvoit pas deux nombres qui fissent l'égalité, on en pourroit prendre trois ou quatre, ou davantage.

On peut faire aussi des Tables impaires par la méthode précédente, dont on s'est servi pour faire les paires, comme on peut voir en la Table de 5 qui est ici, en laquelle les relatifs sont dans les lignes opposées, & dans la même diagonale.

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| 1  | 18 | 21 | 22 | 3  |
| 2  | 12 | 17 | 10 | 24 |
| 20 | 11 | 13 | 15 | 6  |
| 19 | 16 | 9  | 14 | 7  |
| 23 | 8  | 5  | 4  | 25 |

Or on peut varier cette Table en beaucoup de manières, à cause qu'elle est détachée, & que les nombres qui

sont aux extrémités des lignes, ou colonnes, sont complémens l'un de l'autre, (c'est-à-dire qu'ils sont autant étant joints l'un à l'autre, que les deux nombres extrêmes) ainsi qu'on voit en 2 & 24; 20 & 6; 18 & 8, &c. & pareillement les nombres des angles oppoſez dans les diagonales, comme 1 & 25; 3 & 23. Et pareillement on peut tranſpoſer la Table intérieure de 9 toute entière, c'est-à-dire, ſans toucher à l'ordre des nombres, qui ne ſe peut changer, ce qui ſe fait en huit façons: puis conſiderant la première colonne de l'enceinte extérieure, on y trouve trois nombres ſans les angles, ſçavoir 2, 20, 19, qui ſe peuvent varier en ſix façons, ſuivant la combinaison d'ordre de trois choſes; & pareillement la première ligne où ſont les trois nombres 18, 21, 22, ſe peut varier en ſix ſortes. Si donc on multiplie ces trois nombres 8, 6, 6 l'un par l'autre, on aura 288, qui eſt la quantité des changemens & variations qu'on peut donner à cette Table; & ainſi on fera 288 Tables différentes de la précédente.

Pareillement on variera en beaucoup de ſortes une Table de ſix détachée: par exemple celle qui eſt ici.

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 9  | 25 | 26 | 23 | 18 | 10 |
| 16 | 1  | 35 | 34 | 4  | 21 |
| 20 | 32 | 6  | 7  | 29 | 17 |
| 24 | 8  | 30 | 31 | 5  | 13 |
| 15 | 33 | 3  | 2  | 36 | 22 |
| 27 | 12 | 11 | 14 | 19 | 28 |

Car premièrement la Table de 4 de côté qui eſt au-deſſus ſe peut varier en 880 ſortes, dont chacune ſe peut tranſpoſer en huit façons, qui ſont en tout 7040 changemens, qui ſe feront ſans toucher à l'enceinte extérieure, en laquelle les nombres de la colonne, qui ſont quatre ſans les angles, ſe peuvent varier en vingt-quatre ſortes, ſelon la combinaison d'ordre de quatre choſes, & pa-



# 300 DES QUARREZ MAGIQUES.

reillement il y a quatre nombres en la ligne de la même enceinte extérieure, qui se varieront aussi en vingt-quatre façons; & ainsi il faudra multiplier 7040 par vingt-quatre, & le produit encore par vingt-quatre, pour avoir la quantité des Tables qu'on peut faire en variant une seule d'entre elles, comme celle qui est ici, qui seront en tout 405 5040 Tables. Or on ne prend que les quatre nombres du milieu de chaque ligne de l'enceinte, sans toucher aux angles, afin qu'y ayant en la Table quelques nombres qui ne soient point remuez, on ait de vraies variations, & non point des transpositions de la Table entière.

*Table de 5, dont chacune se peut varier en 288. façons.*

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 5  | 20 | 17 | 12 | 11 | 5  | 18 | 17 | 14 | 11 | 6  | 24 | 15 | 12 | 8  |
| 24 | 10 | 25 | 4  | 2  | 2  | 10 | 25 | 4  | 24 | 3  | 10 | 25 | 4  | 23 |
| 3  | 7  | 13 | 19 | 23 | 23 | 7  | 13 | 19 | 3  | 21 | 7  | 13 | 19 | 5  |
| 18 | 22 | 1  | 16 | 8  | 20 | 22 | 1  | 16 | 6  | 17 | 22 | 1  | 16 | 9  |
| 15 | 6  | 9  | 14 | 21 | 15 | 8  | 9  | 12 | 21 | 18 | 2  | 11 | 14 | 10 |

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 6  | 23 | 17 | 11 | 8  | 6  | 24 | 8  | 15 | 12 | 9  | 24 | 3  | 18 | 11 |
| 24 | 10 | 25 | 4  | 2  | 23 | 10 | 25 | 4  | 3  | 21 | 10 | 25 | 4  | 5  |
| 5  | 7  | 13 | 19 | 21 | 5  | 7  | 13 | 19 | 21 | 6  | 7  | 13 | 19 | 10 |
| 12 | 22 | 1  | 16 | 14 | 17 | 22 | 1  | 16 | 9  | 14 | 22 | 1  | 16 | 12 |
| 18 | 3  | 9  | 15 | 20 | 14 | 2  | 18 | 11 | 20 | 15 | 2  | 23 | 8  | 17 |

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 9  | 2  | 23 | 20 | 11 | 9  | 21 | 6  | 18 | 11 | 1  | 23 | 20 | 17 | 4  |
| 21 | 10 | 25 | 4  | 5  | 24 | 10 | 25 | 4  | 2  | 19 | 10 | 24 | 5  | 7  |
| 8  | 7  | 13 | 19 | 18 | 3  | 7  | 13 | 19 | 23 | 11 | 8  | 13 | 18 | 15 |
| 12 | 22 | 1  | 16 | 14 | 14 | 22 | 1  | 16 | 12 | 12 | 21 | 2  | 16 | 14 |
| 15 | 24 | 3  | 6  | 17 | 15 | 5  | 20 | 8  | 17 | 22 | 3  | 6  | 9  | 25 |

# DES QUARREZ MAGIQUES. 301

|               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|
| 3 25 19 14 4  | 3 25 12 9 6   | 3 25 19 12 6  |
| 10 10 24 5 6  | 19 10 24 5 7  | 12 10 24 5 4  |
| 9 8 13 18 17  | 11 8 13 18 15 | 9 8 13 18 17  |
| 11 21 2 16 15 | 12 21 2 16 14 | 11 21 2 16 15 |
| 22 1 7 12 23  | 20 1 4 17 23  | 20 1 7 14 23  |

|               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|
| 4 25 23 6 7   | 4 23 17 14 7  | 4 25 6 19 11  |
| 17 10 24 5 9  | 25 10 24 5 1  | 23 10 24 5 3  |
| 11 8 13 18 15 | 6 8 13 18 20  | 9 8 13 18 17  |
| 14 21 2 16 12 | 11 21 2 16 15 | 14 21 2 16 12 |
| 19 1 3 20 22  | 19 3 9 12 22  | 15 1 20 7 12  |

|               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|
| 4 23 20 7 11  | 2 23 20 12 8  | 2 13 20 8 12  |
| 25 10 24 5 1  | 9 10 25 4 17  | 11 10 25 4 15 |
| 9 8 13 18 17  | 15 7 13 19 11 | 17 7 13 19 9  |
| 12 21 2 16 14 | 21 22 1 16 5  | 21 22 1 16 5  |
| 15 3 6 19 22  | 18 3 6 14 24  | 14 3 6 18 24  |

|               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|
| 2 23 17 11 12 | 3 24 18 15 5  | 3 24 21 8 9   |
| 8 10 25 4 18  | 9 10 25 4 17  | 20 10 25 4 6  |
| 20 7 13 19 6  | 12 7 13 19 14 | 11 7 13 19 15 |
| 21 22 1 16 5  | 20 22 1 16 6  | 14 22 1 16 12 |
| 14 3 9 15 24  | 21 2 8 11 13  | 17 2 5 18 23  |

Rec. de l'Ac. Tom. V.

R r .

# 300 DES QUARREZ MAGIQUES.

reillement il y a quatre nombres en la ligne de la même enceinte extérieure, qui se varieront aussi en vingt-quatre façons; & ainsi il faudra multiplier 7040 par vingt-quatre, & le produit encore par vingt-quatre, pour avoir la quantité des Tables qu'on peut faire en variant une seule d'entre elles, comme celle qui est ici, qui seront en tout 4055040 Tables. Or on ne prend que les quatre nombres du milieu de chaque ligne de l'enceinte, sans toucher aux angles, afin qu'y ayant en la Table quelques nombres qui ne soient point remuez, on ait de vraies variations, & non point des transpositions de la Table entière.

*Table de 5, dont chacune se peut varier en 288. façons.*

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 5  | 20 | 17 | 12 | 11 | 5  | 18 | 17 | 14 | 11 | 6  | 24 | 15 | 12 | 8  |
| 24 | 10 | 25 | 4  | 2  | 2  | 10 | 25 | 4  | 24 | 3  | 10 | 25 | 4  | 23 |
| 3  | 7  | 13 | 19 | 23 | 23 | 7  | 13 | 19 | 3  | 21 | 7  | 13 | 19 | 5  |
| 18 | 22 | 1  | 16 | 8  | 20 | 22 | 1  | 16 | 6  | 17 | 22 | 1  | 16 | 9  |
| 15 | 6  | 9  | 14 | 21 | 15 | 8  | 9  | 12 | 21 | 18 | 2  | 11 | 14 | 10 |

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 6  | 23 | 17 | 11 | 8  | 6  | 24 | 8  | 15 | 12 | 9  | 24 | 3  | 18 | 11 |
| 24 | 10 | 25 | 4  | 2  | 23 | 10 | 25 | 4  | 3  | 21 | 10 | 25 | 4  | 5  |
| 5  | 7  | 13 | 19 | 21 | 5  | 7  | 13 | 19 | 21 | 6  | 7  | 13 | 19 | 20 |
| 12 | 22 | 1  | 16 | 14 | 17 | 22 | 1  | 16 | 9  | 14 | 22 | 1  | 16 | 12 |
| 18 | 3  | 9  | 15 | 20 | 14 | 2  | 18 | 11 | 20 | 15 | 2  | 23 | 8  | 17 |

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 9  | 2  | 23 | 20 | 11 | 9  | 21 | 6  | 18 | 11 | 1  | 23 | 20 | 17 | 4  |
| 21 | 10 | 25 | 4  | 5  | 24 | 10 | 25 | 4  | 2  | 19 | 10 | 24 | 5  | 7  |
| 8  | 7  | 13 | 19 | 18 | 3  | 7  | 13 | 19 | 23 | 11 | 8  | 13 | 18 | 15 |
| 12 | 22 | 1  | 16 | 14 | 14 | 22 | 1  | 16 | 12 | 12 | 21 | 2  | 16 | 14 |
| 15 | 24 | 3  | 6  | 17 | 15 | 5  | 20 | 8  | 17 | 22 | 3  | 6  | 9  | 25 |

# TABLE GENERALE

## DES

### QUARREZ DE QUATRE.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| $\beta$<br>1 13 8 12<br>16 4 9 5<br>11 7 14 2<br>6 10 3 15  | $\beta$<br>1 13 12 8<br>16 4 5 9<br>7 11 14 2<br>10 6 3 15  | $\beta$<br>1 13 8 12<br>16 4 9 5<br>10 6 15 3<br>7 11 2 14  | $\beta$<br>1 13 12 8<br>16 4 5 9<br>6 10 15 3<br>11 7 2 14  |
| $\gamma$<br>1 14 8 11<br>15 4 10 5<br>12 7 13 2<br>6 9 3 16 | $\alpha$<br>1 14 11 8<br>15 4 5 10<br>6 9 16 3<br>12 7 2 13 | $\alpha$<br>1 14 7 12<br>15 4 9 6<br>10 5 16 3<br>8 11 2 13 | $\gamma$<br>1 14 12 7<br>15 4 6 9<br>8 11 13 2<br>10 5 3 16 |
| $\delta$<br>1 11 14 8<br>16 5 4 9<br>7 12 13 2<br>10 6 3 15 | $\delta$<br>1 14 11 8<br>16 5 4 9<br>7 12 13 2<br>10 3 6 15 | $\alpha$<br>1 14 7 12<br>16 5 10 3<br>9 4 15 6<br>8 11 2 13 | $\delta$<br>1 10 15 8<br>16 6 3 9<br>5 11 14 4<br>12 7 2 13 |
| $\delta$<br>1 15 10 8<br>16 6 3 9<br>5 11 14 4<br>12 2 7 13 | $\beta$<br>1 11 8 14<br>16 6 9 3<br>13 7 12 2<br>4 10 5 15  | $\beta$<br>1 11 14 8<br>16 6 3 9<br>4 10 15 5<br>13 7 2 12  | $\beta$<br>1 11 14 8<br>16 6 3 9<br>7 13 12 2<br>10 4 5 15  |

304 TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE.

|   |  |   |   |
|---|--|---|---|
| $\beta$<br>1 11 8 14<br>16 6 9 3<br>10 4 15 5<br>7 13 2 12  | $\gamma$<br>1 12 8 13<br>15 6 10 3<br>14 7 11 2<br>4 9 5 16  | $\alpha$<br>1 12 13 8<br>15 6 3 10<br>4 9 16 5<br>14 7 2 11 | $\gamma$<br>1 12 14 7<br>15 6 4 9<br>8 13 11 2<br>10 3 5 16 |
| $\alpha$<br>1 12 7 14<br>15 6 9 3<br>10 3 16 5<br>8 13 2 11 | $\beta$<br>1 10 8 15<br>16 7 9 2<br>13 6 12 3<br>4 11 15 14  | $\beta$<br>1 10 15 8<br>16 7 2 9<br>4 11 14 5<br>13 6 3 12  | $\beta$<br>1 10 15 8<br>16 7 2 9<br>6 13 12 3<br>11 4 5 14  |
| $\beta$<br>1 10 8 15<br>16 7 9 2<br>11 4 14 5<br>6 13 3 12  | $\delta$<br>1 12 13 8<br>16 7 2 9<br>3 10 15 6<br>14 5 4 11  | $\delta$<br>1 13 12 8<br>16 7 2 9<br>3 10 15 6<br>14 4 5 11 | $\gamma$<br>1 12 8 13<br>14 7 11 2<br>15 6 10 3<br>4 9 5 16 |
| $\alpha$<br>1 12 13 8<br>14 7 2 11<br>4 9 16 5<br>15 6 3 10 | $\gamma$<br>1 12 15 16<br>14 7 4 9<br>8 13 10 3<br>11 2 5 16 | $\alpha$<br>1 12 6 15<br>14 7 9 4<br>11 2 16 5<br>8 13 3 10 | $\delta$<br>1 10 7 16<br>14 8 9 3<br>15 5 12 2<br>4 11 6 13 |
| $\beta$<br>1 10 17 16<br>15 8 9 2<br>14 5 12 3<br>4 11 6 13 | $\beta$<br>1 11 6 16<br>14 8 9 3<br>15 5 12 2<br>4 10 7 13   | $\gamma$<br>1 11 16 6<br>14 8 3 9<br>4 10 13 7<br>15 5 2 12 | $\delta$<br>1 11 6 16<br>15 8 9 2<br>14 5 12 3<br>4 10 7 13 |

TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE 305

|   |   |   |  |
|---|---|---|--|
| $\gamma$<br>1 10 16 7<br>15 8 2 9<br>4 11 13 6<br>14 5 3 12 | $\gamma$<br>1 10 16 7<br>15 8 2 9<br>6 13 11 4<br>12 3 5 14   | $\delta$<br>1 10 7 16<br>12 8 9 5<br>15 3 14 2<br>6 13 14 11  | $\beta$<br>1 10 7 16<br>15 8 9 2<br>12 3 14 5<br>6 13 14 11  |
| $\gamma$<br>1 12 6 15<br>13 8 10 3<br>16 5 11 2<br>4 9 7 14 | $\beta$<br>1 12 15 6<br>13 8 3 10<br>4 9 14 7<br>16 5 2 11    | $\delta$<br>1 15 12 16<br>13 8 3 10<br>4 9 14 7<br>16 2 5 11  | $\delta$<br>1 11 6 16<br>12 8 9 5<br>14 2 15 3<br>7 13 4 10  |
| $\beta$<br>1 11 6 16<br>14 8 9 3<br>12 2 15 5<br>7 13 4 10  | $\gamma$<br>1 11 16 6<br>14 8 3 9<br>7 13 10 4<br>12 2 5 15   | $\gamma$<br>1 12 7 14<br>13 8 11 2<br>16 5 10 3<br>4 9 6 15   | $\beta$<br>1 12 14 7<br>13 8 2 11<br>4 9 15 6<br>16 5 13 10  |
| $\delta$<br>1 13 4 16<br>14 8 9 3<br>12 2 15 5<br>7 11 6 10 | $\delta$<br>1 7 10 16<br>14 9 8 3<br>15 6 11 12<br>4 12 5 13  | $\delta$<br>1 7 10 16<br>15 9 8 2<br>14 6 11 3<br>4 12 5 13   | $\delta$<br>1 7 10 16<br>12 9 8 5<br>15 4 13 2<br>6 14 3 11  |
| $\delta$<br>1 7 10 16<br>15 9 8 2<br>12 4 13 5<br>6 14 3 11 | $\delta$<br>1 12 15 16<br>14 9 4 7<br>13 8 13 10<br>16 5 2 11 | $\delta$<br>1 12 15 16<br>14 9 8 3<br>15 6 11 12<br>4 7 10 13 | $\delta$<br>1 12 15 16<br>15 9 8 2<br>14 6 11 3<br>4 7 10 13 |

## 304 TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE.

|   |  |   |   |
|---|--|---|---|
| $\beta$<br>1 11 8 14<br>16 6 9 3<br>10 4 15 5<br>7 13 2 12  | $\gamma$<br>1 12 8 13<br>15 6 10 3<br>14 7 11 2<br>4 9 5 16  | $\alpha$<br>1 12 13 8<br>15 6 3 10<br>4 9 16 5<br>14 7 2 11 | $\gamma$<br>1 12 14 7<br>15 6 4 9<br>8 13 11 2<br>10 3 5 16 |
| $\alpha$<br>1 12 7 14<br>15 6 9 4<br>10 3 16 5<br>8 13 2 11 | $\beta$<br>1 10 8 15<br>16 7 9 2<br>13 6 12 3<br>4 11 15 14  | $\beta$<br>1 10 15 8<br>16 7 2 9<br>4 11 14 5<br>13 6 3 12  | $\beta$<br>1 10 15 8<br>16 7 2 9<br>6 13 12 3<br>11 4 5 14  |
| $\beta$<br>1 10 8 15<br>16 7 9 2<br>11 4 14 5<br>6 13 3 12  | $\delta$<br>1 12 13 8<br>16 7 2 9<br>3 10 15 6<br>14 5 4 11  | $\delta$<br>1 13 12 8<br>16 7 2 9<br>3 10 15 6<br>14 4 5 11 | $\gamma$<br>1 12 8 13<br>14 7 11 2<br>15 6 10 3<br>4 9 5 16 |
| $\alpha$<br>1 12 13 8<br>14 7 2 11<br>4 9 16 5<br>15 6 3 10 | $\gamma$<br>1 12 15 16<br>14 7 4 9<br>8 13 10 3<br>11 2 5 16 | $\alpha$<br>1 12 6 15<br>14 7 9 4<br>11 2 16 5<br>8 13 3 10 | $\delta$<br>1 10 7 16<br>14 8 9 3<br>15 5 12 2<br>4 11 6 13 |
| $\beta$<br>1 10 17 16<br>15 8 9 2<br>14 5 12 3<br>4 11 6 13 | $\beta$<br>1 11 6 16<br>14 8 9 3<br>15 5 12 2<br>4 10 7 13   | $\gamma$<br>1 11 16 6<br>14 8 3 9<br>4 10 13 7<br>15 5 2 12 | $\delta$<br>1 11 6 16<br>15 8 9 2<br>14 5 12 3<br>4 10 7 13 |

TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE. 307

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| $\delta$<br>1 4 14 15<br>16 11 5 2<br>9 6 12 7<br>8 13 3 10 | $\delta$<br>1 14 4 15<br>16 11 5 2<br>9 6 12 7<br>8 3 13 10 | $\delta$<br>1 5 12 16<br>14 11 6 3<br>15 8 9 2<br>4 10 7 13 | $\delta$<br>1 5 12 16<br>15 11 6 2<br>14 8 9 3<br>4 10 7 13 |
| $\delta$<br>1 5 12 16<br>10 11 6 7<br>15 4 13 2<br>8 14 3 9 | $\delta$<br>1 5 12 16<br>15 11 6 2<br>10 4 13 7<br>8 14 3 9 | $\delta$<br>1 10 15 8<br>14 11 4 5<br>3 6 13 12<br>16 7 2 9 | $\delta$<br>1 10 7 16<br>14 11 6 3<br>15 8 9 2<br>4 5 12 13 |
| $\delta$<br>1 10 7 16<br>15 11 6 2<br>14 8 9 3<br>4 5 12 13 | $\delta$<br>1 14 3 16<br>15 11 6 2<br>10 4 13 7<br>8 5 12 9 | $\beta$<br>1 6 12 15<br>16 11 5 2<br>13 10 8 3<br>4 7 9 14  | $\beta$<br>1 6 15 12<br>16 11 2 5<br>4 7 14 9<br>13 10 3 8  |
| $\beta$<br>1 6 15 12<br>16 11 2 5<br>10 13 8 3<br>7 4 9 14  | $\beta$<br>1 6 12 15<br>16 11 5 2<br>7 4 14 9<br>10 13 3 8  | $\delta$<br>1 8 13 12<br>16 11 2 5<br>3 6 15 10<br>14 9 4 7 | $\delta$<br>1 13 8 12<br>16 11 2 5<br>3 6 15 10<br>14 4 9 7 |
| $\gamma$<br>1 8 12 13<br>14 11 7 2<br>15 10 6 3<br>4 5 9 16 | $\alpha$<br>1 8 13 12<br>14 11 2 7<br>4 5 16 9<br>15 10 3 6 | $\gamma$<br>1 8 15 10<br>14 11 4 5<br>12 13 6 3<br>7 2 9 16 | $\alpha$<br>1 8 10 15<br>14 11 5 4<br>7 2 16 9<br>12 13 3 6 |



308 TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE:

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 4 15 14<br>9 12 7 6<br>16 5 10 3<br>8 13 2 11             | 1 4 14 15<br>9 12 6 7<br>16 5 11 2<br>8 13 3 10             | 1 9 16 8<br>14 12 5 3<br>4 6 11 13<br>15 7 2 10             | 1 9 16 8<br>15 12 5 2<br>4 7 10 13<br>14 6 3 11               |
| $\delta$<br>1 6 11 16<br>14 12 5 3<br>15 9 8 2<br>4 7 10 13 | $\beta$<br>1 6 11 16<br>15 12 5 2<br>14 9 8 3<br>4 7 10 13  | $\gamma$<br>1 6 16 11<br>15 12 2 5<br>4 7 13 10<br>14 9 3 8 | $\epsilon$<br>1 7 10 16<br>14 12 5 3<br>15 9 8 2<br>4 6 11 13 |
| $\delta$<br>1 7 10 16<br>15 12 5 2<br>14 9 8 3<br>4 6 11 13 | $\gamma$<br>1 7 16 10<br>14 12 3 5<br>4 6 13 11<br>15 9 2 8 | $\delta$<br>1 6 11 16<br>8 12 5 9<br>15 3 14 2<br>10 13 4 7 | $\epsilon$<br>1 6 11 16<br>15 12 5 2<br>8 3 14 9<br>10 13 4 7 |
| $\gamma$<br>1 6 16 11<br>15 12 2 5<br>10 13 7 4<br>8 3 9 14 | $\gamma$<br>1 8 10 15<br>13 12 6 3<br>16 9 7 2<br>4 5 11 14 | $\beta$<br>1 8 15 10<br>13 12 3 6<br>4 5 14 11<br>16 9 2 7  | $\delta$<br>1 13 4 16<br>15 12 5 2<br>8 3 14 9<br>10 6 11 7   |
| $\delta$<br>1 7 10 16<br>8 12 5 9<br>14 2 15 3<br>11 13 4 6 | $\gamma$<br>1 7 16 10<br>14 12 3 5<br>11 13 6 4<br>8 2 9 15 | $\beta$<br>1 7 10 16<br>14 12 5 3<br>8 2 15 9<br>11 13 4 6  | $\gamma$<br>1 8 11 14<br>13 12 7 2<br>16 9 6 3<br>4 5 10 15   |

TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE. 309

|   |  |   |   |
|---|--|---|---|
| $\beta$<br>1 8 14 11<br>13 12 2 7<br>4 5 15 10<br>16 9 3 6  | $\delta$<br>1 13 4 16<br>14 12 5 3<br>8 2 15 9<br>11 7 10 6  | $\delta$<br>1 3 14 16<br>12 13 4 5<br>15 8 9 2<br>6 10 7 11 | $\delta$<br>1 3 14 16<br>15 13 4 2<br>12 8 9 5<br>6 10 7 11 |
| $\delta$<br>1 3 14 16<br>15 13 4 2<br>10 6 11 7<br>8 12 5 9 | $\delta$<br>1 3 14 16<br>10 13 4 7<br>15 6 11 2<br>8 12 5 9  | $\delta$<br>1 10 7 16<br>12 13 4 5<br>15 8 9 2<br>6 3 14 11 | $\delta$<br>1 10 7 16<br>15 13 4 2<br>12 8 9 5<br>6 3 14 11 |
| $\delta$<br>1 10 15 8<br>12 13 6 3<br>5 4 11 14<br>16 7 2 9 | $\delta$<br>1 12 5 16<br>15 13 4 2<br>10 6 11 7<br>8 3 14 14 | $\beta$<br>1 4 14 15<br>16 13 3 2<br>11 10 8 5<br>6 7 9 12  | $\beta$<br>1 4 15 14<br>16 13 2 3<br>6 7 12 9<br>11 10 5 8  |
| $\beta$<br>1 4 15 14<br>16 13 2 3<br>10 11 8 5<br>7 6 9 12  | $\beta$<br>1 4 14 15<br>16 13 3 2<br>7 6 12 9<br>10 11 5 8   | $\delta$<br>1 8 10 15<br>16 13 3 2<br>5 4 14 11<br>12 9 7 6 | $\delta$<br>1 10 8 15<br>16 13 3 2<br>5 4 14 11<br>12 7 9 6 |
| $\delta$<br>1 7 14 12<br>8 13 2 11<br>9 4 15 6<br>16 10 3 5 | $\delta$<br>1 7 14 12<br>11 13 2 8<br>6 4 15 9<br>16 10 3 5  | $\delta$<br>1 7 16 10<br>11 13 4 6<br>14 12 5 3<br>8 2 9 15 | $\delta$<br>1 7 16 10<br>14 13 4 3<br>11 12 5 6<br>8 2 9 15 |

310 TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| $\delta$<br>1 8 9 16<br>14 13 4 3<br>7 2 15 10<br>12 11 6 5 | $\delta$<br>1 11 6 16<br>14 13 4 3<br>7 2 15 10<br>12 8 9 5 | $\gamma$<br>1 8 14 11<br>12 13 7 2<br>15 10 4 5<br>6 3 9 16 | $\alpha$<br>1 8 11 14<br>12 13 2 7<br>6 3 16 9<br>15 10 5 4 |
| $\gamma$<br>1 8 15 10<br>12 13 6 3<br>14 11 4 5<br>7 2 9 16 | $\alpha$<br>1 8 10 15<br>12 13 3 6<br>7 2 16 9<br>14 11 5 4 | $\delta$<br>1 2 15 16<br>12 14 3 5<br>13 7 10 4<br>8 11 6 9 | $\delta$<br>1 2 16 15<br>13 14 4 3<br>12 7 9 6<br>8 11 5 10 |
| $\delta$<br>1 2 15 16<br>13 14 3 4<br>12 7 10 5<br>8 11 6 9 | $\delta$<br>1 11 6 16<br>12 14 3 5<br>13 7 10 4<br>8 2 15 9 | $\delta$<br>1 11 6 16<br>13 14 3 4<br>12 7 10 5<br>8 2 15 9 | $\delta$<br>1 4 13 16<br>12 14 3 5<br>15 9 8 2<br>6 7 10 11 |
| $\beta$<br>1 4 13 16<br>15 14 3 2<br>12 9 8 5<br>6 7 10 11  | $\gamma$<br>1 4 16 13<br>15 14 2 3<br>6 7 11 10<br>12 9 5 8 | $\beta$<br>1 7 10 16<br>12 14 3 5<br>15 9 8 2<br>6 4 13 11  | $\gamma$<br>1 7 16 10<br>12 14 5 3<br>6 4 11 13<br>15 9 2 8 |
| $\delta$<br>1 7 10 16<br>15 14 3 2<br>12 9 8 5<br>6 4 13 11 | $\delta$<br>1 4 13 16<br>8 14 3 9<br>15 5 12 2<br>10 11 6 7 | $\gamma$<br>1 4 16 13<br>15 14 2 3<br>10 11 7 6<br>8 5 9 12 | $\beta$<br>1 4 13 16<br>15 14 3 2<br>8 5 12 9<br>10 11 6 7  |

TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE 311

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| $\gamma$  | $\beta$   | $\delta$  |   |
| 1 8 10 15<br>11 14 4 5<br>16 9 7 2<br>6 3 13 12 | 1 8 15 10<br>11 14 5 4<br>6 3 12 13<br>16 9 2 7 | 1 11 6 16<br>15 14 3 2<br>8 5 12 9<br>10 4 13 7 | 1 5 16 12<br>10 14 3 7<br>8 4 9 13<br>15 11 6 2 |
| 1 5 16 12<br>10 14 3 7<br>15 11 6 2<br>8 4 9 13 | 1 5 16 12<br>15 14 3 2<br>10 11 6 7<br>8 4 9 13 | 1 5 16 12<br>8 14 3 9<br>10 4 13 7<br>15 11 2 6 | 1 7 10 16<br>8 14 3 9<br>12 2 15 5<br>13 11 6 4 |
| $\gamma$  | $\beta$   | $\gamma$  | $\beta$   |
| 1 7 16 10<br>12 14 5 3<br>13 11 4 6<br>8 2 9 15 | 1 7 10 16<br>12 14 3 5<br>8 2 15 9<br>13 11 6 4 | 1 8 13 12<br>11 14 7 2<br>16 9 4 5<br>6 3 10 15 | 1 8 12 13<br>11 14 2 7<br>6 3 15 10<br>16 9 5 4 |
| $\delta$  | $\delta$  | $\beta$   | $\gamma$  |
| 1 11 6 16<br>12 14 3 5<br>8 2 15 9<br>13 7 10 4 | 1 4 13 16<br>12 15 2 5<br>14 9 8 3<br>7 6 11 10 | 1 4 13 16<br>14 15 2 3<br>12 9 8 5<br>7 6 11 10 | 1 4 16 13<br>14 15 3 2<br>7 6 10 11<br>12 9 5 8 |
| $\epsilon$                                      | $\gamma$  | $\delta$  |   |
| 1 6 11 16<br>12 15 2 5<br>14 9 8 3<br>7 4 13 10 | 1 6 16 11<br>12 15 5 2<br>7 4 10 13<br>14 9 3 8 | 1 6 11 16<br>14 15 2 3<br>12 9 8 5<br>7 4 13 10 | 1 3 16 14<br>8 15 2 9<br>13 6 11 4<br>12 10 5 7 |

312 TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| <p>1 3 16 14<br/>13 15 2 4<br/>8 6 11 9<br/>12 10 5 7</p> | <p>1 3 16 14<br/>13 15 2 4<br/>12 10 7 5<br/>8 6 9 11</p> | <p>1 3 16 14<br/>12 15 2 5<br/>13 10 7 4<br/>8 6 9 11</p> | <p>1 4 13 16<br/>8 15 2 9<br/>14 5 12 3<br/>11 10 7 6</p> |
| <p>1 4 13 16<br/>14 15 2 3<br/>8 5 12 9<br/>11 10 7 6</p> | <p>1 4 16 13<br/>14 15 3 2<br/>11 10 6 7<br/>8 5 9 12</p> | <p>1 8 11 14<br/>10 15 4 5<br/>16 9 6 3<br/>7 2 13 12</p> | <p>1 8 14 11<br/>10 15 5 4<br/>7 2 12 13<br/>16 9 3 6</p> |
| <p>1 10 7 16<br/>14 15 2 3<br/>8 5 12 9<br/>11 4 13 6</p> | <p>1 6 11 16<br/>7 15 2 10<br/>14 4 13 3<br/>12 9 8 5</p> | <p>1 6 11 16<br/>14 15 2 3<br/>7 4 13 10<br/>12 9 8 5</p> | <p>1 7 14 12<br/>9 15 4 6<br/>8 2 13 11<br/>16 10 3 5</p> |
| <p>1 7 14 12<br/>9 15 4 6<br/>16 10 5 3<br/>8 2 11 13</p> | <p>1 9 8 16<br/>14 15 2 3<br/>7 4 13 10<br/>12 6 11 5</p> | <p>1 6 11 16<br/>8 15 2 9<br/>12 3 14 5<br/>13 10 7 4</p> | <p>1 6 16 11<br/>12 15 5 2<br/>13 10 4 7<br/>8 3 9 14</p> |
| <p>1 6 11 16<br/>12 15 2 5<br/>8 3 14 9<br/>13 10 7 4</p> | <p>1 8 13 12<br/>10 15 6 3<br/>16 9 4 5<br/>7 2 11 14</p> | <p>1 8 12 13<br/>10 15 3 6<br/>7 2 14 11<br/>16 9 5 4</p> | <p>1 10 7 16<br/>12 15 2 5<br/>8 3 14 9<br/>13 6 11 4</p> |

TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE. 313

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| $\gamma$<br>1 4 15 14<br>13 16 3 2<br>8 5 10 11<br>12 9 6 7 | $\gamma$<br>1 4 14 15<br>13 16 2 3<br>12 9 7 6<br>8 5 11 10 | $\gamma$<br>1 6 15 12<br>11 16 5 2<br>8 3 10 13<br>14 9 4 7 | $\gamma$<br>1 6 12 15<br>11 16 2 5<br>14 9 7 4<br>8 3 13 10 |
| $\gamma$<br>1 4 14 15<br>13 16 2 3<br>8 5 11 10<br>12 9 7 6 | $\gamma$<br>1 4 15 14<br>13 16 3 2<br>12 9 6 7<br>8 5 10 11 | $\gamma$<br>1 7 14 12<br>10 16 5 3<br>8 2 1 13<br>15 9 4 6  | $\gamma$<br>1 7 12 14<br>10 16 3 5<br>15 9 6 4<br>8 2 13 11 |
| $\gamma$<br>1 6 15 12<br>11 16 5 2<br>14 9 4 7<br>8 3 10 13 | $\gamma$<br>1 6 12 15<br>11 16 2 5<br>14 9 7 4<br>8 3 13 10 | $\gamma$<br>1 7 14 12<br>10 16 5 3<br>15 9 4 6<br>8 2 11 13 | $\gamma$<br>1 7 12 14<br>10 16 3 5<br>8 2 13 11<br>15 9 6 4 |
| $\gamma$<br>2 13 7 12<br>16 3 9 6<br>11 8 14 1<br>5 10 4 15 | $\gamma$<br>2 13 11 8<br>16 3 5 10<br>7 12 14 1<br>9 6 4 15 | $\alpha$<br>2 13 8 11<br>16 3 10 5<br>9 6 15 4<br>7 12 1 14 | $\alpha$<br>2 13 12 7<br>16 3 6 9<br>5 10 15 4<br>11 8 1 14 |
| $\beta$<br>2 14 7 11<br>15 3 10 6<br>12 8 13 1<br>5 9 4 16  | $\beta$<br>2 14 11 7<br>15 3 6 10<br>5 9 16 4<br>12 8 1 13  | $\beta$<br>2 14 11 7<br>15 3 6 10<br>8 12 13 1<br>9 5 4 16  | $\beta$<br>2 14 7 11<br>15 3 10 6<br>9 5 16 4<br>8 12 1 13  |

# 314 TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE.

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
| <p>♂</p> <p>2 11 8 13<br/>15 4 9 6<br/>10 5 16 3<br/>7 14 1 12</p> | <p>♂</p> <p>2 11 14 7<br/>15 4 5 10<br/>8 13 12 1<br/>9 6 3 16</p> | <p>♂</p> <p>2 14 11 7<br/>15 4 5 10<br/>8 13 12 1<br/>9 3 6 16</p> | <p>♂</p> <p>2 9 16 7<br/>15 5 4 10<br/>6 12 13 3<br/>11 8 1 14</p> |
| <p>♂</p> <p>2 15 6 11<br/>16 5 12 1<br/>9 4 13 8<br/>7 10 3 14</p> | <p>γ</p> <p>2 11 13 8<br/>16 5 3 10<br/>7 14 12 1<br/>9 4 6 15</p> | <p>♂</p> <p>2 11 8 13<br/>16 5 10 3<br/>9 4 15 6<br/>7 14 1 12</p> | <p>γ</p> <p>2 11 7 14<br/>16 5 9 4<br/>13 8 12 1<br/>3 10 6 15</p> |
| <p>♂</p> <p>2 11 14 7<br/>16 5 4 9<br/>3 10 15 6<br/>13 8 1 12</p> | <p>β</p> <p>2 12 7 13<br/>15 5 10 4<br/>14 8 11 1<br/>3 9 6 16</p> | <p>β</p> <p>2 12 13 7<br/>15 5 4 10<br/>3 9 16 6<br/>14 8 1 11</p> | <p>β</p> <p>2 12 13 7<br/>15 5 4 10<br/>8 14 11 1<br/>9 3 6 16</p> |
| <p>β</p> <p>2 12 7 13<br/>15 5 10 4<br/>9 3 16 6<br/>8 14 1 11</p> | <p>♂</p> <p>2 9 16 7<br/>15 6 3 10<br/>4 11 14 5<br/>13 8 1 12</p> | <p>♂</p> <p>2 15 4 13<br/>16 6 11 1<br/>9 3 14 8<br/>7 10 5 12</p> | <p>♂</p> <p>2 11 14 7<br/>12 6 3 13<br/>5 9 16 4<br/>15 8 1 10</p> |
| <p>♂</p> <p>2 11 14 7<br/>13 6 3 12<br/>4 9 16 5<br/>15 8 1 10</p> | <p>♂</p> <p>2 9 8 15<br/>11 7 10 6<br/>16 4 13 1<br/>5 14 3 12</p> | <p>γ</p> <p>2 9 15 8<br/>16 7 1 10<br/>5 14 12 3<br/>11 4 6 13</p> | <p>β</p> <p>2 9 8 15<br/>16 7 10 1<br/>11 4 13 6<br/>5 14 3 12</p> |

TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE. 315

|  |  |  |   |
|--|--|--|---|
| $\gamma$<br>2 11 5 16<br>14 7 9 4<br>15 6 12 1<br>3 10 8 13  | $\beta$<br>2 11 16 5<br>14 7 4 9<br>15 10 13 8<br>5 6 1 12   | $\delta$<br>2 14 3 15<br>16 7 10 11<br>11 4 13 6<br>5 9 8 12 | $\delta$<br>2 9 8 15<br>13 7 10 4<br>16 6 11 1<br>3 12 5 14 |
| $\beta$<br>2 9 8 15<br>16 7 10 11<br>13 6 11 4<br>3 12 5 14  | $\gamma$<br>2 9 15 8<br>16 7 1 10<br>13 12 14 5<br>13 6 4 11 | $\beta$<br>2 12 5 15<br>13 7 10 4<br>16 6 11 1<br>3 9 8 14   | $\gamma$<br>2 12 15 5<br>13 7 4 10<br>3 9 14 8<br>16 6 1 11 |
| $\delta$<br>2 12 5 15<br>16 7 10 11<br>13 6 11 4<br>3 9 8 14 | $\delta$<br>2 11 13 8<br>12 7 1 14<br>5 10 16 3<br>15 6 4 9  | $\gamma$<br>2 11 8 13<br>14 7 12 1<br>15 6 9 4<br>3 10 5 16  | $\beta$<br>2 11 13 8<br>14 7 1 12<br>3 10 16 5<br>15 6 4 9  |
| $\gamma$<br>2 12 15 5<br>13 7 4 10<br>8 14 9 3<br>11 1 6 16  | $\beta$<br>2 12 5 15<br>13 7 10 4<br>11 1 16 6<br>8 14 3 9   | $\delta$<br>2 13 11 8<br>14 7 1 12<br>3 10 16 5<br>15 4 6 9  | $\beta$<br>2 9 7 16<br>15 8 10 1<br>14 5 11 4<br>3 12 6 13  |
| $\beta$<br>2 9 16 7<br>15 8 1 10<br>3 12 13 6<br>14 5 4 11   | $\beta$<br>2 9 16 7<br>15 8 1 10<br>5 14 11 4<br>12 3 6 13   | $\beta$<br>2 9 7 16<br>15 8 10 1<br>12 3 13 6<br>5 14 4 11   | $\delta$<br>2 9 16 7<br>12 8 1 13<br>5 11 14 4<br>15 6 3 10 |



316 TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| $\delta$<br>2 9 16 7<br>13 8 1 12<br>4 11 14 5<br>15 6 3 10 | $\gamma$<br>2 11 7 14<br>13 8 12 1<br>16 5 9 4<br>3 10 6 15 | $\alpha$<br>2 11 14 7<br>13 8 1 12<br>3 10 15 6<br>16 5 4 9 | $\gamma$<br>2 11 16 5<br>13 8 3 10<br>7 14 9 4<br>12 1 6 15 |
| $\alpha$<br>2 11 5 16<br>13 8 10 3<br>12 1 15 6<br>7 14 4 9 | $\delta$<br>2 3 16 13<br>15 9 6 4<br>10 8 11 5<br>7 14 1 12 | $\delta$<br>2 15 10 7<br>16 9 8 1<br>3 6 11 14<br>13 4 5 12 | $\delta$<br>2 5 12 15<br>11 9 8 6<br>14 4 13 3<br>7 16 1 10 |
| $\delta$<br>2 5 12 15<br>14 9 8 3<br>11 4 13 6<br>7 16 1 10 | $\delta$<br>2 5 11 16<br>14 9 7 4<br>15 8 10 1<br>3 12 6 13 | $\delta$<br>2 11 14 7<br>16 9 4 5<br>1 8 13 12<br>15 6 3 10 | $\delta$<br>2 11 5 16<br>14 9 7 4<br>15 8 10 1<br>3 6 12 13 |
| $\delta$<br>2 14 11 7<br>16 9 4 5<br>1 8 13 12<br>15 3 6 10 | $\gamma$<br>2 7 13 12<br>16 9 3 6<br>11 14 8 1<br>5 4 10 15 | $\alpha$<br>2 7 12 13<br>16 9 6 3<br>5 4 15 10<br>11 14 1 8 | $\gamma$<br>2 7 11 14<br>16 9 5 4<br>13 12 8 1<br>3 6 10 15 |
| $\alpha$<br>2 7 14 11<br>16 9 4 5<br>3 6 15 10<br>13 12 1 8 | $\beta$<br>2 8 11 13<br>15 9 6 4<br>14 12 7 1<br>3 5 10 16  | $\beta$<br>2 8 13 11<br>15 9 4 6<br>3 5 16 10<br>14 12 1 7  | $\beta$<br>2 8 13 11<br>15 9 4 6<br>12 14 7 1<br>5 3 10 16  |

TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE. 317

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| $\beta$<br>2 8 11 13<br>15 9 6 4<br>5 3 16 10<br>12 14 1 7  | $\delta$<br>2 5 11 16<br>15 10 8 1<br>14 7 9 4<br>3 12 6 13 | $\delta$<br>2 11 14 7<br>15 10 3 6<br>1 8 13 12<br>16 5 4 9 | $\delta$<br>2 11 5 16<br>15 10 8 1<br>14 7 9 4<br>3 6 12 13 |
| $\delta$<br>2 5 16 11<br>15 10 3 6<br>4 7 14 9<br>13 12 1 8 | $\delta$<br>2 15 4 13<br>16 10 7 1<br>5 3 14 12<br>11 6 9 8 | $\delta$<br>2 7 14 11<br>8 10 3 13<br>9 5 16 4<br>15 12 1 6 | $\delta$<br>2 7 14 11<br>13 10 3 8<br>4 5 16 9<br>15 12 1 6 |
| $\delta$<br>2 3 16 13<br>10 11 8 5<br>15 6 9 4<br>7 14 1 12 | $\delta$<br>2 10 15 7<br>13 11 6 4<br>3 5 12 14<br>16 8 1 9 | $\delta$<br>2 10 15 7<br>16 11 6 1<br>3 8 9 14<br>13 5 4 12 | $\delta$<br>2 5 12 15<br>7 11 6 10<br>16 4 13 1<br>9 14 3 8 |
| $\beta$<br>2 5 15 12<br>16 11 1 6<br>9 14 8 3<br>7 4 10 13  | $\beta$<br>2 5 12 15<br>16 11 6 1<br>7 4 13 10<br>9 14 3 8  | $\gamma$<br>2 7 9 16<br>14 11 5 4<br>15 10 8 1<br>3 6 12 13 | $\beta$<br>2 7 16 9<br>14 11 4 5<br>3 6 13 12<br>15 10 1 8  |
| $\delta$<br>2 14 3 15<br>16 11 6 1<br>7 4 13 10<br>9 5 12 8 | $\beta$<br>2 3 13 16<br>10 11 5 8<br>15 6 12 1<br>7 14 4 9  | $\delta$<br>2 5 12 15<br>13 11 6 4<br>16 10 7 1<br>3 8 9 14 | $\beta$<br>2 5 12 15<br>16 11 6 1<br>13 10 7 4<br>3 8 9 14  |

318 TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| $\gamma$<br>2 5 15 12<br>16 11 1 6<br>3 8 14 9<br>13 10 4 7   | $\beta$<br>2 8 9 15<br>13 11 6 4<br>16 10 7 1<br>3 5 12 14  | $\gamma$<br>2 8 15 9<br>13 11 4 6<br>3 5 14 12<br>16 10 1 7 | $\delta$<br>2 8 9 15<br>16 11 6 1<br>13 10 7 4<br>3 5 12 14 |
| $\delta$<br>2 7 13 12<br>8 11 1 14<br>9 6 16 3<br>15 10 4 5   | $\gamma$<br>2 7 12 13<br>14 11 8 1<br>15 10 5 4<br>3 6 9 16 | $\beta$<br>2 7 13 12<br>14 11 1 8<br>3 6 16 9<br>15 10 4 5  | $\gamma$<br>2 8 15 9<br>13 11 4 6<br>12 14 5 3<br>7 1 10 16 |
| $\epsilon$<br>2 8 9 15<br>13 11 6 4<br>7 1 16 10<br>12 14 3 5 | $\delta$<br>2 13 7 12<br>14 11 1 8<br>3 6 16 9<br>15 4 10 5 | $\delta$<br>2 3 13 16<br>15 12 6 1<br>10 5 11 8<br>7 14 4 9 | $\gamma$<br>2 13 3 16<br>15 12 6 1<br>10 5 11 8<br>7 4 14 9 |
| $\beta$<br>2 5 11 16<br>15 12 6 1<br>14 9 7 4<br>3 8 10 13    | $\beta$<br>2 5 16 11<br>15 12 1 6<br>3 8 13 10<br>14 9 4 7  | $\beta$<br>2 5 16 11<br>15 12 1 6<br>9 14 7 4<br>8 3 10 13  | $\beta$<br>2 5 11 16<br>15 12 6 1<br>8 3 13 10<br>9 14 4 7  |
| $\delta$<br>2 5 16 11<br>8 12 1 13<br>9 7 14 4<br>15 10 3 6   | $\delta$<br>2 5 16 11<br>13 12 1 8<br>4 7 14 9<br>15 10 3 6 | $\gamma$<br>2 7 11 14<br>13 12 8 1<br>16 9 5 4<br>3 6 10 15 | $\alpha$<br>2 7 14 11<br>13 12 1 8<br>3 6 15 10<br>16 9 4 5 |

TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE. 319

|   |  |  |  |
|---|--|--|--|
| $\gamma$  | $\alpha$   | $\delta$   | $\delta$   |
| 2 7 16 9<br>13 12 3 6<br>11 14 5 4<br>8 1 10 15 | 2 7 9 16<br>13 12 6 3<br>8 1 15 10<br>14 14 4 5  | 2 7 10 15<br>8 12 5 9<br>11 1 16 6<br>13 14 3 4  | 2 7 10 15<br>11 12 5 6<br>8 1 16 9<br>13 14 3 14 |
| $\delta$  | $\delta$   | $\delta$   | $\delta$   |
| 2 8 11 13<br>14 12 1 7<br>3 5 16 10<br>15 9 6 4 | 2 8 15 9<br>11 12 5 6<br>14 13 4 3<br>7 1 10 16  | 2 8 15 9<br>14 12 5 3<br>11 13 4 6<br>7 1 10 16  | 2 11 8 13<br>14 12 1 7<br>3 5 16 10<br>15 6 9 4  |
| $\delta$  | $\delta$   | $\delta$   | $\delta$   |
| 2 1 16 15<br>11 13 4 6<br>14 8 9 3<br>7 12 5 10 | 2 1 16 15<br>14 13 4 3<br>11 8 9 6<br>7 12 5 10  | 2 1 15 16<br>14 13 3 4<br>11 8 10 5<br>7 12 6 9  | 2 11 14 7<br>12 13 8 1<br>5 4 9 16<br>15 6 3 10  |
| $\delta$  | $\delta$   | $\gamma$   | $\beta$  |
| 2 12 5 15<br>14 13 4 3<br>11 8 9 6<br>7 1 16 10 | 2 3 14 15<br>7 13 4 10<br>16 6 11 1<br>9 12 5 8  | 2 3 15 14<br>16 13 11 4<br>9 12 8 5<br>7 6 10 11 | 2 3 14 15<br>16 13 4 1<br>7 6 14 10<br>9 12 5 8  |
| $\gamma$  | $\beta$  | $\delta$   | $\delta$   |
| 2 7 9 16<br>12 13 3 6<br>15 10 8 1<br>5 4 14 11 | 2 7 16 9<br>12 13 6 3<br>5 4 11 14<br>15 10 11 8 | 2 12 15 13<br>16 13 4 1<br>7 6 11 10<br>9 3 14 8 | 2 3 14 15<br>11 13 11 6<br>16 10 7 1<br>5 8 9 12 |

320 TABLE GÉNÉRALE DES QUARREZ DE QUATRE.

| $\beta$  | $\gamma$   | $\beta$   | $\gamma$  |
|--|--|---|---|
| 2 3 14 15<br>16 13 4 1<br>11 10 7 6<br>5 8 9 12              | 2 3 15 14<br>16 13 1 4<br>5 8 12 9<br>11 10 6 7              | 2 8 9 15<br>11 13 4 6<br>16 10 7 1<br>5 3 14 12             | 2 8 15 9<br>11 13 6 4<br>5 3 12 14<br>16 10 1 7             |
| $\delta$<br>2 8 9 15<br>16 13 4 1<br>11 10 7 6<br>5 3 14 12  | $\delta$<br>2 6 15 11<br>7 13 4 10<br>9 3 14 8<br>16 12 1 5  | $\delta$<br>2 6 15 11<br>9 13 4 8<br>7 3 14 10<br>16 12 1 5 | $\delta$<br>2 6 15 11<br>9 13 4 8<br>16 12 5 1<br>7 3 10 14 |
| $\gamma$<br>2 6 15 11<br>16 13 4 1<br>9 12 5 8<br>7 3 10 14  | $\delta$<br>2 7 11 14<br>8 13 1 12<br>9 4 16 5<br>15 10 6 3  | $\gamma$<br>2 7 14 11<br>12 13 8 1<br>15 10 3 6<br>5 4 9 16 | $\beta$<br>2 7 11 14<br>12 13 1 8<br>5 4 16 9<br>15 10 6 3  |
| $\gamma$<br>2 8 15 9<br>11 13 6 4<br>14 12 3 5<br>7 1 10 16  | $\beta$<br>2 8 9 15<br>11 13 4 6<br>7 1 16 10<br>14 12 5 3   | $\delta$<br>2 11 7 14<br>12 13 1 8<br>5 4 16 9<br>15 6 10 3 | $\gamma$<br>2 4 15 13<br>5 14 3 12<br>16 7 10 1<br>11 9 6 8 |
| $\gamma$<br>2 11 15 13<br>16 14 8 1<br>5 7 10 12<br>11 9 6 8 | $\gamma$<br>2 11 15 13<br>16 14 1 3<br>9 11 8 6<br>7 5 12 10 | $\delta$<br>2 5 12 15<br>16 14 1 3<br>9 11 8 6<br>7 4 13 10 | $\beta$<br>2 3 15 16<br>15 14 4 1<br>12 9 7 6<br>5 8 10 11  |

TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE. 321

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| $\beta$<br>2 3 16 13<br>15 14 1 4<br>5 8 11 10<br>12 9 6 7    | $\beta$<br>2 3 16 13<br>15 14 1 4<br>9 12 7 6<br>8 5 10 11    | $\beta$<br>2 3 13 16<br>15 14 4 1<br>8 5 11 10<br>9 12 6 7    | $\beta$<br>2 4 15 13<br>9 14 3 8<br>16 11 6 1<br>7 5 10 12    |
| $\delta$<br>2 4 13 15<br>16 14 1 3<br>5 7 12 10<br>11 9 8 6   | $\delta$<br>2 4 15 13<br>16 4 3 1<br>9 11 6 8<br>7 5 10 12    | $\delta$<br>2 9 8 15<br>16 14 1 3<br>5 7 12 10<br>11 4 13 6   | $\delta$<br>2 7 9 16<br>15 14 4 1<br>6 3 13 12<br>11 10 8 5   |
| $\epsilon$<br>2 9 7 16<br>15 14 4 1<br>6 3 13 12<br>11 8 10 5 | $\epsilon$<br>2 7 13 12<br>11 14 8 1<br>16 9 3 6<br>5 4 10 15 | $\epsilon$<br>2 7 12 13<br>11 14 1 8<br>5 4 15 10<br>16 9 6 3 | $\epsilon$<br>2 7 16 9<br>11 14 5 4<br>13 12 3 6<br>8 1 10 15 |
| $\zeta$<br>2 7 9 16<br>11 14 4 5<br>8 1 15 10<br>13 12 6 3    | $\zeta$<br>2 3 16 13<br>14 15 4 1<br>7 6 9 12<br>11 10 5 8    | $\zeta$<br>2 3 13 16<br>14 15 1 4<br>11 10 8 5<br>7 6 12 9    | $\zeta$<br>2 3 13 16<br>14 15 1 4<br>7 6 12 9<br>11 10 8 5    |
| $\eta$<br>2 5 16 13<br>14 15 4 1<br>11 10 5 8<br>7 6 9 12     | $\eta$<br>2 8 13 11<br>9 15 6 4<br>7 1 12 14<br>16 10 3 5     | $\eta$<br>2 8 11 13<br>9 15 4 6<br>16 10 5 3<br>7 1 14 12     | $\eta$<br>2 5 16 11<br>12 15 6 1<br>7 4 9 14<br>13 10 3 8     |

322 TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| $\gamma$<br>2 5 11 16<br>12 15 1 6<br>13 10 8 3<br>7 4 14 9 | $\gamma$<br>2 5 11 16<br>12 15 1 6<br>7 4 14 9<br>13 10 8 3 | $\gamma$<br>2 5 16 11<br>12 15 6 1<br>13 10 3 8<br>7 4 9 14 | $\gamma$<br>2 8 11 13<br>9 15 4 6<br>7 1 14 12<br>16 10 5 3 |
| $\gamma$<br>2 8 13 11<br>9 15 6 4<br>16 10 3 5<br>7 1 12 14 | $\delta$<br>2 3 14 15<br>11 16 1 6<br>13 10 7 4<br>8 5 12 9 | $\beta$<br>2 3 14 15<br>13 16 1 4<br>11 10 7 6<br>8 5 12 9  | $\gamma$<br>2 3 15 14<br>13 16 4 1<br>8 5 9 12<br>11 10 6 7 |
| $\beta$<br>2 5 12 15<br>11 16 1 6<br>13 10 7 4<br>8 3 14 9  | $\gamma$<br>2 5 15 12<br>11 16 6 1<br>8 3 9 14<br>13 10 4 7 | $\delta$<br>2 5 12 15<br>13 16 1 4<br>11 10 7 6<br>8 3 14 9 | $\delta$<br>2 4 13 15<br>14 16 3 1<br>7 5 10 12<br>11 9 8 6 |
| 2 4 13 15<br>14 16 3 1<br>11 9 6 8<br>7 5 12 10             | 2 5 12 15<br>14 16 3 1<br>11 9 6 8<br>7 4 13 10             | 2 9 8 15<br>14 16 3 1<br>7 5 10 12<br>11 4 13 6             | $\delta$<br>2 3 14 15<br>7 16 1 10<br>13 6 11 4<br>12 9 8 5 |
| $\gamma$<br>2 3 15 14<br>13 16 4 1<br>12 9 5 8<br>7 6 10 11 | $\beta$<br>2 3 14 15<br>13 16 1 4<br>7 6 11 10<br>12 9 8 5  | $\beta$<br>2 7 13 12<br>9 16 6 3<br>8 1 11 14<br>15 10 4 5  | $\gamma$<br>2 7 12 13<br>9 16 3 6<br>15 10 5 4<br>8 1 14 11 |

TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE. 323

|   |   |   |  |
|---|---|---|--|
| $\delta$<br>2 9 8 15<br>13 16 1 4<br>7 6 11 10<br>12 3 14 5 | $\delta$<br>2 3 14 15<br>8 16 1 9<br>11 5 12 6<br>13 10 7 4 | $\delta$<br>2 3 14 15<br>11 16 1 6<br>8 5 12 9<br>13 10 7 4 | $\delta$<br>2 8 11 13<br>10 16 5 3<br>15 9 6 4<br>7 1 12 14  |
| $\delta$<br>2 8 11 13<br>10 16 5 3<br>7 1 12 14<br>15 9 6 4 | $\delta$<br>2 10 7 15<br>11 16 1 6<br>8 5 12 9<br>13 3 14 4 | $\delta$<br>2 5 12 15<br>7 16 1 10<br>11 4 13 6<br>14 9 8 3 | $\gamma$<br>2 5 15 12<br>11 16 6 1<br>14 9 3 8<br>7 4 10 13  |
| $\beta$<br>2 5 11 15<br>11 16 1 6<br>7 4 13 10<br>14 9 8 3  | $\gamma$<br>2 7 14 11<br>9 16 5 4<br>15 10 3 6<br>8 1 12 13 | $\beta$<br>2 7 11 14<br>9 16 4 5<br>8 1 13 12<br>15 10 6 3  | $\delta$<br>2 9 8 15<br>11 16 1 6<br>7 4 13 10<br>14 5 12 3  |
| $\gamma$<br>3 13 6 12<br>16 2 9 7<br>10 8 15 1<br>5 11 4 14 | $\alpha$<br>3 13 8 10<br>16 2 11 5<br>9 7 14 4<br>6 12 1 15 | $\gamma$<br>3 13 10 8<br>16 2 5 11<br>6 12 15 1<br>9 7 4 14 | $\alpha$<br>3 13 12 6<br>16 2 7 9<br>5 11 14 4<br>10 8 1 15  |
| $\beta$<br>3 14 8 9<br>15 2 12 5<br>10 7 13 4<br>6 11 1 16  | $\beta$<br>3 14 9 8<br>15 2 5 12<br>6 11 16 1<br>10 7 4 13  | $\beta$<br>3 14 12 5<br>15 2 8 9<br>6 11 13 4<br>10 7 1 16  | $\beta$<br>3 14 11 12<br>15 12 9 8<br>10 7 16 1<br>6 11 4 13 |



324 TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE.

|  |  |   |   |
|--|--|---|---|
| $\delta$<br>3 9 16 6<br>14 4 5 11<br>7 13 12 2<br>10 8 1 15  | $\delta$<br>3 14 7 10<br>16 4 13 11<br>9 5 12 8<br>6 11 2 15 | $\delta$<br>3 10 7 14<br>13 4 9 8<br>12 5 16 1<br>6 15 2 11 | $\delta$<br>3 13 12 6<br>15 4 5 10<br>2 9 16 7<br>14 8 1 11 |
| $\gamma$<br>3 10 13 8<br>16 5 2 11<br>6 15 12 1<br>9 4 7 14  | $\alpha$<br>3 10 8 13<br>16 5 11 2<br>9 4 14 7<br>6 15 1 12  | $\alpha$<br>3 10 15 6<br>16 5 4 9<br>2 11 14 7<br>13 8 1 12 | $\delta$<br>3 9 8 14<br>12 5 10 7<br>13 4 15 2<br>6 16 1 11 |
| $\delta$<br>3 12 13 6<br>16 5 4 9<br>1 10 15 8<br>14 7 2 11  | $\beta$<br>3 12 13 6<br>14 5 4 11<br>2 9 16 7<br>15 8 1 10   | $\beta$<br>3 12 13 6<br>14 5 4 11<br>8 15 10 1<br>9 2 7 16  | $\beta$<br>3 12 6 13<br>14 5 11 4<br>9 2 16 7<br>8 15 1 10  |
| $\delta$<br>3 9 8 14<br>10 6 11 7<br>16 4 13 1<br>5 15 2 12  | $\gamma$<br>3 9 14 8<br>16 6 1 11<br>5 13 12 2<br>10 4 7 13  | $\beta$<br>3 9 8 14<br>16 6 11 1<br>10 4 13 7<br>5 15 2 12  | $\beta$<br>3 10 16 5<br>15 6 4 9<br>2 11 13 8<br>14 7 1 12  |
| $\delta$<br>3 15 2 14<br>16 6 11 11<br>10 4 13 7<br>5 9 8 12 | $\gamma$<br>3 9 14 8<br>16 6 1 11<br>2 12 15 5<br>13 7 4 10  | $\gamma$<br>3 12 14 5<br>13 6 4 11<br>2 9 15 8<br>16 7 1 10 | $\delta$<br>3 10 13 8<br>12 6 1 15<br>5 11 16 2<br>14 7 4 9 |

TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE. 325

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| $\beta$<br>3 10 13 8<br>15 6 1 12<br>2 11 16 5<br>14 7 4 9  | $\gamma$<br>3 12 14 5<br>13 6 4 11<br>8 15 9 2<br>10 1 7 16 | $\beta$<br>3 12 5 14<br>13 6 11 4<br>10 1 16 7<br>8 15 2 9  | $\delta$<br>3 13 10 8<br>15 6 1 12<br>2 11 16 5<br>14 4 7 9 |
| $\delta$<br>3 9 8 14<br>10 7 12 5<br>15 2 13 4<br>6 16 1 11 | $\delta$<br>3 10 15 6<br>16 7 2 9<br>1 12 13 8<br>14 5 4 11 | $\delta$<br>3 12 13 6<br>14 7 2 11<br>1 10 15 8<br>16 5 4 9 | $\delta$<br>3 13 12 6<br>14 7 2 11<br>1 10 15 8<br>16 4 5 9 |
| $\delta$<br>3 6 15 10<br>14 7 2 11<br>4 9 16 5<br>13 12 1 8 | $\delta$<br>3 9 16 6<br>10 8 1 15<br>7 13 12 2<br>14 4 5 11 | $\delta$<br>3 9 16 6<br>15 8 1 10<br>2 13 12 7<br>14 4 5 11 | $\beta$<br>3 9 16 6<br>14 8 1 11<br>2 12 13 7<br>15 5 4 10  |
| $\beta$<br>3 9 16 6<br>14 8 1 11<br>5 15 10 4<br>12 2 7 13  | $\beta$<br>3 9 6 16<br>14 8 11 1<br>12 2 13 7<br>5 15 4 10  | $\alpha$<br>3 10 15 6<br>13 8 1 12<br>2 11 14 7<br>16 5 4 9 | $\gamma$<br>3 10 16 5<br>13 8 2 11<br>6 15 9 4<br>12 1 7 14 |
| $\alpha$<br>3 10 5 16<br>13 8 11 2<br>12 1 14 7<br>6 15 4 9 | $\delta$<br>3 6 15 10<br>12 8 1 13<br>5 9 16 4<br>14 11 2 7 | $\delta$<br>3 6 15 10<br>13 8 1 12<br>4 9 16 5<br>14 11 2 7 | $\delta$<br>3 12 5 14<br>15 8 9 2<br>6 1 16 11<br>10 13 4 7 |

326 TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE.

|   |   |  |   |
|---|---|--|---|
| $\delta$<br>3 13 4 14<br>15 8 9 2<br>6 1 16 11<br>10 12 5 7 | $\delta$<br>3 14 11 6<br>16 9 8 1<br>2 7 10 15<br>13 4 5 12 | $\delta$<br>3 2 16 13<br>14 9 7 4<br>11 8 10 5<br>6 15 1 12  | $\gamma$<br>3 6 13 12<br>16 9 2 7<br>10 15 8 1<br>5 4 11 14 |
| $\alpha$<br>3 6 12 13<br>16 9 7 2<br>5 4 14 11<br>10 15 1 8 | $\alpha$<br>3 6 15 10<br>16 9 4 5<br>2 7 14 11<br>13 12 1 8 | $\delta$<br>3 5 12 14<br>8 9 6 11<br>13 4 15 12<br>10 16 1 7 | $\delta$<br>3 8 13 10<br>16 9 4 5<br>1 6 15 12<br>14 11 2 7 |
| $\beta$<br>3 8 13 10<br>14 9 4 7<br>2 5 16 11<br>15 12 1 6  | $\beta$<br>3 8 13 10<br>14 9 4 7<br>12 15 6 1<br>5 2 11 16  | $\beta$<br>3 8 10 13<br>14 9 7 4<br>5 2 16 11<br>12 15 1 6   | $\beta$<br>3 2 16 13<br>11 10 8 5<br>14 7 9 4<br>6 15 1 12  |
| 3 2 13 16<br>11 10 5 8<br>14 7 12 1<br>6 15 4 9             | 3 11 14 6<br>13 10 7 4<br>2 5 12 15<br>16 8 1 9             | 3 11 14 6<br>16 10 7 1<br>2 8 9 15<br>13 5 4 12              | $\delta$<br>3 5 12 14<br>6 10 7 11<br>16 4 13 1<br>9 15 2 8 |
| $\gamma$<br>3 5 14 12<br>16 10 1 7<br>9 15 8 2<br>6 4 11 13 | $\beta$<br>3 5 12 14<br>16 10 7 1<br>6 4 13 11<br>9 15 2 8  | $\beta$<br>3 6 16 9<br>15 10 4 5<br>2 7 13 12<br>14 11 1 8   | $\delta$<br>3 15 2 14<br>16 10 7 1<br>6 4 13 11<br>9 5 12 8 |

TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE. 327

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| $\gamma$<br>3 5 14 12<br>16 10 1 7<br>2 8 15 9<br>13 11 4 6 | $\gamma$<br>3 8 14 9<br>13 10 4 7<br>2 5 15 12<br>16 11 1 6 | $\delta$<br>3 6 13 12<br>8 10 1 15<br>9 7 16 2<br>14 11 4 5 | $\beta$<br>3 6 13 12<br>15 10 1 8<br>2 7 16 9<br>14 11 4 5  |
| $\gamma$<br>3 8 14 9<br>13 10 4 7<br>12 15 5 2<br>6 1 11 16 | $\beta$<br>3 8 9 14<br>13 10 7 4<br>6 1 16 11<br>12 15 2 5  | $\delta$<br>3 13 6 12<br>15 10 1 8<br>2 7 16 9<br>14 4 11 5 | $\delta$<br>3 2 16 13<br>14 11 5 4<br>7 6 12 9<br>10 15 1 8 |
| $\delta$<br>3 14 7 10<br>16 11 6 1<br>2 5 12 15<br>13 4 9 8 | $\delta$<br>3 5 12 14<br>6 11 8 9<br>15 2 13 4<br>10 16 1 7 | $\delta$<br>3 6 15 10<br>16 11 2 5<br>1 8 13 12<br>14 9 4 7 | $\delta$<br>3 8 13 10<br>14 11 2 7<br>1 6 15 12<br>16 9 4 5 |
| $\delta$<br>3 13 8 10<br>14 11 2 7<br>1 6 15 12<br>16 4 9 5 | $\delta$<br>3 6 12 13<br>8 11 5 10<br>9 2 16 7<br>14 15 1 4 | $\delta$<br>3 6 12 13<br>10 11 5 8<br>7 2 16 9<br>14 15 1 4 | $\delta$<br>3 2 13 16<br>14 11 7 1<br>11 5 10 8<br>6 15 4 9 |
| $\delta$<br>3 13 2 16<br>14 12 7 1<br>11 5 10 8<br>6 4 15 9 | $\delta$<br>3 2 15 14<br>16 12 1 5<br>9 13 8 4<br>6 7 10 11 | $\delta$<br>3 2 16 13<br>7 12 6 9<br>14 5 11 4<br>10 15 1 8 | $\delta$<br>3 7 10 14<br>16 12 1 5<br>9 13 8 4<br>6 2 15 11 |

328 TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| $\beta$<br>3 7 14 10<br>16 12 5 1<br>2 6 11 15<br>13 9 4 8  | $\beta$<br>3 5 16 10<br>14 12 1 7<br>2 8 13 11<br>15 9 4 6  | $\beta$<br>3 5 16 10<br>14 12 1 7<br>9 15 6 4<br>8 2 11 13  | $\beta$<br>3 5 10 16<br>14 12 7 1<br>8 2 13 11<br>9 15 4 6  |
| $\alpha$<br>3 6 15 10<br>13 12 1 8<br>2 7 14 11<br>16 9 4 5 | $\gamma$<br>3 6 16 9<br>13 12 2 7<br>10 15 5 4<br>8 1 11 14 | $\alpha$<br>3 6 9 16<br>13 12 7 2<br>8 1 14 11<br>10 15 4 5 | $\beta$<br>3 7 14 10<br>9 12 5 8<br>16 13 4 1<br>6 2 11 15  |
| 3 7 10 14<br>16 12 1 5<br>2 6 15 11<br>13 9 8 4             | 3 7 14 10<br>16 12 5 1<br>9 13 4 8<br>6 2 11 15             | 3 9 8 14<br>16 12 1 5<br>2 6 15 11<br>13 7 10 4             | $\delta$<br>3 2 15 14<br>6 13 4 11<br>16 7 10 1<br>9 12 5 8 |
| $\gamma$<br>3 2 14 15<br>16 13 1 4<br>9 12 8 5<br>6 7 11 10 | $\beta$<br>3 2 15 14<br>16 13 4 1<br>6 7 10 11<br>9 12 5 8  | $\gamma$<br>3 6 9 16<br>12 13 2 7<br>14 11 8 1<br>5 4 15 10 | $\beta$<br>3 6 16 9<br>12 13 7 2<br>5 4 10 15<br>14 11 1 8  |
| $\delta$<br>3 12 5 14<br>16 13 4 1<br>6 7 10 11<br>9 2 15 8 | 3 1 16 14<br>15 13 2 4<br>6 8 11 9<br>10 12 5 7             | 3 1 16 14<br>15 13 2 4<br>10 12 7 5<br>6 8 9 11             | 3 8 9 14<br>15 13 2 4<br>10 12 7 5<br>6 1 16 11             |

TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE. 329

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 3 12 5 14<br>15 13 2 4<br>6 8 11 9<br>10 1 16 7             | $\delta$<br>3 2 15 14<br>10 13 4 7<br>16 11 6 1<br>5 8 9 12 | $\beta$<br>3 2 15 14<br>16 13 4 1<br>10 11 6 7<br>5 8 9 12    | $\gamma$<br>3 2 14 15<br>16 13 1 4<br>5 8 12 9<br>10 11 7 6 |
| $\beta$<br>3 8 9 14<br>10 13 4 7<br>16 11 6 1<br>5 2 15 12  | $\gamma$<br>3 8 14 9<br>10 13 7 4<br>5 2 12 15<br>16 11 1 6 | $\delta$<br>3 8 9 14<br>16 13 4 1<br>10 11 6 7<br>5 2 15 12   | $\gamma$<br>3 6 15 10<br>12 13 8 1<br>14 11 2 7<br>5 4 9 16 |
| $\gamma$<br>3 8 14 9<br>10 13 7 4<br>15 12 2 5<br>6 1 11 16 | $\gamma$<br>3 2 13 16<br>15 14 1 4<br>10 11 8 5<br>6 7 12 9 | $\gamma$<br>3 2 16 13<br>15 14 4 1<br>5 6 7 9 12<br>10 11 5 8 | $\gamma$<br>3 5 16 10<br>12 14 7 1<br>6 4 9 15<br>13 11 2 8 |
| $\gamma$<br>3 5 10 16<br>12 14 1 7<br>13 11 8 2<br>6 4 15 9 | $\gamma$<br>3 2 16 13<br>15 14 4 1<br>10 11 5 8<br>6 7 9 12 | $\gamma$<br>3 2 13 16<br>15 14 1 4<br>6 7 12 9<br>10 11 8 5   | $\gamma$<br>3 8 13 10<br>9 14 7 4<br>6 1 12 15<br>16 11 2 5 |
| $\gamma$<br>3 8 10 13<br>9 14 4 7<br>16 11 5 2<br>6 1 15 12 | $\gamma$<br>3 5 16 10<br>12 14 7 1<br>13 11 2 8<br>6 4 9 15 | $\gamma$<br>3 8 13 10<br>9 14 7 4<br>16 11 2 5<br>6 1 12 15   | $\gamma$<br>3 12 5 14<br>13 15 4 2<br>8 6 9 11<br>10 1 16 7 |

# 330 TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 3 1 14 16<br>12 15 2 5<br>13 10 7 4<br>6 8 11 9             | 3 1 16 14<br>13 15 4 2<br>8 6 9 11<br>10 12 5 7             | 3 1 14 16<br>13 15 2 4<br>12 10 7 5<br>6 8 11 9             | $\beta$<br>3 2 13 16<br>14 15 4 1<br>12 9 6 7<br>5 8 11 10  |
| $\beta$<br>3 2 16 13<br>14 15 1 4<br>5 8 10 11<br>12 9 7 6  | $\beta$<br>3 2 16 13<br>14 15 1 4<br>9 12 6 7<br>8 5 11 10  | $\beta$<br>3 2 13 16<br>14 15 4 1<br>8 5 10 11<br>9 12 7 6  | $\beta$<br>3 1 14 16<br>8 15 2 9<br>13 6 11 4<br>10 12 7 5  |
| 3 1 14 16<br>13 15 2 4<br>8 6 11 9<br>10 12 7 5             | 3 1 16 14<br>13 15 4 2<br>12 10 5 7<br>6 8 9 11             | 3 8 9 14<br>13 15 4 2<br>12 10 5 7<br>6 1 16 11             | $\delta$<br>3 2 16 13<br>8 15 1 10<br>9 6 12 7<br>14 11 5 4 |
| $\delta$<br>3 2 16 13<br>10 15 1 8<br>7 6 12 9<br>14 11 5 4 | $\gamma$<br>3 6 13 12<br>10 15 8 1<br>16 9 2 7<br>5 4 11 14 | $\gamma$<br>3 6 16 9<br>10 15 5 4<br>13 12 2 7<br>8 1 11 14 | $\delta$<br>3 4 13 14<br>6 16 1 11<br>15 9 8 2<br>10 5 12 7 |
| $\delta$<br>3 4 13 14<br>15 16 1 2<br>6 9 8 11<br>10 5 12 7 | $\delta$<br>3 4 14 13<br>15 16 2 1<br>6 9 7 12<br>10 5 11 8 | $\delta$<br>3 5 12 14<br>6 16 1 11<br>15 9 8 2<br>10 4 13 7 | $\delta$<br>3 5 12 14<br>15 16 1 2<br>6 9 8 11<br>10 4 13 7 |

TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE. 331

|   |   |   |  |
|---|---|---|--|
| $\delta$<br>3 2 15 14<br>10 16 1 7<br>13 11 6 4<br>8 5 12 9 | $\beta$<br>3 2 15 14<br>13 16 1 4<br>10 11 6 7<br>8 5 12 9  | $\gamma$<br>3 2 14 15<br>13 16 4 1<br>8 5 9 12<br>10 11 7 6 | $\beta$<br>3 5 12 14<br>10 16 11 7<br>13 11 16 4<br>8 2 15 9 |
| $\gamma$<br>3 5 14 12<br>10 16 7 1<br>8 2 9 15<br>13 11 4 6 | $\delta$<br>3 5 12 14<br>13 16 1 4<br>10 11 6 7<br>8 2 15 9 | $\delta$<br>3 2 15 14<br>6 16 1 11<br>13 7 10 4<br>12 9 8 5 | $\gamma$<br>3 2 14 15<br>13 16 4 1<br>12 9 5 8<br>6 7 11 10  |
| $\beta$<br>3 2 15 14<br>13 16 1 4<br>6 7 10 11<br>12 9 8 5  | $\gamma$<br>3 6 12 13<br>9 16 2 7<br>14 11 5 4<br>8 1 15 10 | $\beta$<br>3 6 13 12<br>9 16 7 2<br>8 1 10 15<br>14 11 4 5  | $\delta$<br>3 9 8 14<br>13 16 1 4<br>6 7 10 11<br>12 2 15 5  |
| 3 2 15 14<br>12 16 5 1<br>13 9 4 8<br>6 7 10 11             | 3 7 10 14<br>12 16 5 1<br>13 9 4 8<br>6 2 15 11             | 3 7 10 14<br>12 16 5 1<br>6 2 11 15<br>13 9 8 4             | 3 9 8 14<br>12 16 5 1<br>6 2 11 15<br>13 7 10 4              |
| $\gamma$<br>3 5 14 12<br>10 16 7 1<br>15 9 2 8<br>6 4 11 13 | $\gamma$<br>3 6 15 10<br>9 16 5 4<br>14 11 2 7<br>8 1 12 13 | $\beta$<br>4 16 5 9<br>13 7 12 8<br>11 7 14 2<br>6 10 3 15  | $\beta$<br>4 16 9 5<br>13 1 8 12<br>6 10 15 3<br>11 7 2 14   |



332 TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| $\beta$<br>4 16 9 5<br>13 1 8 12<br>7 11 14 2<br>10 6 3 15  | $\beta$<br>4 16 5 9<br>13 1 12 8<br>10 6 15 3<br>7 11 2 14  | $\alpha$<br>4 15 6 9<br>14 1 12 7<br>11 8 13 2<br>5 10 3 16 | $\gamma$<br>4 15 9 6<br>14 1 7 12<br>5 10 16 3<br>11 8 2 13 |
| $\alpha$<br>4 15 10 5<br>14 1 8 11<br>7 12 13 2<br>9 6 3 16 | $\gamma$<br>4 15 5 10<br>14 1 11 8<br>9 6 16 3<br>7 12 2 13 | $\delta$<br>4 15 6 9<br>11 2 13 8<br>14 7 12 1<br>5 10 3 16 | $\delta$<br>4 15 10 5<br>11 2 7 14<br>6 9 16 3<br>13 8 1 12 |
| $\delta$<br>4 15 10 5<br>14 2 7 11<br>3 9 16 6<br>13 8 1 12 | $\delta$<br>4 9 8 13<br>14 3 10 7<br>11 6 15 2<br>5 16 1 12 | $\delta$<br>4 14 11 5<br>16 3 6 9<br>1 10 15 8<br>13 7 2 12 | $\delta$<br>4 10 15 5<br>13 3 6 12<br>8 14 11 1<br>9 7 2 16 |
| $\delta$<br>4 13 8 9<br>15 3 14 2<br>10 6 11 7<br>5 12 1 16 | $\delta$<br>4 9 15 6<br>10 5 3 16<br>7 12 14 1<br>13 8 2 11 | $\beta$<br>4 9 15 6<br>16 5 3 10<br>1 12 14 7<br>13 8 2 11  | $\gamma$<br>4 10 13 7<br>15 5 2 12<br>6 16 11 1<br>9 3 8 14 |
| $\beta$<br>4 10 7 13<br>15 5 12 2<br>9 3 14 8<br>6 16 1 11  | $\delta$<br>4 15 9 6<br>16 5 3 10<br>1 12 14 7<br>13 2 8 11 | $\beta$<br>4 16 1 13<br>9 5 12 8<br>14 2 15 3<br>7 11 6 10  | $\delta$<br>4 16 1 13<br>14 5 12 3<br>9 2 15 8<br>7 11 6 10 |

TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE. 333

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| $\gamma$<br>4 14 7 9<br>11 5 16 2<br>13 3 10 8<br>6 12 1 15 | $\beta$<br>4 14 9 7<br>11 5 2 16<br>6 12 15 1<br>13 3 8 10  | $\delta$<br>4 11 6 13<br>9 5 12 8<br>14 2 15 3<br>7 16 1 10 | $\gamma$<br>4 15 1 14<br>10 5 11 8<br>13 2 16 3<br>7 12 6 9 |
| $\gamma$<br>4 14 1 15<br>11 5 10 8<br>13 3 16 2<br>6 12 7 9 | $\alpha$<br>4 15 1 14<br>9 6 12 7<br>16 3 13 2<br>5 10 8 11 | $\gamma$<br>4 15 5 10<br>9 6 16 3<br>14 1 11 8<br>7 12 2 13 | $\alpha$<br>4 15 10 5<br>9 6 3 16<br>7 12 13 2<br>14 1 8 11 |
| $\delta$<br>4 16 9 5<br>13 6 3 12<br>2 11 14 7<br>15 1 8 10 | $\delta$<br>4 13 2 15<br>9 6 11 8<br>16 3 14 1<br>5 12 7 10 | $\beta$<br>4 13 7 10<br>11 6 16 1<br>14 3 9 8<br>5 12 2 15  | $\beta$<br>4 13 10 7<br>11 6 1 16<br>5 12 15 2<br>14 3 8 9  |
| $\delta$<br>4 13 1 16<br>11 6 10 7<br>14 3 15 2<br>5 12 8 9 | $\delta$<br>4 15 2 13<br>7 6 11 10<br>14 1 16 3<br>9 12 5 8 | $\delta$<br>4 15 2 13<br>14 6 11 3<br>7 1 16 10<br>9 12 5 8 | $\delta$<br>4 12 5 13<br>7 6 11 10<br>14 1 16 3<br>9 15 2 8 |
| $\delta$<br>4 14 7 9<br>12 6 1 15<br>5 11 16 2<br>13 3 10 8 | $\delta$<br>4 9 8 13<br>10 7 14 3<br>15 2 11 6<br>5 16 1 12 | $\delta$<br>4 10 15 5<br>16 7 2 9<br>1 14 11 8<br>13 3 6 12 | $\gamma$<br>4 9 15 6<br>14 7 1 12<br>5 16 10 3<br>11 2 8 13 |

# 334 TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE.

|   |  |   |   |
|---|--|---|---|
| $\alpha$<br>4 9 6 15<br>14 7 12 1<br>11 2 13 8<br>5 16 3 10 | $\alpha$<br>4 9 16 5<br>14 7 2 11<br>1 12 13 8<br>15 6 3 10  | $\beta$<br>4 13 1 16<br>10 7 11 6<br>15 2 14 3<br>5 12 8 9  | $\beta$<br>4 13 6 11<br>10 7 16 1<br>15 2 9 8<br>5 12 3 14  |
| $\beta$<br>4 13 11 6<br>10 7 1 16<br>5 12 14 3<br>15 2 8 9  | $\delta$<br>4 11 6 13<br>16 7 10 11<br>5 2 15 12<br>9 14 3 8 | $\delta$<br>4 5 16 9<br>11 7 2 14<br>6 10 15 3<br>13 12 1 8 | $\delta$<br>4 5 16 9<br>14 7 2 11<br>3 10 15 6<br>13 12 1 8 |
| $\delta$<br>4 14 3 13<br>16 7 10 1<br>5 2 15 12<br>9 11 6 8 | $\delta$<br>4 9 6 15<br>11 8 13 2<br>14 1 12 7<br>5 16 3 10  | $\delta$<br>4 9 16 5<br>11 8 1 14<br>6 15 10 3<br>13 2 7 12 | $\delta$<br>4 9 16 5<br>14 8 1 11<br>3 15 10 6<br>13 2 7 12 |
| $\delta$<br>4 5 16 9<br>13 8 1 12<br>3 10 15 6<br>14 11 2 7 | $\delta$<br>4 5 14 11<br>10 8 1 15<br>7 9 16 2<br>13 12 3 6  | $\delta$<br>4 5 14 11<br>15 8 1 10<br>2 9 16 7<br>13 12 3 6 | $\delta$<br>4 10 7 13<br>14 8 9 3<br>5 1 16 12<br>11 15 2 6 |
| $\delta$<br>4 14 5 11<br>15 8 1 10<br>2 9 16 7<br>13 3 12 6 | $\delta$<br>4 1 15 14<br>12 9 7 6<br>13 8 10 3<br>5 16 2 11  | $\delta$<br>4 1 14 15<br>12 9 6 7<br>13 8 11 2<br>5 16 3 10 | $\delta$<br>4 12 13 5<br>14 9 8 3<br>1 6 11 16<br>15 7 2 10 |

TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE. 335

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 4 12 13 5<br>15 9 8 2<br>1 7 10 16<br>14 6 3 11             | $\delta$<br>4 5 15 10<br>6 9 3 16<br>11 8 14 1<br>13 12 2 7 | $\beta$<br>4 5 15 10<br>16 9 3 6<br>1 8 14 11<br>13 12 2 7  | $\gamma$<br>4 6 13 11<br>15 9 2 8<br>10 16 7 1<br>5 3 12 14 |
| $\beta$<br>4 6 11 13<br>15 9 8 2<br>5 3 14 12<br>10 16 1 7  | $\delta$<br>4 15 5 10<br>16 9 3 6<br>1 8 14 11<br>13 2 12 7 | $\delta$<br>4 5 14 11<br>7 9 2 16<br>10 8 15 1<br>13 12 3 6 | $\beta$<br>4 5 14 11<br>16 9 2 7<br>1 8 15 10<br>13 12 3 6  |
| $\gamma$<br>4 7 13 10<br>14 9 3 8<br>11 16 6 1<br>5 2 12 15 | $\beta$<br>4 7 10 13<br>14 9 8 3<br>5 2 15 12<br>11 16 1 6  | $\delta$<br>4 14 5 11<br>16 9 2 7<br>1 8 15 10<br>13 3 12 6 | $\gamma$<br>4 6 13 11<br>15 9 2 8<br>1 7 16 10<br>14 12 3 5 |
| $\gamma$<br>4 7 13 10<br>14 9 3 8<br>1 6 16 11<br>15 12 2 5 | $\delta$<br>4 1 15 14<br>13 10 8 3<br>12 7 9 6<br>5 16 2 11 | $\delta$<br>4 13 12 5<br>15 10 7 2<br>1 8 9 16<br>14 3 6 11 | $\delta$<br>4 3 14 13<br>6 10 7 11<br>15 5 12 2<br>9 16 1 8 |
| $\delta$<br>4 3 14 13<br>15 10 7 2<br>6 5 12 11<br>9 16 1 8 | $\delta$<br>4 3 14 13<br>16 10 1 7<br>9 15 8 2<br>5 6 11 12 | $\delta$<br>4 6 11 13<br>16 10 1 7<br>9 15 8 2<br>5 3 14 12 | $\delta$<br>4 6 15 9<br>16 10 5 3<br>1 7 12 14<br>13 11 2 8 |

336 TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| $\delta$<br>4 15 6 9<br>16 10 5 3<br>1 7 12 14<br>13 2 11 8 | $\gamma$<br>4 5 14 11<br>15 10 1 8<br>9 16 7 2<br>6 3 12 13 | $\alpha$<br>4 5 11 14<br>15 10 8 1<br>6 3 13 12<br>9 16 2 7 | $\alpha$<br>4 5 16 9<br>15 10 3 6<br>1 8 13 12<br>14 11 2 7 |
| $\delta$<br>4 5 16 9<br>13 10 3 8<br>2 7 14 11<br>15 12 1 6 | $\delta$<br>4 13 2 15<br>16 10 7 1<br>5 3 14 12<br>9 8 11 6 | $\beta$<br>4 7 14 9<br>13 10 3 8<br>1 6 15 12<br>16 11 2 5  | $\beta$<br>4 7 14 9<br>13 10 3 8<br>11 16 5 2<br>6 1 12 15  |
| $\beta$<br>4 7 9 14<br>13 10 8 3<br>6 1 15 12<br>11 16 2 5  | $\delta$<br>4 1 14 15<br>13 11 8 2<br>12 6 9 7<br>5 16 3 10 | $\delta$<br>4 13 12 5<br>14 11 6 3<br>1 8 9 16<br>15 2 7 10 | $\delta$<br>4 1 15 14<br>8 11 5 10<br>13 6 12 3<br>9 16 2 7 |
| 4 1 16 13<br>15 11 2 6<br>10 14 7 3<br>5 8 9 12             | 4 8 9 13<br>15 11 2 6<br>10 14 7 3<br>5 1 16 12             | 4 8 13 9<br>15 11 6 2<br>1 5 12 16<br>14 10 3 7             | $\gamma$<br>4 5 15 10<br>14 11 1 8<br>9 16 6 3<br>7 2 12 13 |
| $\alpha$<br>4 5 10 15<br>14 11 8 1<br>7 2 13 12<br>9 16 3 6 | $\alpha$<br>4 5 16 9<br>14 11 2 7<br>1 8 13 12<br>15 10 3 6 | $\beta$<br>4 6 15 9<br>13 11 2 8<br>1 7 14 12<br>16 10 3 5  | $\beta$<br>4 6 15 9<br>13 11 2 8<br>10 16 5 3<br>7 1 12 14  |

TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE. 337

|   |   |  |   |
|---|---|--|---|
| $\beta$<br>4 6 9 15<br>13 11 8 2<br>7 1 14 12<br>10 16 3 5  | 4 8 13 9<br>10 11 6 7<br>15 14 3 2<br>5 1 12 16             | 4 8 13 9<br>15 11 6 2<br>10 14 3 7<br>5 1 12 16              | $\delta$<br>4 1 16 13<br>6 12 5 11<br>15 7 10 2<br>9 14 3 8 |
| $\delta$<br>4 1 16 13<br>15 12 5 2<br>6 7 10 11<br>9 14 3 8 | $\delta$<br>4 6 15 9<br>14 12 7 1<br>3 5 10 16<br>13 11 2 8 | $\delta$<br>4 6 9 15<br>14 12 1 7<br>11 13 8 2<br>5 3 16 10  | $\delta$<br>4 14 3 13<br>15 12 5 2<br>6 7 10 11<br>9 1 16 8 |
| $\delta$<br>4 1 15 14<br>13 12 6 3<br>8 5 11 10<br>9 16 2 7 | $\delta$<br>4 13 8 9<br>15 12 5 2<br>1 6 11 16<br>14 3 10 7 | $\delta$<br>4 6 15 9<br>14 12 7 1<br>11 13 2 8<br>5 3 10 16  | $\gamma$<br>4 1 14 15<br>16 13 2 3<br>9 12 7 6<br>5 8 11 10 |
| $\gamma$<br>4 1 15 14<br>16 13 3 2<br>5 8 10 11<br>9 12 6 7 | $\gamma$<br>4 6 15 9<br>11 13 8 2<br>5 3 10 16<br>14 12 1 7 | $\gamma$<br>4 6 9 15<br>11 13 2 8<br>14 12 7 1<br>5 3 16 10  | $\gamma$<br>4 1 15 14<br>16 13 3 2<br>9 12 6 7<br>5 8 10 11 |
| $\gamma$<br>4 1 14 15<br>16 13 2 3<br>5 8 11 10<br>9 12 7 6 | $\gamma$<br>4 7 9 14<br>10 13 3 8<br>15 12 6 1<br>5 2 16 11 | $\gamma$<br>4 7 14 9<br>10 13 8 3<br>5 12 11 16<br>15 12 1 6 | $\gamma$<br>4 6 15 9<br>11 13 8 2<br>14 12 7 1<br>5 3 10 16 |

338 TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE.

|   |  |   |   |
|---|--|---|---|
| $\gamma$  | $\delta$   | $\gamma$  | $\beta$   |
| 4 7 14 9<br>10 13 8 3<br>15 12 1 6<br>5 2 11 16 | 4 1 16 13<br>5 14 8 12<br>15 8 9 2<br>10 11 6 7  | 4 1 13 16<br>15 14 2 3<br>10 11 7 6<br>5 8 12 9 | 4 1 16 13<br>15 14 3 2<br>5 8 9 12<br>10 11 6 7 |
| $\gamma$  | $\beta$  | $\delta$  | $\beta$   |
| 4 5 10 15<br>11 14 2 8<br>13 12 7 2<br>6 3 16 9 | 4 5 15 10<br>11 14 8 13<br>6 3 9 16<br>13 12 2 7 | 4 11 6 13<br>15 14 3 2<br>5 8 9 12<br>10 1 16 7 | 4 2 13 15<br>9 14 3 8<br>16 11 6 1<br>5 7 12 10 |
| 4 2 13 15<br>16 14 3 1<br>9 11 6 8<br>5 7 12 10 | 4 2 13 15<br>5 14 3 12<br>16 7 10 1<br>9 11 8 6  | 4 2 13 15<br>16 14 3 1<br>5 7 10 12<br>9 11 8 6 | 4 1 16 13<br>9 14 3 8<br>15 12 5 2<br>6 7 10 11 |
| $\beta$   | $\gamma$   | $\beta$   | $\beta$   |
| 4 1 16 13<br>15 14 3 2<br>9 12 5 8<br>6 7 10 11 | 4 1 13 16<br>15 14 2 3<br>6 7 11 10<br>9 12 8 5  | 4 7 10 13<br>9 14 3 8<br>15 12 5 2<br>6 1 16 11 | 4 7 13 10<br>9 14 8 3<br>6 1 11 16<br>15 12 2 5 |
| $\delta$  | $\gamma$   | $\gamma$  | $\delta$  |
| 4 7 10 13<br>15 14 3 2<br>9 12 5 8<br>6 1 16 11 | 4 5 16 9<br>11 14 7 2<br>13 12 1 8<br>6 3 10 15  | 4 7 13 10<br>9 14 8 3<br>16 11 1 6<br>5 2 12 15 | 4 3 14 13<br>5 15 2 12<br>16 10 7 1<br>9 6 11 8 |

TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE. 339

|  |   |   |   |
|--|---|---|---|
| $\delta$<br>4 3 14 13<br>16 15 2 1<br>5 10 7 12<br>9 6 11 8  | $\delta$<br>4 3 13 14<br>16 15 1 2<br>5 10 8 11<br>9 6 12 7 | $\delta$<br>4 5 16 9<br>6 15 10 3<br>11 2 7 14<br>13 12 1 8 | $\delta$<br>4 6 11 13<br>16 15 7 1<br>5 10 7 12<br>9 3 14 8 |
| $\delta$<br>4 1 16 13<br>5 15 2 12<br>14 8 9 3<br>11 10 7 6  | $\gamma$<br>4 1 13 16<br>14 15 3 2<br>11 10 6 7<br>5 8 12 9 | $\beta$<br>4 1 16 13<br>14 15 2 3<br>5 8 9 12<br>11 10 7 6  | $\gamma$<br>4 5 11 14<br>10 15 1 8<br>13 12 6 3<br>7 2 16 9 |
| $\beta$<br>4 5 14 11<br>10 15 8 1<br>7 2 9 16<br>13 12 3 6   | $\delta$<br>4 10 7 13<br>14 15 2 3<br>5 8 9 12<br>11 1 16 6 | $\delta$<br>4 1 16 13<br>9 15 2 8<br>14 12 5 3<br>7 6 11 10 | $\beta$<br>4 1 16 13<br>14 15 2 3<br>9 12 5 8<br>7 6 11 10  |
| $\gamma$<br>4 1 13 16<br>14 15 3 2<br>7 16 10 11<br>9 12 8 5 | $\beta$<br>4 6 11 13<br>9 15 2 8<br>14 12 5 3<br>7 1 16 10  | $\gamma$<br>4 6 13 11<br>9 15 8 2<br>7 1 10 16<br>14 12 3 5 | $\delta$<br>4 6 11 13<br>14 15 2 3<br>9 12 5 8<br>7 1 16 10 |
| $\delta$<br>4 1 16 13<br>11 15 6 2<br>14 10 3 7<br>5 8 9 12  | $\delta$<br>4 8 9 13<br>11 15 6 2<br>14 10 3 7<br>5 1 16 12 | $\gamma$<br>4 5 16 9<br>10 15 6 3<br>13 12 1 8<br>7 2 11 14 | $\gamma$<br>4 6 13 11<br>9 15 8 2<br>16 10 1 7<br>5 3 12 14 |



340 TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| $\delta$<br>4 2 15 13<br>5 16 1 12<br>14 9 8 3<br>11 7 10 6   | $\delta$<br>4 2 15 13<br>14 16 1 3<br>5 9 8 12<br>11 7 10 6 | $\delta$<br>4 2 15 13<br>7 16 1 10<br>14 11 6 3<br>9 5 12 8     | $\delta$<br>4 2 15 13<br>14 16 1 3<br>7 11 6 10<br>9 5 12 8     |
| $\delta$<br>4 5 12 13<br>7 16 1 10<br>14 11 6 3<br>9 2 15 8   | $\delta$<br>4 5 12 13<br>14 16 1 3<br>7 11 6 10<br>9 2 15 8 | $\delta$<br>4 5 14 11<br>7 16 19 2<br>10 1 8 15<br>13 12 3 6    | $\delta$<br>4 7 10 13<br>14 16 1 3<br>5 9 8 12<br>11 2 15 6     |
| $\beta$<br>4 1 14 15<br>13 16 3 2<br>11 10 5 8<br>6 7 12 9    | $\beta$<br>4 1 15 14<br>13 16 12 3<br>6 7 9 12<br>11 10 8 5 | $\beta$<br>4 1 15 14<br>13 16 12 3<br>10 11 5 8<br>7 6 12 9     | $\beta$<br>4 2 14 15<br>13 16 3 2<br>7 6 9 12<br>10 11 8 5      |
| $\gamma$<br>4 3 14 13<br>10 16 17 11<br>15 9 2 8<br>5 6 11 12 | $\beta$<br>4 6 11 13<br>10 16 7 1<br>15 9 12 8<br>5 3 14 12 | $\gamma$<br>4 15 14 11<br>9 16 17 12<br>15 10 11 8<br>6 3 12 13 | $\gamma$<br>4 5 15 10<br>9 16 17 13<br>14 11 12 8<br>7 12 12 13 |
| $\gamma$<br>5 11 10 8<br>16 2 3 13<br>4 14 15 1<br>9 7 6 12   | $\beta$<br>5 12 9 8<br>15 2 3 14<br>4 13 16 1<br>10 7 6 11  | $\gamma$<br>5 10 11 8<br>16 3 2 13<br>4 15 14 11<br>9 6 7 12    | $\beta$<br>5 12 9 8<br>14 3 2 15<br>4 13 16 1<br>11 6 7 10      |

TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE. 341

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| γ  |    |    |    | γ  |    |    |    | δ  |    |    |    | β  |    |    |    |
| 5  | 9  | 12 | 8  | 5  | 9  | 12 | 8  | 5  | 10 | 11 | 8  | 5  | 10 | 11 | 8  |
| 16 | 4  | 1  | 13 | 16 | 4  | 1  | 13 | 14 | 4  | 1  | 15 | 15 | 4  | 1  | 14 |
| 3  | 15 | 14 | 2  | 2  | 14 | 15 | 3  | 3  | 13 | 16 | 2  | 2  | 13 | 16 | 3  |
| 10 | 6  | 7  | 11 | 11 | 7  | 6  | 10 | 12 | 7  | 6  | 9  | 12 | 7  | 6  | 9  |
| β  |    |    |    | δ  |    |    |    | δ  |    |    |    | δ  |    |    |    |
| 5  | 11 | 10 | 8  | 5  | 11 | 10 | 8  | 5  | 4  | 13 | 12 | 5  | 11 | 8  | 10 |
| 14 | 4  | 1  | 15 | 15 | 4  | 1  | 14 | 11 | 6  | 3  | 14 | 15 | 6  | 9  | 4  |
| 3  | 13 | 16 | 2  | 2  | 13 | 16 | 3  | 8  | 9  | 16 | 1  | 1  | 2  | 3  | 16 |
| 12 | 6  | 7  | 9  | 9  | 6  | 7  | 12 | 10 | 15 | 2  | 7  | 12 | 14 | 1  | 7  |
| δ  |    |    |    | δ  |    |    |    | δ  |    |    |    | δ  |    |    |    |
| 5  | 4  | 13 | 12 | 5  | 10 | 8  | 11 | 5  | 2  | 15 | 12 | 5  | 13 | 4  | 12 |
| 10 | 7  | 2  | 15 | 14 | 7  | 9  | 4  | 16 | 8  | 1  | 9  | 16 | 8  | 1  | 9  |
| 8  | 9  | 16 | 1  | 3  | 2  | 16 | 13 | 3  | 11 | 14 | 6  | 3  | 11 | 14 | 6  |
| 11 | 14 | 3  | 6  | 12 | 15 | 1  | 6  | 10 | 13 | 4  | 7  | 10 | 2  | 15 | 7  |
| δ  |    |    |    | δ  |    |    |    | δ  |    |    |    | δ  |    |    |    |
| 5  | 3  | 14 | 12 | 5  | 13 | 4  | 12 | 5  | 4  | 14 | 11 | 5  | 4  | 15 | 10 |
| 16 | 8  | 1  | 9  | 16 | 8  | 1  | 9  | 16 | 9  | 7  | 2  | 16 | 9  | 6  | 3  |
| 2  | 10 | 15 | 7  | 2  | 10 | 15 | 7  | 3  | 6  | 12 | 13 | 2  | 7  | 12 | 13 |
| 11 | 13 | 4  | 6  | 11 | 3  | 14 | 6  | 10 | 15 | 1  | 8  | 11 | 14 | 1  | 8  |
| δ  |    |    |    | δ  |    |    |    | δ  |    |    |    | δ  |    |    |    |
| 5  | 3  | 16 | 10 | 5  | 3  | 16 | 10 | 5  | 6  | 11 | 12 | 5  | 15 | 2  | 12 |
| 6  | 9  | 4  | 15 | 15 | 9  | 4  | 6  | 16 | 9  | 8  | 1  | 16 | 9  | 8  | 1  |
| 11 | 8  | 13 | 2  | 2  | 8  | 13 | 11 | 3  | 4  | 13 | 14 | 3  | 4  | 13 | 14 |
| 12 | 14 | 1  | 7  | 12 | 14 | 1  | 7  | 10 | 15 | 2  | 7  | 10 | 6  | 11 | 7  |

# 341 TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE.

|   |  |   |   |
|---|--|---|---|
| $\delta$<br>5 2 15 12<br>8 9 4 13<br>10 7 14 3<br>11 16 1 6 | $\delta$<br>5 8 10 11<br>16 9 7 2<br>1 4 14 15<br>12 13 3 6  | $\delta$<br>5 3 14 12<br>4 10 7 13<br>16 6 11 1<br>9 15 2 8 | $\beta$<br>5 3 14 12<br>16 10 7 1<br>4 6 11 13<br>9 15 2 8  |
| $\beta$<br>5 4 16 9<br>15 10 6 3<br>2 7 11 14<br>12 13 1 8  | $\delta$<br>5 15 2 12<br>16 10 7 11<br>4 6 11 13<br>9 3 14 8 | $\beta$<br>5 1 16 12<br>14 10 3 7<br>4 8 13 9<br>11 15 2 6  | $\beta$<br>5 14 4 11<br>15 10 8 1<br>2 3 13 16<br>12 7 9 6  |
| $\delta$<br>5 2 15 12<br>4 11 6 13<br>16 7 10 1<br>9 14 3 8 | $\beta$<br>5 2 15 12<br>16 11 6 4<br>4 7 10 13<br>9 14 3 8   | $\beta$<br>5 14 3 12<br>4 11 6 13<br>16 7 10 1<br>9 2 15 8  | $\delta$<br>5 14 3 12<br>16 11 6 1<br>4 7 10 13<br>9 2 15 8 |
| $\gamma$<br>5 2 16 11<br>15 12 6 1<br>4 7 9 14<br>10 13 3 8 | $\gamma$<br>5 3 16 10<br>14 12 7 11<br>4 6 9 15<br>11 13 2 8 | $\delta$<br>5 3 16 10<br>11 13 8 2<br>6 4 9 15<br>12 14 1 7 | $\delta$<br>5 3 16 10<br>2 13 8 11<br>15 4 9 6<br>12 14 1 7 |
| $\delta$<br>5 2 15 12<br>16 13 4 1<br>3 8 9 14<br>10 11 6 7 | $\delta$<br>5 11 6 12<br>16 13 4 1<br>3 8 9 14<br>10 2 15 7  | $\delta$<br>5 4 14 11<br>16 13 3 2<br>1 8 10 15<br>12 9 7 6 | $\delta$<br>5 4 14 11<br>2 13 3 16<br>15 8 10 1<br>12 9 7 6 |

TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE. 343

|   |   |   |  |
|---|---|---|--|
| $\delta$<br>5 3 16 10<br>4 14 1 15<br>13 11 8 2<br>12 6 9 7 | $\delta$<br>5 3 16 10<br>4 14 1 15<br>13 11 8 2<br>12 6 9 7 | $\delta$<br>5 11 16 12<br>4 10 14 7 3<br>13 8 4 9 13<br>11 15 2 6 | $\delta$<br>5 10 8 11<br>13 14 4 1<br>2 7 9 16<br>12 3 13 6  |
| $\beta$<br>5 3 16 10<br>12 14 1 7<br>9 15 4 6<br>8 2 13 11  | $\gamma$<br>5 4 16 9<br>11 14 2 7<br>10 15 3 6<br>8 1 13 12 | $\delta$<br>5 2 16 11<br>4 15 1 14<br>13 10 8 3<br>12 7 9 6       | $\delta$<br>5 2 16 11<br>14 15 1 4<br>3 10 8 12<br>12 7 9 16 |
| $\beta$<br>5 2 16 11<br>12 15 1 6<br>9 14 4 7<br>8 3 13 10  | $\gamma$<br>5 4 16 9<br>10 15 3 6<br>11 14 2 7<br>8 1 13 12 | $\delta$<br>5 2 15 12<br>8 16 9 1<br>11 3 6 14<br>10 13 4 7       | $\beta$<br>5 8 11 10<br>13 16 3 2<br>4 9 6 15<br>12 1 14 7   |
| 5 8 10 11<br>13 16 2 3<br>4 9 7 14<br>12 1 15 6             | 5 8 10 11<br>3 16 2 13<br>14 9 7 4<br>12 1 15 6             | $\delta$<br>5 2 15 12<br>10 16 1 7<br>11 13 4 6<br>8 3 14 9       | $\beta$<br>5 2 15 12<br>11 16 1 6<br>10 13 4 7<br>8 3 14 9   |
| $\beta$<br>5 3 14 12<br>10 16 1 7<br>11 13 4 6<br>8 2 15 9  | $\delta$<br>5 3 14 12<br>11 16 1 6<br>10 13 4 7<br>8 2 15 9 | $\gamma$<br>5 4 14 11<br>9 16 2 7<br>12 13 3 6<br>8 11 15 10      | $\gamma$<br>5 4 15 10<br>9 16 3 6<br>12 13 2 7<br>8 1 14 11  |

# 344 TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE.

| $\beta$   | $\gamma$   | $\delta$  | $\epsilon$                                      |
|---|--|---|---|
| 6 11 10 7<br>16 1 4 13<br>3 14 15 2<br>9 8 5 12 | 6 11 9 7<br>15 1 4 14<br>3 13 16 2<br>10 8 5 11  | 6 10 11 7<br>15 3 2 14<br>4 16 13 1<br>9 5 8 12 | 6 9 12 7<br>13 3 2 16<br>1 14 15 4<br>11 8 5 10 |
| $\beta$   | $\beta$  | $\delta$  | $\gamma$  |
| 6 9 12 7<br>16 3 2 13<br>1 14 15 4<br>11 8 5 10 | 6 12 9 7<br>13 13 2 16<br>4 14 15 1<br>11 5 8 10 | 6 12 9 7<br>16 3 2 13<br>1 14 15 4<br>11 8 5 10 | 6 10 11 7<br>15 3 2 14<br>1 13 16 4<br>12 8 5 9 |
| $\gamma$  | $\beta$  | $\delta$  | $\delta$  |
| 6 9 12 7<br>15 4 2 14<br>3 16 13 2<br>10 5 8 11 | 6 11 10 7<br>13 4 1 16<br>3 14 15 2<br>12 5 8 9  | 6 7 12 9<br>14 4 2 15<br>3 13 16 2<br>11 10 5 8 | 6 7 12 9<br>15 4 1 14<br>2 13 16 3<br>11 10 5 8 |
| $\delta$  | $\delta$   | $\delta$  | $\delta$  |
| 6 12 7 9<br>14 4 1 15<br>3 13 16 2<br>11 5 10 8 | 6 12 7 9<br>15 4 2 14<br>2 13 16 3<br>11 5 10 8  | 6 3 14 11<br>12 5 4 13<br>7 10 15 2<br>9 16 1 8 | 6 12 7 9<br>16 5 10 3<br>1 4 15 14<br>11 13 2 8 |
| $\delta$  | $\delta$   | $\delta$  | $\beta$   |
| 6 1 16 11<br>15 7 2 10<br>4 12 13 5<br>9 14 3 8 | 6 14 3 11<br>15 7 2 10<br>4 12 13 5<br>9 1 16 8  | 6 3 15 10<br>4 9 5 16<br>13 8 12 1<br>11 14 2 7 | 6 3 15 10<br>16 9 5 4<br>1 8 12 13<br>11 14 2 7 |

TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE. 345

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| $\beta$<br>6 4 13 11<br>15 9 8 2<br>3 5 12 14<br>10 16 1 7  | $\delta$<br>6 15 3 10<br>16 9 5 4<br>1 8 12 13<br>11 2 14 7 | $\alpha$<br>6 3 13 12<br>15 10 8 1<br>4 5 11 14<br>9 16 2 7 | $\alpha$<br>6 3 16 9<br>15 10 5 4<br>1 8 11 14<br>12 13 2 7 |
| $\gamma$<br>6 1 15 12<br>16 11 5 2<br>3 8 10 13<br>9 14 4 7 | $\gamma$<br>6 4 15 9<br>13 11 8 2<br>3 5 10 16<br>12 14 1 7 | $\delta$<br>6 1 16 11<br>3 12 5 14<br>15 8 9 2<br>10 13 4 7 | $\beta$<br>6 1 16 11<br>15 12 5 2<br>3 8 9 14<br>10 13 4 7  |
| $\beta$<br>6 3 15 10<br>13 12 8 1<br>4 5 9 16<br>11 14 2 7  | $\delta$<br>6 13 4 11<br>15 12 5 2<br>3 8 9 14<br>10 1 16 7 | $\delta$<br>6 3 14 11<br>4 13 12 5<br>15 2 7 10<br>9 16 1 8 | $\delta$<br>6 4 15 9<br>16 13 2 3<br>1 12 7 14<br>11 5 10 8 |
| $\gamma$<br>6 3 15 10<br>12 13 1 8<br>9 16 4 5<br>7 2 14 11 | $\beta$<br>6 4 15 9<br>11 13 2 8<br>10 16 3 5<br>7 1 14 12  | $\gamma$<br>6 7 12 9<br>14 15 4 1<br>3 10 5 16<br>11 2 13 8 | $\gamma$<br>6 7 12 9<br>1 15 4 14<br>16 10 5 3<br>11 2 13 8 |
| $\gamma$<br>6 3 13 12<br>10 15 1 8<br>11 14 4 5<br>7 2 16 9 | $\delta$<br>6 1 16 11<br>9 15 2 8<br>12 14 3 5<br>7 4 13 10 | $\beta$<br>6 1 16 11<br>12 15 2 5<br>9 14 3 8<br>7 4 13 10  | $\beta$<br>6 4 13 11<br>9 15 2 8<br>12 14 3 5<br>7 1 16 10  |

Rec. de P. Ac. Tom. V.

Ecc

46 TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| $\delta$<br>6 4 13 11<br>2 15 2 5<br>9 14 3 8<br>7 1 16 10  | $\gamma$<br>6 3 16 9<br>10 15 4 5<br>11 14 1 8<br>7 2 13 12 | $\delta$<br>6 2 15 11<br>7 16 1 10<br>12 13 4 5<br>9 3 14 8 | $\delta$<br>6 2 15 11<br>12 16 1 5<br>7 13 4 10<br>9 3 14 8 |
| $\delta$<br>6 3 14 11<br>7 16 1 10<br>12 13 4 5<br>9 2 15 8 | $\delta$<br>6 3 14 11<br>12 16 1 5<br>7 13 4 10<br>9 2 15 8 | $\beta$<br>6 1 15 12<br>11 16 2 5<br>10 13 3 8<br>7 4 14 9  | $\gamma$<br>6 3 15 10<br>9 16 4 5<br>12 13 1 8<br>7 2 14 11 |
| $\delta$<br>7 6 11 10<br>14 3 2 15<br>4 13 16 1<br>9 12 5 8 | $\delta$<br>7 12 5 10<br>14 3 2 15<br>4 13 16 1<br>9 6 11 8 | 7 5 12 10<br>16 4 1 13<br>2 14 15 3<br>9 11 6 8             | 7 11 6 10<br>16 4 1 13<br>2 14 15 3<br>9 5 12 8             |
| $\delta$<br>7 2 15 10<br>12 5 4 13<br>6 11 14 3<br>9 16 1 8 | $\delta$<br>7 16 1 10<br>12 5 4 13<br>6 11 14 3<br>9 2 15 8 | 7 1 16 10<br>14 6 3 11<br>4 12 13 5<br>9 15 2 8             | 7 15 2 10<br>14 6 3 11<br>4 12 13 5<br>9 1 16 8             |
| $\delta$<br>7 2 15 10<br>4 13 12 5<br>14 3 6 11<br>9 16 1 8 | $\delta$<br>7 4 14 9<br>16 13 3 2<br>1 12 6 15<br>10 5 11 8 | 7 1 16 10<br>6 14 11 3<br>12 4 5 13<br>9 15 2 8             | 7 6 12 9<br>15 14 4 1<br>2 11 5 16<br>10 3 13 8             |

| TABLE GÉNÉRALE DES QUARREZ DE QUATRE. 347 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 7   | 2  | 16 | 9  | 7  | 2  | 16 | 9  | 7  | 4  | 14 | 9  | 7  | 4  | 14 | 9  |
| 6   | 15 | 1  | 12 | 12 | 15 | 1  | 6  | 11 | 16 | 2  | 5  | 5  | 16 | 2  | 11 |
| 11  | 14 | 4  | 5  | 5  | 14 | 4  | 11 | 6  | 13 | 3  | 12 | 11 | 13 | 3  | 6  |
| 10  | 3  | 13 | 8  | 10 | 3  | 13 | 8  | 10 | 1  | 15 | 8  | 10 | 1  | 15 | 8  |

α . . . . . 48

β . . . . . 192

γ . . . . . 192

δ . . . . . 318

ε . . . . . 110

Somme 880



## N O M B R E D E S T A B L E S

*de chaque sorte.*

|  |           |     |
|--|-----------|-----|
| <b>D</b> Et celles qui ont 1 à l'un des coins, il y en a | 208       | 208 |
| <b>D</b> Et de celles qui ont 2                          | 200       | 200 |
| 3  | 204       | 166 |
| 4  | 238       | 178 |
| 5  | 216       | 64  |
| 6  | 206       | 48  |
| 7  | 230       | 16  |
|  | Somme 880 |     |

Mais parce que des Tables qui ont à l'un des coins, 3, 4, 5, 6, ou 7, ont aussi à d'autres coins des nombres moindres, comme 1 ou 2, &c. on a mis ensuite la multitude des Tables qui ont quelqu'un de ces nombres à l'un de leurs coins, & aux autres coins des nombres plus grands. Ainsi il y a 204 Tables, qui ont trois à l'un de leurs coins; mais il n'y en a que cent soixante-six qui aient 3 à l'un de leurs coins, & aux autres coins des nombres plus grands que 3. De même il y a deux cens trente Tables qui ont 7 à l'un de leurs coins; mais il n'y en a que seize qui n'aient à aucun de leurs coins des nombres moindres que 7.

|   |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|
| A | 6  | 3  | 13 | 12 |
|   | 15 | 10 | 8  | 1  |
|   | 4  | 5  | 11 | 14 |
|   | 9  | 16 | 2  | 7  |

Les Tables qui ont cette marque *a* en tête, ont cette propriété,

propriété, que quatre nombres étant pris en quarré dans cette Table en quelque façon que ce soit, font autant qu'un des côtez. Ainsi en la Table A, les nombres pris en quarré en tout sens, comme 6, 15, 3, 10, | 3, 10, 13, 8, | 13, 8, 12, 1, | 15, 10, 4, 5, | 10, 8, 5, 11, | 8, 1, 11, 14, | 4, 9, 16, 5, | 5, 16, 11, 2, | & 11, 2, 14, 7, | font 34, sçavoir autant que chacun des côtez. De même si

3

6 3 13 12

15 10 8 1

4 5 11 14

9 16 2 7

on prend les angles des quarrez de 3 de côté; sçavoir 6, 4, 11, 13, | 3, 5, 14, 12, | 15, 8, 9, 2, | & 10, 1, 16, 7, & aussi les angles du quarré total; 6, 12, 9, 7, ils feront tous pareille somme de 34; & de ces Tables il y en a en tout 48, & on peut faire 12 Tables qui auront chacune des nombres à un des angles. Par exemple, il y a 12 Tables qui ont 1 à l'un des angles, 12 qui ont 2, autant qui ont 3, 4, 5 ou 6, &c. mais parce qu'il y a quatre nombres ensemble à chaque Table, cela se réduit à 48.

B 6 3 15 10 C 6 1 16 11

13 12 8 1 12 15 2 5

4 5 9 16 9 14 3 8

11 14 2 7 7 4 13 10

Les Tables qui ont cette marque  $\beta$  au-dessus, ont la même égalité que devant, sinon qu'au milieu d'un des côtez & à son opposé, il y a un des quarrez dont les nombres ne sont pas égaux à ceux d'un des côtez. Ainsi en la Table B, les nombres 3, 15, 12, 8, & 5, 9, 14, 2, ne font pas 34; & en la Table C, les nombres 12, 16, 9, 14, & 2,

*Rec. de l'Ac. Tom. V.*

Fff

# 350. DES QUARREZ DE QUATRE.

5, 3, 8 ne font pas 34. Mais si on prend les huit ensemble, ils font le double de 34, puisqu'ils comprennent deux lignes; & de ces Tables il y en a en tout 192.

|   |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|
| D | 6  | 3  | 15 | 10 |
|   | 12 | 13 | 1  | 8  |
|   | 9  | 16 | 4  | 5  |
|   | 7  | 2  | 14 | 11 |

Les Tables marquées *y*, n'ont que les quarrez des angles qui ayent cette égalité avec celui du milieu, mais non pas ceux du milieu des côtez. Ainsi la Table D a égalité dans les nombres 6, 12, 3, 13, | 15, 1, 8, 10, | 9, 16, 7, 2, | 4, 5, 14, 11, | & 13, 1, 16, 4, | & pareillement aux nombres des angles des quarrez de 3, de côté, sçavoir 6, 15, 4, 9, | 10, 3, 16, 5, | 7, 12, 1, 14, | & 2, 13, 8, 11; & enfin au quarré total, 6, 7, 10, 11: & de ces Tables il y en a en tout 192.

|   |          |    |    |    |          |    |    |    |
|---|----------|----|----|----|----------|----|----|----|
| E | <i>c</i> |    |    |    | <i>d</i> |    |    |    |
|   | 6        | 13 | 4  | 11 | 6        | 3  | 14 | 11 |
|   | 15       | 12 | 5  | 2  | 4        | 13 | 12 | 5  |
|   | 3        | 8  | 9  | 14 | 15       | 2  | 7  | 10 |
| F | 10       | 1  | 16 | 7  | 9        | 16 | 1  | 8  |
|   | <i>a</i> |    |    |    | <i>b</i> |    |    |    |

Les Tables qui ont cette marque *s*, n'ont égalité, outre les angles du grand quarré, & ceux du quarré du milieu, (auxquels il y a égalité dans toutes les Tables) que deux autres quarrez aux côtez opposez. Ainsi la Table E n'a égalité qu'aux nombres 13, 14, 12, 5, | & 8, 9, 1, 16, | & en outre aux angles extérieurs, 6, 11, 10, 7, & au quarré du milieu, 12, 5, 8, 9. Et la Table F n'a égalité

qu'aux nombres 4, 13, 15, 2, & 12, 5, 7, 10; & aux angles extérieurs 6, 11, 9, 8; & au quarré du milieu, 13, 12, 2, 7: & de ces Tables il y en a 328. Or ces égalitez se doivent toujours entendre outre les lignes qui sont supposées égales entr'elles.

Les autres Tables qui n'ont point de marque, n'ont rien que ce qui est commun à toutes; sçavoir le petit quarré du milieu, & le grand du dehors, où il y ait égalité aux nombres des angles; & de ces Tables il y en a 120.

Or on démontrera, comme il s'ensuit, que les nombres qui sont aux angles de l'enceinte extérieure de la Table de 4, & pareillement les quatre intérieurs, sont égaux à une des lignes. Par exemple, au quarré E les quatre nombres 6, 11, 10, 7 valent nécessairement 34, & pareillement 12, 5, 8, 9, sçavoir autant qu'une des lignes.

En la Table E, si les quatre nombres  $a, b, c, d$ , ne valent pas ensemble 34, il faut qu'ils fassent plus ou moins de 34, qu'ils valent moins. Mais parce que les nombres de chaque ligne doivent faire 34, les lignes  $ab$ , &  $cd$  feront chacune 34. Il faudra donc que les quatre nombres qui sont entre les angles dans les lignes  $ab$ , &  $cd$ , fassent ensemble plus de 34, & ils doivent surpasser 34 d'un nombre égal à celui de l'excès de 34, par dessus les nombres des angles  $a, b, c, d$ , & pareillement les quatre nombres qui sont entre les angles des lignes  $ca$ , &  $db$ ; sçavoir ceux qui seront à la place où sont 15, 3, 2, 14, excéderont 34 d'un nombre égal à celui dont 34 excède les nombres des angles; & par conséquent les nombres qui sont à l'enceinte extérieure entre les angles, excéderont deux fois 34 du double du même excès. Mais les 16 nombres ensemble doivent faire quatre fois 34: & partant les huit nombres qui restent, sçavoir les quatre des angles,  $a, b, c, d$ , & les quatre intérieurs qui doivent être mis à la place où sont 12, 5, 8, 9, seront moindres que deux fois 34, du double du même excès; mais les quatre qui sont aux angles

$a, b, c, d$ , sont moindres que 34, selon le même excès, donc les quatre intérieurs seront moindres aussi que 34, selon le même excès. Et parce que toutes les lignes doivent être égales, posons que l'une des lignes transversales, comme  $cb$ , contienne quatre nombres, qui ensemble fassent 34, il s'ensuivra que les quatre autres contenus en la ligne  $ad$ , feront moins de 34, du double de l'excès de 34, par-dessus les quatre qui sont aux angles  $a, b, c, d$ , ce qui est absurde & contre l'hypothèse: la même chose se fera voir, si on suppose les quatre nombres  $a, b, c, d$ , plus grands que 34; car on montrera de même, que les nombres d'une des lignes transversales seront plus grands que 34 du double de l'excès; & partant les quatre nombres  $a, b, c, d$ , sont égaux à 34. Ce qu'il falloit démontrer.

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $e$ | $f$ | $g$ | $h$ |
| $i$ | $k$ | $l$ | $m$ |
| $n$ | $o$ | $p$ | $q$ |

Mais la même chose se démontrera bien plus brièvement, comme s'ensuit. En la Table  $a, d, n, q$ , les quatre nombres des angles  $a, d, n, q$ , sont égaux aux quatre intérieurs  $f, g, k, l$ ; car les quatre,  $a, d, n, q$ , sont compléments à deux lignes (sçavoir à 68) des quatre nombres,  $b, c, o, p$ , & les quatre  $f, g, k, l$ , des quatre  $e, i, h, m$ . Mais les mêmes huit nombres,  $a, d, n, q, f, g, k, l$ , font ensemble deux lignes, sçavoir les deux diagonales; & partant, tant les quatre  $a, d, n, q$ , que les quatre  $f, g, k, l$ , font autant qu'une ligne. Et de là il s'ensuit aussi, qu'en toute Table les quatre  $b, c, o, p$ , font une ligne, & pareillement les quatre  $e, i, h, m$ .

En toute Table ou carré qui a quatre de côté, les quatre nombres qui sont à l'un des angles de la figure, com-

me  $a, b, e, f$ , sont égaux aux quatre nombres,  $l, m, p, q$ , qui sont à l'angle diametralement opposé, parce que les uns & les autres sont le complément à deux lignes des quatre nombres,  $c, d, g, h$ .

Pareillement, en toute Table les quatre nombres des angles d'un des quarrez de trois, comme  $a, e, l, i$ , sont égaux aux quatre  $f, b, q, o$ , du quarré opposé, parce que les uns & les autres sont le complément à deux lignes des quatre  $b, d, m, k$ .

Si en quelque Table de 4, les quatre nombres d'un des petits quarrez des angles, comme de  $a, b, f, e$ , sont ensemble égaux à une ligne; les autres petits quarrez des angles, comme  $c, d, g, h$ , &c. le seront aussi; & pareillement les nombres des angles du quarré de 3, comme  $a, c, l, i$ , ou  $b, d, m, k$ , &c.

La raison est, que  $a, b, f, e$ , étant égaux aux quatre  $l, m, q, p$ , comme on vient de démontrer, si les uns valent une ligne, les autres en vaudront autant. Et pareillement les autres petits quarrez, sçavoir  $c, d, g, h$ , &  $i, k, n, o$ , qui sont leurs complémens à deux lignes.

Mais puisque les huit,  $c, d, g, h$ , &  $i, k, n, o$ , valent deux lignes par supposition, si on en ôte une ligne, sçavoir  $d, g, k, n$ , le reste, qui sont les quatre  $c, h, i, o$ , vaudront aussi une ligne; & ainsi les huit,  $a, c, l, i$ , &  $b, f, o, q$ , qui sont les angles des deux quarrez de trois opposés, vaudroient deux lignes, puisque les huit nombres sont les quatre  $c, i, o, h$ , qui valent une ligne, & les quatre de la diagonale,  $a, f, l, q$ : mais on a démontré, que les quatre  $a, c, l, i$ , sont égaux aux quatre  $b, f, o, q$ : donc tant les uns que les autres valent une ligne.

On montrera de même, que si les quatre des angles du quarré de trois, comme  $a, c, l, i$ , valent une ligne, chacun des petits quarrez des angles, comme  $a, b, e, f$ , &c. vaudront une ligne.

Car si les quatre  $a, c, l, i$ , valent une ligne, les quatre

## 354 DES QUARRÉZ DE QUATRE.

$h, f, o, q$ , qui leur sont égaux, en vaudront une pareillement : & si de ces huit, qui valent deux lignes, on ôte la diagonale  $a, f, l, q$ , restera une ligne pour la valeur des quatre autres,  $c, b, i, o$ , auxquels ajoutant la diagonale  $d, g, k, n$ , on aura deux lignes pour la valeur des huit nombres,  $c, b, d, g; k, n, i, o$ , mais on a montré qu'en toute Table de quatre, les quatre  $i, k, n, o$ , sont égaux aux quatre  $c, d, g, b$  : donc tant les uns que les autres valent une ligne.

**RESOLUTION**  
**DES**  
**QUATRE PRINCIPAUX**  
**PROBLEMES**  
**D'ARCHITECTURE.**

**Par M. BLONDEL.**



THE UNIVERSITY OF

CHICAGO

LIBRARY

FOR THE

USE OF

STUDENTS

A  
**MONSEIGNEUR**  
**COLBERT,**  
 MINISTRE ET SECRETAIRE  
 D'ETAT,  
**SURINTENDANT**  
**DES BASTIMENS,**  
**ARTS ET MANUFACTURES**  
**DE FRANCE.**

**M**ONSEIGNEUR,

*L'estime que vous avez pour les beaux Arts,  
 oblige tous ceux qui en font profession, de vous re-*  
*Rec. de l'Ac. Tom. V.* *G g g*

garder comme leur Protecteur. Chacun vous offre les fruits de son travail comme des biens qui vous appartiennent ; & je vous présente celui-ci dans le même sentiment , & avec une parfaite reconnaissance de la bonté que vous avez eüe de m'assurer qu'il ne vous seroit pas désagréable.

Vous sçavez , MONSEIGNEUR , que toutes les parties des Mathématiques sont recommandables par les avantages qu'elles apportent dans les affaires du monde ; qu'elles sont utiles dans la Guerre & dans la Paix ; & que les grands Hommes s'en servent en tout temps , ou pour exercer leur valeur , ou pour montrer leur magnificence.

Néanmoins l'Architecture est celle qu'ils considèrent le plus , parce qu'elle achève , pour ainsi dire , leur réputation , & qu'elle conserve le souvenir de leurs victoires , en leur élevant de superbes Trophées.

Un grand Roy comme le nôtre , dont la vie est pleine de merveilles , & qui a fait tant de choses qui paroîtront incroyables à la postérité , doit en laisser des témoignages immortels , qui confirment ceux de l'Histoire , & qui empêchent que les siècles suivans ne la traitent de fabuleuse. Et rien ne le peut mieux faire que l'Architecture. Certaine-

*ment, MONSEIGNEUR, j'ose dire que cet Art admirable servira plus à éterniser la mémoire de LOUIS LE GRAND, que tous les autres Arts qui se vantent de donner l'immortalité.*

*Mais, MONSEIGNEUR, c'est un bonheur bien particulier pour nous, qui en faisons notre principale étude, que Sa Majesté se soit reposé sur vos soins, pour remettre l'Architecture dans son premier lustre. Ce bel Art avoit besoin que vous lui donnassiez un peu de ce temps précieux que vous employez si utilement au service du Roy & de l'Etat, afin qu'il puisse non-seulement égaler aujourd'hui ses ouvrages à la beauté de l'Antique, mais même les porter à un degré de perfection, où les anciens Edifices n'ont jamais été, ni dans la Grece, ni dans l'Empire Romain.*

*Et comme le nom du Roy surpasse maintenant celui de tous les Heros de l'antiquité, il falloit un Ministre, aussi habile & aussi zélé pour sa gloire, que vous l'êtes, pour laisser dans la France des Monumens si magnifiques & si durables de la prospérité de son regne, qu'ils puissent effacer un jour la grandeur de ces anciens Edifices, dont le temps semble respecter les ruines.*

*Pendant que la renommée va répandre par*

*toute la terre le bruit de ses Exploits & célébrer ses Conquêtes & les prodiges inouis de son courage, il est bien juste que l'Architecture & tous les beaux Arts travaillent à l'envi pour rehausser l'éclat de ses Triomphes, & consacrer la mémoire de ses grandes actions. Je voudrois bien, MONSEIGNEUR, que ce Traité y pût contribuer quelque chose : Du moins vous puis-je assurer que je ne l'ai composé que dans cette vûe, & pour communiquer au Public ce que je puis avoir acquis de nouvelles connoissances touchant les pratiques les plus difficiles qui se rencontrent dans les Bâtimens. Je m'estimerai trop recompensé de mon travail, si vous me faites la grace de l'approuver, & d'être persuadé que je suis avec beaucoup de respect,*

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très obéissant  
serviteur, B L O N D E L.



# PREMIER PROBLEME

R E S O L U.

**D**ÉCRIRE Géométriquement en plusieurs manieres, & tout d'un trait, le Contour de l'enflure & diminution des Colonnes.

## SECOND PROBLEME RESOLU.

**L'**APOLLONIUS François des Tactions ; ou trouver une Section Conique qui touche trois lignes droites données en un même plan, & deux de ces lignes en un point donné de chacune : ou bien, décrire Géométriquement les Arcs rampans sur toutes sortes de pieds droits & de hauteur.

## TROISIEME PROBLEME RESOLU.

**T**ROUVER Géométriquement les joints de tête de toutes sortes d'Arcs rampans.

## QUATRIEME PROBLEME RESOLU.

**T**ROUVER la ligne sur laquelle les Poutres doivent être coupées en leur hauteur & largeur, pour les rendre par tout également fortes & résistantes.

Avec la démonstration des Pratiques, accompagnées de diverses réflexions sur le mouvement,

*sur la proportion Harmonique, & sur les erreurs  
de Pappus au sujet de l'inscription des trois mé-  
diétez au demi-cercle, & de Galilée au sujet du  
dernier Problème.*

RESOLUTION  
DES  
QUATRE PRINCIPAUX  
PROBLEMES  
D'ARCHITECTURE.

---

*PREMIER PROBLEME RESOLU.*

*Décrire Géométriquement en plusieurs manieres & sous d'un  
trait, le Contour de l'enslure & diminution des Colonnes.*

PREMIER DISCOURS.

ois que j'ai eûs pour le service  
Etrangers & dans les princi-  
de ce Royaume, m'ont donné  
avoir considérer à loisir la plus  
anciens & modernes qui sont



dans le monde , & si cette facilité jointe à une inclination particuliere que j'ai toujours eue pour l'Architecture , & qui m'a fait soigneusement rechercher ce qui pouvoit être de plus remarquable en chacun d'eux , peut m'avoir accoutumé les yeux à quelque discernement de ce qu'on appelle *Grand & Beau* dans cet Art : il me semble que j'ai quelque droit de dire mes sentimens sur son sujet & d'assurer que l'Architecture a besoin d'étude , pour arriver à la perfection. Et quoique je ne sois pas assez sçavant pour me vanter de connoître ce qui lui manque , ( cet Art supposant un trop grand amas de connoissances profondes & une expérience consommée ; ) je ressens au moins une joye extraordinaire , lors que je voi qu'il s'y fait quelque progrès.

C'est ce qui fait que j'ai beaucoup estimé la pensée de celui qui proposa pour *Etrènes à tous les Architectes* , au commencement de l'année 1664. un *Paradoxe* , comme il dit , c'est - à - dire , un Problème à résoudre touchant la perfection de l'enslure ou *tracés des Colannes* , touchée imparfaitement par Vitruve & non encore résolue ni réglée qu'imparfaitement , quoi qu'Architectoniquement elle le puisse être parfaitement , qui sont les termes dont il s'est servi.

Et j'ai crû, dis-je, qu'un homme étoit doublement louable , qui ne se contentant pas de rechercher ce qui n'est pas encore connu dans les Sciences, & de consacrer au Public le fruit de son travail & de ses veilles , vouloit encore exciter les autres à son exemple , & réveilleoit leur vertu endormie , en leur proposant à résoudre ce qu'il auroit déjà pû reconnoître par son étude. D'autant plus que c'est à un sentiment tout semblable que nous devons ce que nous avons de plus beau dans les Mathématiques , & qu'il paroît qu'il ne s'est jamais fait de plus notables progrès dans ces sciences , que lors que les grands Genies se sont , dans divers siècles , proposés l'un à l'autre des questions , & que par une espece d'émulation honnête leur ame s'est enflammée de cette généreuse ambition , qui nous a produit

duit des Ouvrages si excellens, qu'ils semblent être plutôt partis de l'intelligence des Anges, que de la méditation laborieuse de l'esprit humain.

Et comme l'Architecture n'a reçu ce qu'elle a de bon & de magnifique que des Sciences Mathématiques, qui par l'indubitable vérité de leurs démonstrations remplissent entièrement la capacité de notre esprit, & ne lui laissent rien à désirer sur le sujet qu'elles lui ont expliqué : il est aisé de comprendre que c'est d'elles qu'elle doit encore apprendre ce qui manque à sa perfection ; & que cette lumière, par qui l'on connoît la différence qu'il y a de pouvoir rendre raison de son Ouvrage, ou de travailler en tâtonnant, & à l'aveugle, ne lui peut venir que des mains libérales de la Géométrie.

Combien donc seroit-il à souhaiter, que ceux qui travaillent en Architecture voulussent aussi s'appliquer aux Mathématiques, ou que ceux qui se sont avancez dans ces sciences donnassent aussi quelque partie de leur temps à l'Architecture ? Et l'on doit pour ce sujet estimer & recevoir agréablement toutes les choses qui peuvent contribuer à porter les hommes à cette étude, au nombre desquelles je mettrois ce *Paradoxe*, si l'Auteur s'y étoit un peu plus clairement expliqué qu'il n'a fait, & s'il avoit donné à entendre quelle est cette manière de diminuer les Colonnes qu'il appelle *Parfaite* : parce que ces sortes de dispositions, qui ne sont que pour la satisfaction de l'œil, & qui n'ont point de fondement certain ni arrêté dans la nature, dépendent tellement du goût, & de la diversité des opinions, qu'une Colonne peut paroître aux uns trop *Svelte*, ainsi que les Italiens les appellent, ou déliée, que d'autres la trouveront trop écrasée.

De sorte, qu'il semble que pour travailler avec quelque fruit à la solution de son *Paradoxe*, il auroit été juste qu'il eut déterminé ce qu'il entend par ce mot de *Parfaitement*, & qu'on put comprendre, si cette façon de des-

cription qu'il propose à résoudre *Architectoniquement*, est déjà en quelque usage, au moins mécanique, parmi les Ouvriers, ou si c'est une maniere toute nouvelle, & d'une forme différente de toutes celles dont on a jusqu'ici diminué les Colonnes : étant vrai que ces Propositions vagues & indéterminées, & en l'explication desquelles le sort a plus de part que le raisonnement ou la vivacité de l'imagination, sont d'autant plus défectueuses, que l'honneur même qui seroit dû à celui qui auroit expliqué l'enigme, ne dépend que du caprice de celui qui propose, lequel peut dissimuler tant qu'il lui plaît, & toujours dire que l'on n'a pas encore trouvé ce qu'il demande.

Tant y a, que m'étant souvenu d'avoir autrefois remarqué, en traçant des Colonnes à la maniere que Vignole enseigne pour les Ioniques & Corinthiennes, que la ligne de leur Contour étoit celle de Nicomèdes : je dis à M. Bosse, qui me fit voir au mois de Janvier de la même année 1664. ces *Etrènes à tous les Architectes*, que bien que je n'eusse point l'art de deviner, & que je confessasse ingénument mon ignorance sur le sujet de ce *Paradoxe*, je voulois néanmoins proposer plus nettement un Problème de la même nature à son Auteur, que je mis par maniere de jeu sur le dos de son écrit, en ces termes. *Autre Problème. Le moyen de décrire tout d'un trait, & sans s'embarasser de plusieurs points trouvez dont on se sert pour les Cherches, la maniere la plus élégante qui soit en usage parmi les Architectes modernes pour l'étracis & diminution des Colonnes ? Et quelle en est la figure ?*

Quelques jours après le sieur Bosse m'ayant prié de lui vouloir expliquer ma pensée, je lui fis sur ce sujet la Lettre qui fait le discours suivant.



## SECOND DISCOURS,

O U

## LETTRE A M. BOSSE

*Sur le même sujet de l'enflure & diminution des Colonnes, & de la description de la ligne qui fait le Contour des Ioniques, Corinthiennes, & Composées.*

**M**onsieur, je n'ai pas la science de deviner pour vous dire quels sont les sentimens de celui dont vous me parlez sur le Problème ou *Paradoxe*, comme il dit, qu'il a proposé pour *Etrènes à tous les Architectes* : mais je puis bien vous entretenir de la solution de celui que j'écrivis dernièrement au dos de son imprimé, dans laquelle je vous assurerai premièrement avec franchise que je n'ai aucune part, puisqu'il y a plus de deux mille ans qu'elle est trouvée, & que je ne puis tout au plus me glorifier d'autre chose, que de m'être autrefois aperçû, en dessignant des Colonnes diminuées à la manière élégante que Vignole dit avoir inventée pour les Ioniques & Corinthiennes, que *la Cherche courbe qui la décrit, est la ligne de Nicomèdes, que l'on appelle la première Conchoïde des Anciens* ; & par le moyen de laquelle, au rapport d'Eutocius, ce Géometre prétendit avoir résolu ce fameux Problème de la *Duplication du Cube commandée par l'Oracle*, & qui a tant exercé les esprits du siècle de Platon dans la recherche de deux moyennes proportionnelles entre deux droites données. C'est celle-là même que M. Viète a de notre temps supposée comme une pétition ou demande au supplément de Géométrie pour résoudre tous les Problèmes solides, & dont les Equations vont au Cube ou au quarré quarré ; ne jugeant pas que sa description, par le moyen de l'Instrument de Nicomèdes, fut plus mécanique, ou pour mieux

H h h j

dire, moins Géométrique, que celle du Cercle par le moyen du Compas, dont l'usage est néanmoins reçu par ce principe de pétition ou demande dans le premier des Elemens d'Euclide. Et quoique ces mêmes Equations se résolvent plus noblement dans les livres de M. Descartes, par la seule intersection du Cercle & de la Parabole, qui sont lignes d'un genre plus simple & moins composé que la Conchoïde; celle-ci ne laisse pas d'avoir ses usages pour les solutions des Equations plus élevées; & les suppositions de M. Viette sont très-sçavantes & très-véritables.

Mais pour retourner à notre propos: Quoique vous sçachiez parfaitement cette invention élégante de Vignole, & que vous la puissiez voir dans son Livre, je ne laisserai pas de vous en tracer ici la figure avec son discours, selon la traduction de l'illustre M. le Muet, afin que vous puissiez mieux juger du raisonnement que je ferai ensuite.

Fig. 1. de la 1.  
Planchette.

*Quant à cette autre façon, dit-il, je l'ai trouvée de moi-même; & quoiqu'elle soit moins connue, elle est néanmoins facile à concevoir par les lignes. Je dirai donc qu'ayant résolu les mesures de la Colonne, c'est-à-dire, sa hauteur & grosseur, & la diminution qu'elle doit avoir au bout d'en haut, on doit tirer une ligne à l'infini en commençant par C, qui est au tiers du fust de la Colonne, & continuant par D; puis rapportant la mesure C D au point A, où finit la diminution du haut, jusqu'à ce qu'elle coupe la perpendiculaire au point B, & que A B soit continuée jusqu'en E. De là on pourra tirer tant de lignes qu'on voudra qui partiront de la perpendiculaire, & iront à la circonférence de la Colonne, sur lesquelles appliquant la mesure C D, on trouvera tant en haut qu'en bas l'enslure de la Colonne; & cette manière peut être appliquée à l'Ionique, Corinthien & Composé.*

Ou vous voyez, Monsieur, que toutes ces lignes qui, partant du point E, sont comprises entre la Perpendiculaire ou Axe de la Colonne & sa Circonférence, sont toutes égales entre elles, & à la droite C D. De sorte que

si nous appellons le point E, le *Pole*; l'Axe de la Colonne, la *Regle* ou *Canon*; & la ligne CD, l'*Intervalle*: je ne voi plus rien qui m'empêche d'appeller la ligne courbe qui passe depuis A par toutes les extrémitez recherchées, la *premiere Conchoïde des Anciens*, puisque c'est toute la même; & que vous connoîtrez encore mieux par l'Instrument que Nicomédès a inventé pour la décrire, dont la figure est la seconde de la premiere Planche; en laquelle, après avoir déterminé comme dessus la largeur de la Colonne, dont la moitié est CD, & trouvé la longueur de la ligne CE, il faut prendre trois regles de bois ou de métal GF, ID, HA, dont les deux GF, & ID, sont attachées ensemble à l'équerre ou à angles droits comme en D; & par le milieu de la regle GF il faut entailler un petit canal à queue d'aronde qui s'étende en toute la longueur de la regle. Il s'en fait une autre de même dans le milieu de la regle HA, qui s'étende indéfiniment vers le bout H, mais qui vers l'autre bout se termine en K, en sorte néanmoins que la distance AK, ne soit pas plus grande que la distance CE. Ensuite il faut faire au bout de la regle HA vers le point A, la ligne AB égale à la ligne CD, & attacher par dessous la regle au point B un bouton de bois ou de métal qui puisse couler juste dans le canal de la regle GF. Il en faut attacher un autre semblable au point E, dans le milieu de la regle ID, qui coule juste dans le canal de la regle AH, afin que la regle GF étant appliquée à l'Axe de la Colonne, en sorte que le point D réponde au renflement, & la regle AH se mouvant en avançant ou reculant sur le bouton E, comme sur un pivot ou Pole, tandis que le bouton B se meut au long dudit Axe, c'est-à-dire, au long du Canal de la regle GF; le point A décrive par ces deux mouvemens la ligne courbe A a a C a, pour le contour de la diminution & renflement de la Colonne qui est appelée *étraeis* par Vitruve, & dans laquelle ligne toutes les droites, comme b a, tirées du Pole, &

Fig. II. de la L.  
Planche.

H h h iij

comprises entre le Canal de la regle G F, c'est-à-dire, entre l'Axe de la Colonne & sa Circonférence, sont toutes égales entr'elles, & à l'intervalle A B, ou C D. En quoi il paroît que la ligne courbe que cet instrument a décrite, est la même que celle que Vignole a prétendu décrire. Et si vos regles étant d'une grandeur indéfinie, vous faites en sorte que les boutons B & E puissent tellement s'avancer ou reculer au long des regles A H & D I, que les intervalles, comme A B & C E, puissent aussi être pris sur lesdites regles de telle grandeur que l'on voudra; il est évident que cet instrument pourra servir à décrire les Courbes des Colonnes, de quelque hauteur ou grosseur qu'elles puissent être, puisque toute leur différence ne consiste qu'en celle desdits intervalles. L'autre côté de la Colonne sera décrit en la même maniere en changeant l'instrument de place, & le rapportant de l'autre part.

Ainsi, Monsieur, il me semble que mon Problème est assez bien résolu par cet instrument; & que sans s'embarasser à rechercher ces points infinis, comme veut Vignole, par lesquels on puisse mener doucement cette recherche, qui de soi dans la rigueur est toujours imparfaite, on peut dorénavant tirer cette ligne tout d'un trait, uniformément & en sa perfection.

C'est de quoi j'ai voulu vous faire part, en attendant que nous ayons de l'Auteur du *Paradoxe* quelque chose de considérable sur cette matiere, ainsi qu'il y a lieu de l'espérer par ses *Etrénes*. Vous assurant au reste que bien qu'il y ait raison d'être surpris, que depuis tant de siècles qui ont produit de si grands Hommes pour l'Architecture, lesquels ont si bien tracé les diminutions & l'ensûre des Colonnes, personne, au moins que je sçache, n'ait fait réflexion à cette maniere de description, que le seul Vignole, & que depuis lui tant de braves Architectes se soient heureusement servis de son invention, sans avoir rien dit de la nature de la Courbe qu'elle produit, ni du

moyen de la dessigner tout d'un trait : Quoiqu'il y ait, dis-je, beaucoup de sujet de s'en étonner, je vous proteste néanmoins que je n'ai aucune vanité que cette pensée me soit venue, de laquelle je me glorifie moins que de l'honneur que vous me faites de m'aimer. Je suis, &c.

Ce 24. Janvier 1664.

### TROISIEME DISCOURS.

#### *SUR LA NATURE ET DESCRIPTION de la ligne qui fait le Contour des Colonnes Doriques & Toscanes.*

**A**Yant ainsi discouru sur les propriétés de la ligne Courbe qui fait le Contour des Colonnes Ioniques, Corinthiennes & composées, j'ai voulu considérer l'autre manière que Vignole décrit, & dont il se sert pour la diminution des Colonnes Toscanes & Doriques. Et après avoir soigneusement médité sur la nature de la Ligne qu'elle produit ; j'ai reconnu que c'étoit une ligne de la même nature que celle que décriroit une flèche, ou toute autre chose tirée & jetée horizontalement, dans l'opinion de ceux qui croient qu'un poids tombant de la surface de la terre se trouveroit justement au bout de six heures au Centre ( si la terre se mouvoit du mouvement journalier, ) & passant outre par la force qu'il auroit acquise en sa chute, il arriveroit au bout d'autres six heures à la surface des Antipodes, si le chemin lui étoit ouvert : D'où descendant & repassant en six heures une autre fois par le Centre, il se trouveroit au bout d'un jour préfix au même lieu d'où il étoit premièrement parti, si l'air, ou les autres empêchemens du dehors ne l'arrêtoient.

Je dis donc qu'un trait poussé vigoureusement, & parallèle à l'horizon décriroit en son passage une Ligne de la



même nature de celle dont on se sert pour la diminution des Colonnes Toscanes & Doriques, si cette opinion étoit véritable : parce qu'étant porté d'un mouvement de Latitudin égal & uniforme, qui lui est imprimé par l'impulsion, & qui fait que les distances qu'il parcourt sont entre elles en même proportion que les temps qu'il emploie à les parcourir, (c'est-à-dire, comme les Arcs de l'Equateur qui passent cependant sous le Méridien,) & d'un autre mouvement inégal, & qui s'augmente continuellement, que son propre poids lui inspire, & qui dans l'opinion susdite se fait sur la proportion des Sinus versés des mêmes Arcs de l'Equateur ; il paroît que la Ligne, que ce trait décriroit en son passage, seroit composée de ces deux mouvemens, dont l'un est égal, uniforme, & répondant aux Arcs de l'Equateur ; l'autre inégal, continuellement précipité, & répondant aux Sinus versés des mêmes Arcs.

Mais la Ligne du Contour des Colonnes Toscanes & Doriques se fait par la composition de deux mouvemens pareils, ainsi que je le démontrerai cy-dessous ; & partant la Ligne que décrivent les corps jettés horizontalement, comme un trait ou une flèche dans l'opinion susdite, est à peu-près la même que celle dont on se sert pour la diminution des Colonnes Toscanes & Doriques.

*Fig. I. de la II.  
Planche.*

Pour la démonstration de ce que je viens de dire, il ne faut que se souvenir de la pratique ordinaire des Ouvriers pour la description de cette Ligne, qui se fait en cette manière. La Ligne  $AC$ , soit l'Axe d'une Colonne à diminuer, & les deux tiers de sa longueur, si on veut que la diminution commence au tiers ; ou la moitié, si on desiré qu'elle commence dans le milieu de la Colonne : La Ligne  $AB$ , soit le module ou la moitié de sa grosseur, sur laquelle comme rayon soit fait le Cercle  $BSTVZ$ . Ensuite il faut prendre la partie  $AG$ , pour le demi-diametre de la Colonne par le haut, en sorte que  $BG$  soit sa plus grande diminution, & tirer la ligne  $GE$  parallele à  $AC$ , qui  
coupera

coupera le Cercle en F , la portion duquel BF , doit être partagée en autant de parties égales qu'on voudra , comme aux points S , T , V , aussi bien que l'Axe AC , aux points H , K , M , en sorte que la ligne AC contienne autant de parties égales que l'Arc BF. Enfin des points des divisions de l'Axe il faut élever des Perpendiculaires , comme HI , KL , MN , qui soient rencontrées aux points O , X & Y , par d'autres lignes parallèles à l'Axe , & tirées des points de l'Arc BF , de telle maniere qu'elles se répondent réciproquement l'une à l'autre , c'est-à-dire , que celle qui part du premier point de l'Axe H , comme HOI , soit rencontrée en O , par celle qui vient du premier point de l'Arc S , comme PSO , & celle qui part du second point de l'Arc T , comme QTX , se termine en X , sur celle qui vient du second point de l'Axe K , comme KXL , & ainsi des autres. Et passant par tous les points BOXYE une ligne adoucie , elle fera celle que l'on cherche pour la diminution des Colonnes Toscanes & Doriques.

Et si nous appellons le point B , le *sommet* de cette ligne Courbe la ligne AB , l'*Axe* ou le *Diametre* , les lignes PO , QX , RY , GE , &c. les *ordonnées* ; on verra que l'ordonnée QX , contenant autant de parties de la ligne AC , ou de son égale GE , que l'Arc BT en contient de celles de l'Arc BF , l'ordonnée QX , est à l'ordonnée GE , comme l'Arc BT , est à l'Arc BF ; & la même chose se pouvant dire de toutes les autres , il paroîtra que les ordonnées seront entre elles comme les Arcs qui sont compris entre le sommet & lesdites ordonnées : & partant que cette ligne Courbe est une espece de *Spirale* ou *Ovale*.

De plus , si nous prenons le rayon AB , pour Sinus total , les portions de l'Axe BP , BQ , BR , BG , &c. seront les Sinus versés des Arcs BS , BT , BV , BF , &c. & par conséquent nous pourrons appeller cette Courbe une *ligne Spirale* ou *Eliptique* , dans laquelle les portions de l'Axe

*Rec. de l'Ac. Tom. V.* Iii

*sont les Sinus versés des Arcs , qui sont entre eux comme les ordonnées.*

Maintenant si nous faisons une autre hypothese , & si nous prenons le point A , pour le centre de la terre , la ligne B A , pour le demi - diametre , & l'Arc B V F , pour une portion de l'Equateur : Il est constant que dans la pensée de ceux , qui ainsi que nous avons dit ci-dessus , croient qu'un poids tombant librement de la surface de la terre parcoureroit les espaces de son Diametre , en la même raison que sont les Sinus versés des Arcs de l'Equateur , qui passeroient cependant sous le Méridien ; ce même poids ( supposé que la terre se mût du mouvement journalier ) arriveroit nécessairement au centre , quand le quart de l'Equateur auroit passé depuis le moment de sa chute , je veux dire , au bout de six heures. C'est-à-dire , que le poids tombant du point B , arriveroit au point P , lors que le premier Arc de l'Equateur B S , auroit coulé , & qu'il parcoureroit la ligne B Q , en autant de temps qu'il faudroit à l'Arc B T , pour passer sous le Méridien ; & la ligne B G en autant de temps qu'il en faudroit à l'Arc B F ; & enfin la ligne B A , c'est-à-dire , tout le demi-diametre , en autant de temps que l'Arc B Z , c'est-à-dire , le quart de Cercle de l'Equateur. Et comme le quart de Cercle de l'Equateur passe précisément en six heures , il se voit qu'en cette opinion le poids tombant du point B , & passant par les portions du demi-diametre B A , dans les mêmes temps qu'il faudroit pour passer les Arcs de l'Equateur dont les dites portions sont les sinus versés ; ce même poids ( supposé le mouvement journalier de la terre ) arriveroit au bout de six heures précises au centre : d'où remontant en proportion contraire à sa chute , & par la même raison des Sinus versés , il arriveroit au bout d'autres six heures à la surface de la terre opposée , de laquelle il retomberoit une autre fois en même espace de temps jusqu'au centre ; & enfin il retourneroit au bout de vingt quatre heures pré-

cifes au point B, d'où il étoit premierement parti.

Supposé donc que ce soit là le génie & la nature des choses pesantes; si nous prenons la ligne B D pour l'espace qu'une flèche tirée horizontalement du point B doit parcourir dans le temps que l'Arc B F de l'Equateur ou son Parallele aura passé sous le Méridien, il est constant que la flèche sera descenduë par son propre poids de toute la longueur de la ligne B G, qui est le Sinus versé du même Arc B F. Et si nous divisons le susdit Arc B F en parties égales comme aux points S, T, V, & la ligne B D, ou son égale A C, en autant d'autres aux points I, L, N, ou H, K, M, ainsi qu'il s'est dit; il se verra que le mouvement de Lation, qui a été communiqué à la flèche par l'impulsion, selon la ligne B D, étant uniforme, la flèche aura couru l'espace B I dans le même temps que l'Arc B S aura passé: & comme cependant elle sera descenduë par son poids de la longueur de la ligne B P ou I O, la flèche se trouvera alors au point O, où les deux lignes, de Lation uniforme B I, ou P O, & de chute B P ou I O, se rencontrent. Tout de même elle sera en X quand l'Arc B T aura passé, parce que c'est en ce point où se trouvent la ligne de Lation égale B L ou Q X, & celle de la chute B Q ou L X, qui se font l'une & l'autre dans le même temps du passage de l'Arc B T. Et la même chose se pouvant dire de tous les points de la courbe B O X Y E; il est évident que c'est celle que décrirait une flèche en l'hypotese susdite; & que par conséquent cette ligne est la même que celle qui est décrite pour la diminution des Colonnes Toscanes & Doriques: ce qu'il falloit démontrer.

Que si l'on désire en décrire la figure tout d'un trait, & sans être obligé de se servir de plusieurs points trouvez, on peut faire un Instrument assez commode pour cet effet, qui doit être composé d'un Secteur de Cercle, d'une rouë avec son pignon, d'une regle endentée & d'une autre regle, (comme en la seconde Figure de la seconde Planche)

*Instrument pour  
décrire le trait  
de la diminution  
des Colonnes Tos-  
canes & Dori-  
ques.  
Fig. II. de la I L  
Planche.*

où le Secteur A B F est le même que celui de la premiere Figure de la seconde Planche que nous avons expliquée ; c'est-à-dire , que les lignes A B & A F de la seconde Figure sont égales au module , & l'Arc B F à celui qui est compris entre les deux lignes B D & G E de la premiere Figure, qui font l'intervalle de la plus grande diminution de la Colonne. Cet Arc B F dans l'adite seconde Figure doit être entrecoupé de dents , qui s'enchassant dans les dents du pignon C , le fassent mouvoir , & donner le tour à la rouë L I K , qui dans la circonférence a d'autres dents égales & entrelacées avec celles de la regle G H , afin que par le mouvement circulaire de la rouë , la regle G H se puisse également avancer en ligne droite. Enfin il faut prendre une autre regle comme E S qui soit égale & parallele à la premiere G H , & tellement attachée à ses extrémités E & S , qu'elle se meuve en avançant avec elle , & conservant son parallelisme , en sorte toutefois que rien ne l'empêche cependant de s'approcher vers le point A , & de suivre l'attraction continuelle qui est faite par une autre petite regle comme B D , qui étant attachée à un pivot sur lequel elle puisse tourner au bout de l'Arc en B , embrasse de son autre extrémité D l'adite regle E S , & la contraigne de suivre la descente de l'Arc , sans embarrasser cependant le mouvement droit & en avant qui lui est communiqué par la regle G H.

Il paroît par cette construction que si le diametre de la rouë L I K est au diametre du pignon C , comme la ligne I H , c'est-à-dire , les deux tiers de la Colonne , est à la longueur de l'Arc B P F ; & si les dents du pignon sont égales à celles du susdit Arc , & celles de la rouë L I K à celles de la regle G H ; il s'ensuivra que la regle endentée G H s'avancera uniformement depuis I jusqu'en H dans les mêmes intervalles de temps que l'Arc B F passera aussi uniformement sous le pignon C depuis F jusqu'en B ; de telle sorte que le bout de la regle H se trouvera précisé-

ment en R, lors que le point B se trouvera en P, & qu'il y aura même proportion de toute la ligne I H à sa partie I R, que de tout l'Arc B F à sa partie B P, & ainsi des autres.

Il s'ensuivra de plus, que tandis que la ligne E S sera portée uniformément en avant vers H par le mouvement de Lation égale de la règle G H, elle sera encore portée d'un autre mouvement vers le point A, qui lui sera communiqué par l'attraction continuelle de la règle B D, laquelle étant attachée au point B, fera que la ligne E S descendra selon la proportion des Sinus versés des portions de l'Arc B F; c'est-à-dire, que lorsque la partie de l'Arc B F aura passé depuis le point F jusqu'en P, & que cependant la ligne E S aura coulé par le mouvement de la règle G H depuis I jusqu'en R; la même E S sera aussi descendue de toute la distance R Q ou F N, qui est le Sinus versé de l'Arc F P, en telle sorte qu'elle se trouve alors au point Q. Et lorsque l'Arc entier B F aura passé depuis F jusqu'en B, & que cependant la ligne E S aura coulé jusqu'en H, elle sera aussi descendue de toute la ligne H S ou F M, qui est le Sinus versé dudit Arc F B, & en cette manière elle se trouvera au point S, après avoir décrit, en son passage composé des mouvemens des deux règles G H & B D, la ligne Courbe I Q S, qui est celle que l'on cherche.

Cette description est la même que celle de Vignole, qui fait ses Colonnes Toscanes & Doriques également grosses depuis la base jusqu'au tiers de leur hauteur, où il commence leur diminution, & la continue jusques sous le chapiteau. Mais si on vouloit que la diminution commençant au susdit tiers se fît aussi uniformément de part & d'autre, & aussi-bien vers la base que vers le chapiteau; il ne faudroit qu'ajouter au Secteur A B F, une autre Secteur A B T égal à la moitié dudit Arc A B F; afin que passant sous le pignon C de la part de K, & donnant un mouve-

ment contraire au haut de la rouë L I K , la règle I G fût poussée également vers le point X , où elle arriveroit lors que le susdit Arc B T auroit passé sous le pignon , & que cependant la règle E S , ou plutôt O V , seroit descendue depuis F jusqu'en N , c'est-à-dire , depuis X jusqu'en V , où elle se trouveroit , après avoir décrit en son passage la ligne Courbe IV , qui est la même que la ligne I Q S continuée de la part de V . Et ainsi l'on auroit toute la ligne V I Q S pour le Contour d'un côté de la Colonne , lequel pourra être transféré de l'autre part , si on veut avoir son entière description.

Et quoique cette maniere paroisse defectueuse , en ce qu'elle semble ne pouvoir être propre que pour la délinéation de la diminution d'une Colonne , dont la longueur & grosseur seroit déterminée , & qu'il faudroit autant d'instrumens differens , qu'il y peut avoir de différentes mesures de Colonnes , c'est-à-dire , infinies ; il s'y peut néanmoins trouver un remede assez facile , & donner à cette Machine la même universalité pour les Colonnes Toscanes & Doriques , que nous l'avons attribuée au discours ci-dessus , à celle de Nicomèdes pour les Ioniques , Corinthiennes & Composées.

Il ne faut que faire la règle endentée & le Secteur d'une grandeur indéfinie , & marquer ses dents en forme de rayons partans du Centre , & remplir les espaces qu'ils font entr'eux en s'écartant , en sorte qu'ils soient toujours égaux aux intervalles des dents du pignon , afin que sur la longueur du Rayon qui passe par le point B , on puisse hausser ou baisser le pivot , sur lequel tourne la règle B D selon la mesure du module donné de quelque Colonne que l'on propose.



## QUATRIEME DISCOURS.

## APPLICATION DES SECTIONS

*Coniques ou Trait de la diminution des Colonnes.*

J'Aurois terminé ces raisonnemens sur lesquels il semble que je me suis suffisamment étendu, si le discours précédent ne m'avoit fait faire une nouvelle réflexion sur le même sujet, qui est que tout ainsi que sur l'opinion de quelques-uns touchant la nature du mouvement d'un poids qui tombe, nous avons démontré que les corps jettez horizontalement décrivoient une ligne à peu-près pareille à celle dont on se sert pour le trait de la diminution des Colonnes Toscanes & Doriques; il me semble que ces mêmes corps jettez décrivant une autre espèce de ligne dans l'opinion que quelques-autres ont eüe du même mouvement, on peut présumer que cette ligne pourroit être de quelque utilité pour la détermination des mêmes Colonnes.

Et comme l'une & l'autre de ces deux opinions est fondée sur des raisons également probables, & marchent sur des proportions si prochaines, qu'il est presque impossible que l'esprit humain les puisse discerner l'une de l'autre par l'expérience, ou les convaincre de faux dans les hauteurs qui sont à notre connoissance; il y a aussi grande apparence que les lignes des corps jettez, que nous pouvons appeller *lignes de Projection* tirant leur origine de principes si semblables & si proches, ne doivent pas aussi être fort différentes, ou d'une nature ou figure extrêmement éloignée l'une de l'autre.

Tant y a que les mêmes espaces qui dans l'opinion ci-dessus expliquée, étoient parcourus par un poids qui tombe en certains intervalles de temps égaux, selon la suite des Sinus versés des Arcs égaux de l'Equateur; les mêmes



intervalles, dis-je, sont passez dans une autre opinion en mêmes temps selon la suite des nombres impairs, en sorte que si dans le premier moment de sa chute il parcourt 1 de ces espaces, il en passera 3 dans le second, 5 dans le troisième, 7 dans le quatrième, 9 dans le cinquième, 11 dans le sixième, & ainsi à l'infini.

Et parce que dans le premier temps il a passé 1 espace & 3 espaces dans le second temps, il aura parcouru 4 espaces dans le premier & second temps ensemble, c'est-à-dire, en 2 temps; & 1, 3, & 5 espaces, c'est-à-dire, 9 dans le premier, second & troisième, c'est-à-dire, en 3 temps; & 1, 3, 5, & 7, c'est-à-dire, 16 espaces dans le premier, second, troisième & quatrième, c'est-à-dire, en 4 temps, & ainsi des autres. Où il se voit que comme le nombre 4 des seconds espaces, est le Carré de 2 qui est le nombre des seconds temps, & 9 qui est le nombre des troisièmes espaces, est le Carré de 3 nombre des troisièmes temps, & 16 nombre des quatrièmes espaces, est le Carré de 4 nombre des quatrièmes temps, & ainsi des autres; c'est-à-dire en un mot, que parce que les nombres impairs ajoûtez consécutivement l'un à l'autre produisent la suite des premiers quarez; il s'ensuit par conséquent que les nombres des espaces sont entr'eux comme les Quarez des nombres des temps, & que la raison de ceux-là est double de celle de ceux-ci.

La vrai-semblance de ces deux opinions se connoît aussi par la proximité des nombres des espaces qui se parcourent en l'une & en l'autre dans les mêmes temps, qui est telle, que si au premier moment il se fait un espace, au second il s'en fera 3 dans une opinion, & environ 3 moins  $\frac{1}{12}$  dans l'autre, au troisième il s'en passera 5 dans l'une, & 5 moins  $\frac{1}{6}$  dans l'autre, au quatrième 7 dans l'une, & 7 moins  $\frac{1}{4}$  dans l'autre, au cinquième 9 dans l'une, & 9 moins  $\frac{1}{3}$  dans l'autre; & ainsi consécutivement à l'infini. Où il paroît que ces différences sont si petites, & si peu remarquables

quables dans les hauteurs où nous pouvons faire les expériences, qu'il est absolument impossible d'assurer avec certitude de la vérité ou fausseté de l'une ou l'autre de ces deux opinions.

Ce que Galilée a si bien reconnu, que bien qu'il soit *Galil. de motu* l'Auteur de l'opinion qui soutient que les espaces suivent la progression des nombres impairs, & que sur ce principe il ait composé un Livre entier du mouvement rempli d'un grand nombre de propositions ingénieuses, il a néanmoins trouvé l'autre opinion si belle, qu'il n'a pû s'empêcher de la produire comme si elle venoit de lui dans le deuxième de ses Dialogues du Système du Monde, & d'en *Galil. 2. du Sitem, cosm.* parler d'une manière à faire croire que ce fût son véritable sentiment. Il y explique même quelques propriétés de ce mouvement sur ce principe, lesquelles sont tout-à-fait admirables; & celle-ci entr'autres, que supposé le mouvement de la Terre, la ligne qu'un poids tombant de sa surface au Centre décriroit par sa chute, seroit circulaire, & égale à celle qu'il designeroit, s'il ne partoît pas de ladite surface.

Sur quoi je dirai en passant, que pour faire en sorte que cette proposition soit véritable, il faut non seulement supposer que la Terre se meut, mais même qu'elle ne se meut que de son mouvement journalier, c'est-à-dire, sur son propre centre; parce que si l'on y veut ajouter l'annuel, ces lignes cesseront d'être circulaires, & deviendront plutôt des especes de Cycloïdes ou Roulettes, ou même des *Spirales*, aussi-bien celle que décrit un poids qui tombe, que celle qui est faite par le point de la surface de la Terre, duquel il est parti pour tomber. Et c'est peut-être la raison qui fait dire sur la fin de son discours sur ce sujet à Galilée, que n'osant pas assurer que ce soit là la nature des corps qui tombent, il peut au moins avancer cette proposition, que si la ligne de leur chute n'est pas cette cir-

culaire, c'en est une autre qui lui ressemble, & qui ne s'en éloigne que de fort peu.

Mais pour retourner à notre propos, le même Galilée ayant démontré que sur l'hypothèse de la chute des poids en proportion des nombres impairs, la ligne de Projection est parabolique, qui dans l'autre hypothèse étoit Spirale; & comme la Parabole & la Spirale ont d'ailleurs un si grand nombre de propriétés communes, qu'elles ont fait dire à un grand Géomètre de notre temps, que *la Parabole n'étoit qu'une Spirale développée*; il y a grande apparence que l'effet de l'une en la diminution des Colonnes pourroit aussi être heureusement produit par l'autre.

P. Greg. à S.  
Vincentie.

## I.

*Pour la Parabole.*

C'EST ce qui m'a fait résoudre à expliquer présente-  
ment une manière assez facile de décrire & d'appli-  
quer la ligne Parabolique aux Colonnes, afin que l'on en  
puisse faire l'expérience, & la mettre désormais en usage,  
si elle satisfait aux yeux de ceux qui s'y connoissent.

Fig. III. de la  
II. Plancher.

Pour l'appliquer, il y faut procéder en cette façon. La  
ligne A B soit la longueur de toute la Colonne, C D le  
demi-diamètre de sa plus grande grosseur, C G ou B F le  
demi-diamètre de sa moindre grosseur sous le Collet ou  
Gorgerin, A C le tiers de la Colonne, ou telle autre par-  
tie où on voudra que la diminution commence. Après  
quoi la ligne C D doit être continuée en N, en sorte que  
D N soit égale à D G ou E F; & sur la ligne C N, comme  
diamètre on décrit le demi-cercle N O C, qui coupe la  
ligne D E en O, & l'on fait D H égale à D O, laquelle  
fera par conséquent moyenne proportionnelle entre C D  
& D G; puis il faut mener H I parallèle à A B, qui soit  
coupée en I par la ligne D I, tirée du point D par le point

F, & l'on fait les lignes  $CK$  &  $CM$  égales à  $HI$ . Enfin du point  $D$  comme sommet, sur l'axe  $DC$  & sur l'amplitude  $MK$ , on décrit la ligne Parabolique  $MLDFK$ , laquelle passera nécessairement par le point  $F$ , & laissera de part & d'autre la ligne,  $LD$  pour la diminution que l'on demande.

La démonstration en est aisée, parce que la ligne  $HD$  étant moyenne proportionnelle entre les deux  $CD$  &  $DG$ , il s'ensuit que le quarré de  $HD$  sera au quarré de  $DG$ , comme la ligne  $CD$  est à la ligne  $DG$ ; mais le quarré de  $DH$  est au quarré de  $GD$ , comme le quarré de  $HI$  ou  $CK$  est au quarré de  $GF$ ; donc le quarré de l'ordonnée  $CK$  sera au quarré de l'ordonnée  $GF$ , comme la portion de l'axe  $CD$  est à la portion  $GD$ . Et partant le point  $F$  sera dans la Parabole dont l'axe sera  $CD$ , le sommet  $D$ , & l'ordonnée  $CK$ , c'est-à-dire, l'amplitude  $MK$ .

Je ne grossirai point ce discours de toutes les différentes manieres dont on se sert pour décrire les Paraboles, soit par le moyen de plusieurs points trouvez, ou tout d'un trait, par des instrumens qui se trouvent aisément dans les Livres. J'avertirai seulement les Ouvriers que Galilée leur en enseigne une dans ses Mécaniques, que j'estime facile & ingénieuse, & que j'ai fait heureusement pratiquer par les Charpentiers du Roy, en la fabrique des Vaisseaux & Galeres, pour ce qu'ils appelloient leur donner beau Galbe à la Pouppe.

Elle est telle, qu'il ne faut que faire la description ci-dessus, au plan d'un mur qui soit à plomb, en sorte que la ligne  $MK$  soit de niveau, & attacher deux clous aux deux repaires  $K$  &  $M$  qui terminent l'amplitude de la Parabole, sur lesquels il faut laisser librement pendre une fûcelle ou chaînette, jusqu'à ce que de son milieu elle vienne à toucher le point  $D$ , c'est-à-dire, le sommet de la Parabole, afin qu'elle la marque dans toute son étendue; en sorte que si cette cordellette est frotée de crayon ou sanguine,

& qu'on la fasse toucher doucement au mur sans la changer de situation ni la varier, la ligne Parabolique se trouve désignée sur le plan du mur, laquelle passera nécessairement par le point F.

## I I.

*Pour l'Ellipse.*

*Figure III. de  
la 1. Planch.*

**O**UE si l'on veut éprouver quel effet peut faire la ligne Elliptique, il faut (dans la 3. Figure de la 1. Planch.) décrire un demi-cercle sur tout le diamètre de la plus grande grosseur de la Colonne  $KD$ , lequel coupe  $GF$  en  $H$ , & abaisser la ligne  $HI$  parallèle à  $DK$ ; puis tirer la ligne  $ID$ , à laquelle du point  $B$  il faut mener une parallèle  $BO$  qui rencontre la ligne  $KD$  continuée en  $O$ , & faire les quatre lignes  $CN$  &  $CM$ ,  $DP$  &  $DQ$  égales à la ligne  $CO$ ; & par ce moyen l'on aura les deux axes de l'Ellipse  $MN$  &  $KD$ , laquelle passera nécessairement par le point  $F$ ; & les deux points  $Q$  &  $P$  en seront les foyers, qui sont appellez Singliots par les Ouvriers, & par le moyen desquels l'Ellipse ou ovale peut être facilement décrite.

La démonstration en est telle, parce que  $BO$  est parallèle à  $ID$ ; la ligne  $CO$  sera à  $CB$ , c'est-à-dire,  $CN$  à  $GF$ , comme  $CD$  est à  $CI$  ou  $GH$ ; & le quarré de l'ordonnée  $CN$  au quarré de l'ordonnée  $GF$ , comme le quarré de  $CD$  est au quarré de  $GH$ , c'est-à-dire, comme le rectangle  $KCD$  est au rectangle  $KGD$ ; & partant le point  $F$  sera dans l'Ellipse dont  $MN$  &  $DK$  seront les Axes. Le reste au sujet des foyers  $Q$  &  $P$ , se voit clairement par la 2. du 3. des Coniques d'Apollonius.

*XXX*  
*ste*

## I I I.

*Pour le Cercle.*

**P**Eut-être que la ligne circulaire même tombera dans le goût de quelques-uns. Elle se peut appliquer en cette manière. Il faut ( dans la 4. Figure de la 2. Planche ) mener la ligne droite D F, sur laquelle au point H, où elle est partagée en deux également, il faut tirer une perpendiculaire H I, laquelle rencontre la ligne D C continuée en I, où sera le centre du cercle, qui ayant I D pour rayon, passera aussi par le point F.

Mais comme ce centre I peut se trouver tellement éloigné, que la pratique de la description du Cercle en deviendrait difficile, ou même impossible, l'on peut se servir de deux règles, comme D O & D N de grandeur indéterminée, & attachées en D, en sorte qu'elles contiennent l'angle F D M; & mettant deux repaires fermes aux deux points F & M, que je suppose également distans du point G; il faut faire marcher le sommet de l'angle D depuis L jusqu'en F, en sorte que la règle D N touche toujours le point M, & la règle D O le point F; & par ce moyen le point D décrira par son passage la ligne circulaire L D F que l'on demande.

## I V.

*Pour l'Hyperbole.*

**E**T si l'on veut sçavoir si l'Hyperbole y est utile, il faut ( dans la 4. Figure de la 1. Planche ) continuer indéfiniment la ligne C D, & prendre les deux D I & I K égales à D C, en sorte que D K soit égale au plus grand diamètre de la Colonne, puis sur les deux lignes D K & G I comme diamètres, il faut décrire deux demi-cercles s'entrecoupans au point H, & du point G tirer la ligne G H, & la continuer en R, en sorte que G R soit égale à

G F ; puis du point R , il faut mener R L parallèle à H I , c'est-à-dire , perpendiculaire à G R , & qui rencontre la ligne G K continuée en L . Ensuite on prend la ligne D M égale à R L , & ayant tiré la ligne I M , on fait de part & d'autre du point I sur la ligne C K continuée , les lignes I O & I P égales à I M . Et par ce moyen sont trouvez les foyers ou Singliots O & P de l'Hyperbole , dont l'Axe transverse est D K , son Axe conjugué T S double de la ligne D M , le centre I , le sommet D , où elle touchera la ligne D E , & passera par le point F .

Voici comme je le démontre , parce que l'angle I H G est droit dans le demi-cercle I H G , & la ligne H I demi-diamètre du Cercle D H K ; la ligne G H touchera le susdit Cercle au point H , & partant le rectangle K G D sera égal au quarré G H , & le rectangle K G D sera au quarré de l'ordonnée G F , comme le quarré G H au même quarré G F , ou de son égale G R , c'est-à-dire , comme le quarré H I , ou de son égale D I , au quarré R L , ou de son égale I S ; c'est-à-dire , en prenant leurs quadruples , comme le quarré du diamètre K D au quarré du diamètre T S . Et partant le point F sera dans l'Hyperbole , dont les deux Axes seront D K & T S , le centre I , & le sommet D . Maintenant parce que D M est égale à I S , le quarré I M ou I O sera égal aux quarrés I D , & I S ; mais le quarré I O est aussi égal au quarré I D , & au rectangle K O D ; donc le rectangle K O D est égal au quarré I S , c'est-à-dire , au quart de la Figure , & excédent d'un quarré , dont le côté est la ligne D O ; & par conséquent le point O & le point P qui est également distant du centre I , seront les foyers de l'Hyperbole susdite ; ce qu'il falloit démontrer .

Il y a mille moyens de décrire les Hyperboles , quand on a trouvé ses Axes & ses foyers ; & le plus aisé pour les Ouvriers est celui de M. Descartes qui se pratique ainsi : On prend une grande regle , comme P Q , que l'on appa-

*Instrument pour  
la détermination de  
l'Hyperbole.*

che par un bout au Singliot P, sur lequel elle tourne, & par l'autre bout Q à une fîscelle Q F O, qui doit être plus courte que la regle de toute la longueur de la ligne D K; l'autre extrémité de la corde s'attache à l'autre Singliot O.

Cela fait, il faut tenir la fîscelle tout près de la regle, comme si elle y étoit collée, ainsi qu'il se voit dans la Figure, depuis Q jusqu'en F, ou depuis V jusqu'en X, & en tournant la regle sur le Pivot P, & tenant toujours la corde joignant la regle, le point où elles se joindront décrira par ce mouvement l'Hyperbole F X D que l'on demande, laquelle pourra être continuée de l'autre côté, en changeant la regle de face.

## CINQUIEME DISCOURS.

### DETERMINATION DES MANIERES *infinies d'appliquer les Sections Coniques au Trait de la diminution des Colonnes.*

**I**L faut ici remarquer que bien que je n'aye parlé cy-dessus que d'une seule maniere d'Ellipse & d'Hyperbole, sçavoir de celle où l'Axe transverse de l'une & de l'autre est égal au plus grand diametre de la Colonne; il y a pourtant un nombre infini d'autres especes de l'une & de l'autre qui peuvent être décrites, & servir utilement à la diminution des Colonnes, & de sorte qu'elles touchent la ligne D E en D, & passent par le point F. Ce que j'explique en cette maniere.

Aux deux lignes D G & G F ( dans la 1. Figure de la 3. Planche ) soit faite une troisieme proportionnelle G H; & du point H soient menées des lignes de tous côtez, comme H D, H L, H A, H M, &c. lesquelles coupent la ligne D E continuée en D, Q, P, I, O, &c. en sorte qu'elles rencontrent diversément la ligne D G continuée indéfiniment : C'est à sçavoir que H D la coupe au point

*Fig. 1. de la III.  
Planche;*



D, H L au-dessus du susdit point D, H  $\delta$  lui soit parallele, H M la coupe en M au-dessous du point G, & H N en N, en sorte que G N soit égale à G D, & enfin H  $\lambda$  au point  $\lambda$ , en sorte que G  $\lambda$  soit moindre G D ; ensuite de tous les points de la ligne G D, compris entre G & D, soient entendues être menées des lignes paralleles à G H, & qui soient moyennes proportionnelles entre les portions de la susdite ligne G D, comprises respectivement entre le sommet D & lesdites paralleles, & les portions desdites paralleles contenuës entre ladite D G & les lignes tirées du point H. Ces choses ainsi supposées.

*Je dis que toutes ces moyennes proportionnelles seront les ordonnées des lignes régulières, dont l'Axe sera G D, le sommet D, où la pluspart touchera la ligne D E, & passeront par le point F, suivant cet ordre.*

## I.

Les moyennes proportionnelles entre les parties de l'Axe D G, & les portions des paralleles coupées par la ligne H D, comme A Z moyenne entre A D & A S, seront les ordonnées à une ligne droite D Z F.

## II.

Les moyennes proportionnelles entre les parties de G D, & les paralleles coupées par la ligne H L comme A T moyenne entre A D, & A B, seront dans l'Hyperbole D T F, dont D L sera l'Axe transverse, & D Q le droit. Où il paroît que ce sera l'Hyperbole que nous avons décrit cy-dessus, si la ligne D L est égale au plus grand diamètre de la Colonne, & G F égale aux deux tiers de sa longueur.

## III.

Les moyennes proportionnelles entre les parties de G D, & les paralleles coupées par la ligne H  $\delta$ , comme A V

A V moyenne entre A D & A C, *seront les ordonnées à la Parabole D V F*, qui est celle que nous avons expliquée cy-dessus, & dont G D fera l'Axe, & G H ou D P le diametre droit ou contigu.

IV.

Les moyennes proportionnelles entre les parties de G D, & les paralleles coupées par la ligne H M, comme A X moyenne entre A D & A K, *seront les ordonnées à une Ellipse D X F*, dont l'Axe transverse est D M, & son droit ou contigu est D I. Où il se voit qu'elles seront au cercle que nous avons décrit au précédent discours, si les lignes G H & M G sont égales, & qu'elles seront dans l'Ellipse que nous avons expliquée au même endroit, si la ligne D M est égale au plus grand diametre de la Colonne.

V.

Les moyennes proportionnelles entre les parties de G D & les paralleles coupées par la ligne H N, comme A Y moyenne entre A D & A R *sont aussi dans une Ellipse D Y F*, dont l'Axe transverse est D N, & le droit D O. Où il faut remarquer que G N ayant été faite égale à G D dans cette hypothese, la ligne G F fera la moitié de l'Axe de même conjugaison avec D N, & partant cette Ellipse est la dernière de celles qui peuvent servir aux Colonnes parce que toutes les autres, dont les Axes transverses sont moindres que D N, ont quelques ordonnées au susdit Axe & au-dessus du point G qui sont plus longues que G F, & qui sont par conséquent passer la courbe de l'Ellipse au-delà de la ligne E F, comme il se voit en l'hypothese qui suit,

VI.

Les moyennes proportionnelles entre les parties de G D, & les paralleles coupées par la ligne H A, comme A

moyenne entre  $AD$  &  $A\mu$ , sont ordonnées à une Ellipse  $D\rho F$ , dont l'Axe transverse est  $D\lambda$ , & le droit  $D\rho$ ; où il se voit que si le point  $A$  est plus près du point milieu de la ligne  $D\lambda$  que le point  $G$ , la ligne  $A\rho$  sera plus longue que  $GF$ ; & par conséquent le point  $\rho$  de l'Ellipse passera au-delà de la ligne  $EF$  en  $\rho$ , d'où elle retournera en  $F$ , après avoir fait une Courbure en dehors: ce qui ne peut pas servir aux Colonnes.

## VII.

Enfin, si la ligne du point  $H$  coupe  $DG$  entre  $D$  &  $G$  comme en  $\pi$ ; il arrivera 1. Que toutes les moyennes proportionnelles entre les parties de  $\pi D$  & les parallèles tirées entre les points  $\pi$  &  $D$ , & coupées par la ligne  $H\pi$  continuée en  $\tau$ , comme  $A\beta$  moyenne entre  $AD$  &  $A\xi$ , seront ordonnées à un cercle  $D\beta\pi$  si les lignes  $\pi D$ ,  $\tau D$  sont égales, ou à une Ellipse, si elles sont inégales, dont l'Axe transverse  $\pi D$  & le droit  $\tau D$ .

2. Et toutes les moyennes entre les parties de  $GD$  & les parallèles tirées de tous les points de la ligne  $G\pi$ , & coupées par la ligne  $H\pi$ , comme  $\psi\chi$  moyenne entre  $\psi D$  &  $\psi\phi$ , seront ordonnées à une Hyperbole  $\pi\chi F$ , qui touchera la susdite Ellipse au point  $\pi$ , & aura mêmes Axes qu'elle, sçavoir  $\pi D$  pour transverse, &  $D\tau$  pour droit.

En quoi il se voit encore que ni l'une ni l'autre de ces deux lignes ne peuvent avoir aucune utilité pour les Colonnes, parce que l'Ellipse ne passe point par  $F$ , & l'hyperbole ne touche point la ligne  $DE$  en  $D$ , qui sont conditions nécessaires pour lesdites Colonnes.

Maintenant, comme on peut tirer une infinité de lignes du point  $H$  entre les deux lignes  $HG$  &  $H\delta$  qui couperont la ligne  $GD$  en quelque point au-dessus de  $D$ , lequel terminera l'Axe transverse d'une Hyperbole utile aux Colonnes; & comme on peut tirer une autre infinité de lignes du même point  $H$ , qui couperont la même  $GD$  au-dessous du

point N en quelque point qui terminera l'Axe transverse d'une Ellipse aussi utile aux Colonnes.

De plus, comme les unes & les autres desdites lignes sont régulières, uniformes, & qui se peuvent décrire par une infinité de manières différentes, aussi-bien que par celles que nous avons cy-dessus expliquées, & qui (à la réserve de celles dont les Axes transverses sont coupez par les lignes tirées du point H entre les points D & N) touchent toutes la ligne DE en D, & passent par le point F.

Il s'ensuit que l'on peut utilement décrire une infinité de ces lignes pour le trait de la diminution des Colonnes, entre lesquelles la Parabole sera la moyenne, sous laquelle passeront les Hyperboles dans l'espace contenu entre la Parabole & la ligne droite DF, & toutes les ellipses passeront au-dessus, c'est-à-dire, dans l'espace compris entre la Parabole & la droite DE.

Et quoi qu'entre ces lignes j'aye seulement choisi pour exemple celles dont l'Axe transverse étoit égal au plus grand diamètre de la Colonne, ce n'a pas été pour être plus aisées ou plus utiles que les autres, mais seulement parce que cette grandeur s'est trouvée ainsi déterminée.

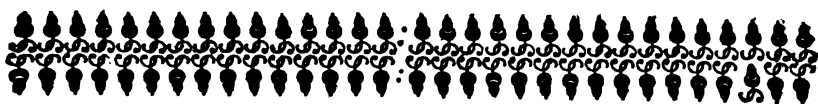
De toutes ces choses, on peut juger si je n'ai pas eu raison de souhaiter au premier Discours de ce Problème, que l'Auteur du *Paradoxe proposé à résoudre à tous les Architectes*, se fut un peu plus clairement fait entendre de la nature de la ligne, que l'on peut, comme il dit, décrire *Architectoniquement parfaitement* pour le renflement & diminution des Colonnes; puis qu'après que quelqu'un en aura décrit *Architectoniquement parfaitement* une infinité par les manières cy-dessus dites, il dépendra toujours de la volonté de l'Auteur du *Paradoxe* de s'en réserver une infinité d'autres, & dire qu'on n'aura pas encore trouvé la sienne.

Outre que cette même infinité de lignes qui se trouve dans ces trois sections de Cone, que M. Descartes appelle

392 PREMIER PROBLEME.

lignes du premier Genre, dont les Equations ne montent qu'aux quarréz, se rencontrent de même dans toutes les lignes des Genres plus élevez, lesquels étant d'ailleurs infinis, produisent encore une infinité d'infinité de lignes régulières; uniformes, que l'on peut décrire *Architectoniquement parfaitement*, & qui sont propres à résoudre le *Paradoxe* proposé.

Sans parler d'une autre infinité de lignes, qui ne sont pas comprises sous ces Genres, comme de la Roulette, Ovales de M. Descartes, Spirales, Cyffoïdes, Conchoïdes, Quadratices, &c. lesquelles sont aussi lignes uniformes & régulières, & qui par conséquent peuvent faire effet dans cette description.



## SECOND PROBLEME. R E S O L U.

*L' Apollonius François des Taâctions, ou décrire Géométriquement les Arcs rampans sur toutes sortes de pieds droits & de hauteur.*

### P R E M I E R D I S C O U R S.

**I**L y a deux choses qui méritent d'être considérées au sujet des Arcs rampans, qui sont ordinairement mis en pratique sur des ouvertures & hauteurs données ou non données; l'une regarde la manière de les décrire, & qui fait le sujet du présent Problème; l'autre traite du moyen de tirer leurs joints de tête, qui est expliqué dans le Problème suivant.

#### *Premiere Observation.*

Sur la manière de décrire les Arcs rampans, je me suis souvent étonné que la pratique que Pappus enseigne dans le 8. de ses Collect. Mathem. de trouver les Axes d'une Ellipse, dont les diamètres de même conjugaison sont donnez, ne fut pas en usage parmi les Ouvriers pour la description de ces Arcs, vû qu'elle y est si utile & si aisée.

Et après avoir médité sur les causes qui peuvent l'avoir jusqu'ici fait négliger, j'en ai trouvé deux assez apparentes. La premiere est, qu'il ne paroît pas facilement qu'il y ait aucun rapport entre la proposition de Pappus, & la description de ces Arcs rampans, parce qu'il faut une préparation assez difficile sur les lignes données, que l'Ellipse ou l'Arc proposé doit toucher en certains points, afin de trouver ses diamètres de même conjugaison, au-

monique, & la ligne B F est moyenne Harmonique entre les deux extrêmes A B & B D ou C. Ce qu'il falloit faire.

Il paroît de plus que le quarré de la Touchante B G étant égal au rectangle des mêmes extrêmes A B & B D, la même B G sera moyenne Géométrique entre ces lignes. Et parce que la ligne A B surpasse E B du même excès que la ligne E B surpasse D B, il s'ensuit que cette ligne E B est la moyenne Arithmétique entre les mêmes extrêmes A B & B D ou C. Voilà donc entre deux extrêmes données A B & C, trois moyennes trouvées, sçavoir l'Arithmétique B E, la Géométrique B G, & l'Harmonique B F.

Or comme dans le Triangle E B G, la ligne E B est à B G, comme B G est à B F, il s'ensuit que la même B G est aussi moyenne proportionnelle Géométrique entre les deux E B & B F. Et partant que *la moyenne Géométrique entre deux lignes extrêmes, est aussi moyenne Géométrique entre les deux moyennes Arithmétique & Harmonique des mêmes extrêmes.* Ce qu'il faut remarquer.

### *Troisième Observation,*

Sur ce propos il y a deux choses que je ne sçaurois dissimuler. La première est l'étonnement que j'ai eu, qu'encore que l'on ait écrit de si belles choses des Sections Coniques, & qu'entre les propriétés de leurs Contingentes, celle-ci ait été reconnue pour une des principales & plus fréquentes, puisqu'il arrive en mille façons qu'une ligne s'y trouve divisée comme A B l'est en F & en D; de sorte que la Toute A B soit à sa Partie D B comme A F est à F D. Et quoique les plus grands Géomètres aient particulièrement recherché les admirables effets de cette espèce de proportion, j'en ai pourtant vu jusqu'ici personne qui se soit avisé de l'appeller *Harmonique*. Il y en a quelques-uns qui l'ont appelée *Involution*; d'autres ont dit que c'étoit une *moyenne & extrême raison proportionnelle*; mais pas un,

M. De la Roche,  
P. Grog. à S.  
Vigini.

au moins que je sçache, ni des Anciens ni des Modernes, ne lui ont donné son véritable nom.

*Quatrième Observation.*

*Sur les Erreurs de Pappus pour l'inscription de trois médiètez au demi-cercle.*

La seconde des choses que je ne sçaurois dissimuler au sujet des proportionnalitez, c'est que Pappus ayant proposé la question que j'ai expliquée ci-dessus sous le nom du second Problème dans le 3. Livre de ses Collections Mathématiques de trouver, ainsi qu'il dit, *trois médiètez dans un demi-cercle*, il semble qu'il n'ait pas trop bien entendu lui-même la nature de la proposition, en laquelle il a fait, à mon sens, deux fautes considérables. La première est, d'avoir repris assez légèrement la solution qu'un autre en avoit faite avant lui, quoiqu'elle fût légitime. La seconde est, de l'avoir lui-même mal résolüe.

L'une & l'autre se reconnoitra par son discours & dans ses Figures. La question commence par ce titre. *Le second Problème étoit tel.*

*Prendre trois médiètez dans le demi-cercle.*

Un autre, dit-il, l'a expliqué en cette manière, & exposant un demi-cercle  $ABC$  (dans la 3. Figure de la 3. Planche) dont le centre est  $E$ , & prenant dans la droite  $AC$  quel que point comme  $D$ , & élevant la Perpendiculaire  $DB$ , il a mené la ligne  $EB$ , sur laquelle ayant tiré du point  $D$  la perpendiculaire  $DF$ , il s'est contenté d'affirmer simplement qu'il avoit exposé trois médiètez dans le demi-cercle, sçavoir  $EC$ , moyenne Arithmétique,  $DB$ , Géométrique, &  $BF$ , Harmonique. Or il est constant que  $BD$  est la moyenne en proportion Géométrique entre les deux  $AD$  &  $DC$ ; & que  $EC$  est moyenne Arithmétique entre les deux mêmes extrêmes  $AD$  &  $DC$ : parce que  $AD$  est à  $DB$  comme  $DB$  est à  $DC$ ; & comme

Figure III. de la  
III. Planch.



*A D* est à elle-même, ainsi l'excès des deux *A D*, *A E*, c'est-à-dire, *A D*, *E C* est à l'excès des deux *E C* & *C D*. Mais il n'a point dit en quelle sorte *B F* fût moyenne en médiété Harmonique, ni de quelles lignes droites, c'est-à-dire, entre quelles extrêmes; mais il a seulement assuré qu'elle étoit la troisième proportionnelle aux deux *E B* & *B D*, ne sachant pas que des trois lignes *E B*, *B D*, *B F*, qui sont en proportion Géométrique, il se forme une médiété Harmonique: car nous montrerons ci-dessous que deux *E B*, trois *D B* & *B F* ajoutées ensemble, font le plus grand terme d'une médiété Harmonique, de laquelle deux *B D* & *B F* font le moyen, & *B D* & *B F* le moindre.

Voilà tout le discours de Pappus que j'ai traduit du Latin de Commandin, dans lequel il paroît que Pappus n'a pas connu que la ligne *B F* fût la moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux extrêmes *A D* & *D C*, entre lesquelles les deux *E C* ou *E B* & *D B* sont aussi respectivement moyennes Arithmétique & Géométrique; parce qu'il ne s'est pas souvenu de ce que nous avons fait remarquer ci-dessus, que la moyenne Géométrique entre deux extrêmes étoit aussi moyenne Géométrique entre les moyennes Arithmétique & Harmonique des mêmes extrêmes; n'étant pas possible qu'il n'eût vû, si la pensée lui en étoit venue, que la ligne *B D* étant moyenne Géométrique entre les deux extrêmes *A D* & *D C*, & entre les deux lignes *E B* & *B F*, dont *E B* est moyenne Arithmétique entre les mêmes extrêmes *A D* & *D C*, la ligne *B F* ne dût être aussi la moyenne Harmonique entre les mêmes.

Figure IV. de la  
III. Planche.

Ce qui se pourroit encore démontrer d'une autre manière, en prenant (dans la 4. Figure de la 3. Planche) la ligne *E G* égale à *D C*, & menant la ligne *D K* qui touche le Cercle *A K H* fait du centre *G* & intervalle *A G*, & la ligne *K I*, perpendiculaires à *A C* & *G K*, parce que la toute *A E* étant égale à la toute *E C*, & l'ôtée *G E* égale à l'ôtée *D C*, le reste *A G* ou *G H* sera égal au reste *E D*;

& ôtant le commun  $EH$ , la ligne  $EG$  ou  $CD$  sera égale à  $DH$ ; & comme  $AD$  à  $DC$ , ainsi  $AD$  à  $DH$ ; mais la raison de  $AD$  à  $DC$  est double de celle de  $AD$  à  $DB$ , & la raison de  $AD$  à  $DH$  double de celle de  $AD$  à  $DK$ : Donc la raison de  $AD$  à  $DB$  sera égale à celle de  $AD$  à  $DK$ ; & partant la ligne  $DK$  sera égale à  $DB$ . Maintenant si aux lignes égales  $GH$  &  $ED$  on ajoute les égales  $HD$  &  $DC$ , les toutes  $GD$  &  $EC$  ou  $EB$  seront égales; & partant  $GD$  sera à  $DK$  comme  $EB$  à  $BD$ ; mais comme  $GD$  est à  $DK$ , ainsi  $DK$  est à  $DI$ ; comme  $EB$  est à  $BD$ , ainsi  $BD$  est à  $BF$ : Donc  $DK$  sera à  $DI$ , comme  $DB$  est à  $BF$ ; & partant la ligne  $DI$  sera égale à la ligne  $BF$ . De plus, la ligne  $DK$  touchant le cercle, &  $KI$  étant perpendiculaire à  $AD$ , il s'ensuit que  $AD$  première est à  $DH$  troisième, comme  $AI$  différence de la première  $AD$  & seconde  $DI$  est à  $IH$  différence de la seconde  $ID$  & troisième  $HD$ , c'est-à-dire, que la ligne  $DI$  est moyenne Harmonique entre les deux extrêmes  $AD$  &  $DH$  ou  $DC$ . Et partant que la ligne  $BF$  égale à  $DI$  est aussi moyenne proportionnelle entre les deux  $AD$  &  $DC$ , dont  $DB$  est la moyenne Géométrique, &  $EB$  ou  $EC$  l'Arithmétique.

Il paroît donc que le Problème de Pappus a été parfaitement résolu par les trois lignes  $EC$ ,  $BD$ ,  $BF$ , qui sont moyennes Arithmétique, Géométrique & Harmonique en un demi-cercle  $ABC$ , & entre mêmes extrêmes  $AD$  &  $DC$ .

Et pour ce qu'il dit ensuite, que des trois lignes en proportion Géométrique  $EB$ ,  $BD$ ,  $BF$  ajoutées l'une à l'autre en certaine manière, il s'en forme une médiété Harmonique: Quoique cela soit vrai, & d'une analogie, (comme il dit) ingénieuse, ainsi que nous l'avons expliqué dans un autre discours, cela n'a point de rapport à la question présente, parce que cette médiété produite donne d'autres termes & d'autres proportions que celles qui sont proposées.

M m m ij

## 400    S E C O N D   P R O B L E M E.

L'autre défaut se reconnoîtra dans la 16. Prop. du même Livre, où il propose lui-même à résoudre le Problème ci-dessus, qu'il prétend avoir été mal résolu par d'autres. Il dit donc ainsi.

*Faire trois médiétés dans le demi-cercle.*

*Figure V. de la  
III. Planch.*

*Tout ce que nous avons dit ci-dessus (dit-il) de trois médiétés, est selon l'opinion des Anciens; mais nous montrerons maintenant qu'il est possible de faire aussi en six lignes droites & les plus petites, trois médiétés dans le demi-cercle.*

*Que l'on expose (dans la 5. Figure de la 3. Planche) un demi-cercle, dans lequel  $BD$  soit perpendiculaire,  $EB$  demi-diamètre, sur qui  $DF$  soit aussi à angles droits; & par  $B$  soit menée  $GBH$  qui touche le cercle; & après avoir continué  $AC$  en  $G$ , soit faite  $BG$  égale à  $BH$ , & tiré la ligne  $DKH$ . Je dis que  $EK$  est moyenne en médiété Harmonique, dont  $BE$  est la plus grande, &  $EF$  la moindre, parce que les angles aux points  $B$  &  $F$  étant droits, &c. .... Or nous avons démontré que les droites  $AD$ ,  $EC$ ,  $DC$  faisoient une médiété Arithmétique, & que les droites  $EG$ ,  $EC$ ,  $ED$ , faisoient une autre médiété Géométrique. Nous avons donc fait trois médiétés dans le demi-cercle.*

Dans tout ce discours de Pappus je ne vois pas bien ce qu'il entend par ces mots, de faire au demi-cercle trois médiétés en six lignes les plus petites; car quoique les trois lignes  $BE$ ,  $EK$ ,  $EF$  fassent une médiété Harmonique, que les trois  $AD$ ,  $EC$ ,  $DC$  une Arithmétique, & les trois  $EG$ ,  $EC$ ,  $ED$  une Géométrique; elles font néanmoins plus de six lignes différentes, & elles ne sont pas toutes dans le demi-cercle, hors duquel s'étend la ligne  $EG$ . De plus, il ne peut pas entendre par ces six lignes trois couples d'extrêmes comme  $AD$ ,  $DC$ :  $BE$ ,  $EF$ : &  $EG$ ,  $ED$ : entre lesquelles il faille trouver trois moyennes dans le demi-cercle, tant parce que pas une de ces extrêmes n'est déterminée, & qu'elles ne se trouvent non

plus que les moyennes que par la construction, que parce que, comme nous venons de dire, il y a une de ces extrêmes, sçavoir  $EG$ , qui tombe hors du demi-cercle.

Le Problème seroit élégant, si ayant proposé trois couples de lignes disposées en certaine maniere, comme  $AD$ ,  $DC : EG$ ,  $ED : AG$ , & une autre, comme  $AL$  : il falloit trouver le demi-diamètre d'un cercle comme  $EC$ , qui fût respectivement moyenne Arithmétique, Géométrique, & Harmonique aux trois couples proposez en la même sorte qu'elle l'est Arithmétique & Géométrique aux deux couples  $AD$ ,  $DC$  : &  $EG$ ,  $ED$  : Mais comme elle n'est plus moyenne, mais plus grand terme au troisième couple proposé  $EB$ ,  $EF$  : la proposition est défectueuse.

Ou bien à la maniere que les Anciens l'ont entendu & résolu, comme il dit, en cinq lignes seulement, sçavoir qu'il fallût trouver dans le demi-cercle les trois moyennes entre deux extrêmes ; comme entre les deux  $AD$ ,  $DC$ , trouver  $AE$  moyenne Arithmétique,  $BD$  Géométrique, &  $BF$  Harmonique, ou entre les deux  $BE$ ,  $EF$ , après avoir divisé  $BF$  en deux également en  $I$ , trouver  $EI$  moyenne Arithmétique,  $ED$  Géométrique, &  $EK$  Harmonique ; ou enfin entre les deux  $AG$ ,  $GC$  trouver  $EG$ , Arithmétique,  $BG$ , Géométrique, &  $DG$ , Harmonique. Et ainsi une infinité d'autres.

Et Pappus auroit en cette maniere évité l'obscurité qui se trouve dans son Problème, qui fait douter qu'il l'ait bien entendu lui-même, aussi-bien que son Interprete Commandin.



## S E C O N D D I S C O U R S.

*T R O U V E R L E S D I A M E T R E S  
de même conjugaison des Sections , selon les différentes  
sujétions des Arts à décrire.*

**M**Ais pour retourner à notre propos , après une si longue digression , il faut se souvenir de ce que nous avons enseigné pour trouver une moyenne Harmonique entre deux lignes données. Et pour commencer aux pratiques de nos Arcs rampans , nous dirons que l'on suppose un Arc à décrire sur deux pieds droits à une hauteur déterminée , ou non déterminée , & en l'un & l'autre cas ces deux pieds droits sont parallèles ou inclinez l'un à l'autre , soit en talu ou en surplomb. De plus , si la hauteur est donnée , le plan qui la détermine est parallèle au plan de la rampe de l'Arc , ou bien l'un & l'autre étant continués se rencontrent.

Il faut donc parler de tous ces cas , & trouver premièrement sur toutes ces Hypotheses , deux diametres de même conjugaison d'une section Conique qui fasse l'Arc que l'on demande ; & ensuite appliquer à ces diametres le Problème de Pappus , si c'est dans une Ellipse , ou d'autres pratiques , si c'est une autre Section , pour en trouver les Axes & les Foyers ou Singliots , par le moyen desquels la Section proposée puisse être facilement désignée.

Et pour y travailler avec ordre , nous commencerons premièrement par l'explication de ceux dont la hauteur n'est point déterminée , pour passer ensuite aux autres.



## PREMIERE OBSERVATION.

*Décrire les Arcs, dont la hauteur n'est point déterminée.*

## PROBLEME PREMIER.

Soit donc (dans les 6. 7. & 8. Figures de la 3. Planche) <sup>Fig. VI, VII, VIII. de la III. Planche.</sup> les deux pieds droits  $AC$ ,  $BD$  parallèles, soit qu'ils soient à plomb (comme en la 6. & 7. Figure,) ou que l'un soit en talu, & l'autre en surplomb (comme en la 8. Figure). La ligne de la rampe  $AB$  (qui conjoint les deux points  $A$  &  $B$ ,) où l'Arc doit toucher les pieds droits, soit qu'elle soit horizontale (comme en la 6. Figure) ou inclinée à l'horizon (comme en la 7. & 8.) soit divisée en deux également en  $H$ , & par  $H$  soit menée  $IHG$  parallèle aux pieds droits; je dis que si l'on prend deux lignes égales de part & d'autre du point  $H$  sur la ligne  $IG$  comme  $HG$  &  $HI$  à quelque distance qu'on les veuille étendre, les deux lignes  $AB$  &  $IG$  seront les diametres d'un cercle, si les lignes  $AH$  &  $HG$  sont égales, ou les Axes d'une Ellipse, si elles sont inégales, & si la ligne  $AB$  est perpendiculaire aux pieds droits (comme en la 6. Figure); ou si elle leur est inclinée (comme aux deux autres Figures) elles seront les diametres de même conjugaison d'une Ellipse, qui passant par les points  $I$  &  $G$ , & ayant le point  $H$  pour centre, touchera les deux pieds droits en  $A$  &  $B$ . La démonstration en est claire par la converse de la 27. du 2. des Coniques d'Apollonius.

Au reste, en cette Hypothese il n'y a que le cercle au seul cas cy-dessus, ou l'Ellipse en tous les autres, qui puissent résoudre le Problème, n'étant pas possible de décrire aucune autre Section qui touche deux lignes parallèles.

## PROBLEME SECONDE.

Si les pieds droits  $AC$  &  $BD$  étans tous deux en talu, <sup>Fig. I. de la IV. Planche.</sup> (comme en la 1. Figure de la 4. Planche) se rencontrent,

étant continuez en G, la ligne de la rampe A B doit être divisée en deux également en Z ; & du point G par Z, il faut mener la ligne G Z Y continuée indéfiniment. De plus, si vous partagez G Z en deux également en E, & qu'entre les deux points E & Z vous en preniez un autre en quelque endroit que ce puisse être, comme en F ; je dis que ce point F déterminera le sommet d'une Ellipse, qui touchera les deux pieds droits en A & B. Et que si en prenant la ligne F H égale à F Z, vous faites que comme G H est à H F, ainsi F Z soit à une quatrième Z Y, le point Y en fera le centre ; D'où si vous faites Y N égale à F Y, la toute F N en fera le diamètre.

Pour trouver l'autre diamètre de même conjugaison, il faut du point Y mener une ligne K Y I parallèle à A B, & qui rencontre en K & I les lignes des pieds droits C A, D B continuées. Puis du point B il faut mener B L parallèle à Z Y, & entre les deux I Y & L Y, trouver la moyenne Géométrique Y O, à laquelle il faut faire Y M égale, afin que la toute M I soit divisée Harmoniquement en L & O ; & que par conséquent la ligne M O soit l'autre diamètre de même conjugaison avec F N d'une ellipse, qui passant par les points A & B, y touche les lignes des pieds droits C A & D B.

La démonstration s'en fait en cette sorte ; parce que la ligne G H est à H F, comme F Z est à Z Y, en composant, permutant & composant G Y sera à F Y, comme F Y à Z Y ; & partant le quarré de F Y sera égal au rectangle G Y Z.

De plus, si du point A sur K I vous tirez A P parallèle à Z Y, il s'ensuivra que les deux B L, A P seront égales, aussi-bien que les deux Y L, Y P ; & parce que les deux Y K & Y I sont aussi égales, aussi-bien que les deux Y M & Y O, il s'ensuivra encore que la ligne Y O étant moyenne Géométrique entre les deux Y I & Y L, son égale Y M sera aussi moyenne Géométrique entre les deux Y K &

& Y P, & les quarez égaux des lignes Y O & Y M seront égaux aux rectangles égaux I Y L, K Y P.

Maintenant, le quarré F Y étant égal au rectangle G Y Z, & le quarré Y O au rectangle I Y L, les quarez seront entre eux comme les rectangles : mais le rectangle G Y Z est au rectangle I Y L en raison composée des lignes G Y à I Y, c'est-à-dire, B L à L I, & de Y Z ou B L à L Y ; donc le quarré F Y sera au quarré Y O en raison composée des lignes B L à I L, & de B L à Y L, c'est-à-dire, comme le quarré de B L au rectangle I L Y : mais le rectangle I L Y est égal au rectangle M L O (comme nous le démontrerons cy-dessous.) Et partant le quarré B L sera au rectangle M L O, comme le quarré F Y est au quarré Y O, ou en prenant leurs quadruples, comme le quarré du diamètre F N est au quarré du diamètre M O : mais B L est parallele au diamètre F N, & partant ordonnée au diamètre M O ; donc le point B sera dans l'Ellipse, dont les lignes F N & M O seront diametres de même conjugaison. On démontrera par le même raisonnement, que le point A sera dans la même Ellipse.

Il ne reste donc plus qu'à prouver que les lignes C A & D B toucheront cette Ellipse aux susdits points A & B. Ce qui se fait ainsi. D'autant que les trois lignes G Y, F Y, Z Y, sont en continuelle proportion Géométrique, & que Y N est égale à Y F ; il s'ensuit, par ce que nous avons dit cy-dessus, que la toute G N est divisée Harmoniquement aux deux points Z & F ; & partant par la 34. du 1. des Coniques d'Apollonius, que les deux droites G A & G B touchent l'Ellipse en A & B. Ce qu'il falloit démontrer.

Maintenant, afin de faire voir, (comme je l'ai promis dans la suite de la démonstration de ce Problème) que le rectangle I L Y est égal au rectangle M L O ; je dirai ainsi. Le quarré Y O est égal au rectangle I Y L, par ce qui a été dit cy-dessus ; mais le quarré Y O est aussi égal au



quarré  $Y L$ , & au rectangle  $M L O$ ; & le rectangle  $I Y L$  aussi égal au même quarré  $Y L$ , & au rectangle  $I L Y$ ; le quarré  $Y L$  avec le rectangle  $M L O$  sera égal au même quarré  $Y L$  avec le rectangle  $Y L I$ ; & partant, si on ôte le commun quarré  $Y L$ , le rectangle  $M L O$  restera égal au rectangle  $I L Y$ . Ce qu'il falloit montrer.

Pour avoir une entiere détermination de ce Problème, nous dirons que  $G Y$  étant à  $F Y$  comme  $F Y$  à  $Z Y$ , par conversion de raison, & en permutant  $G Y$  sera à  $F Y$ , comme  $G F$  est à  $F Z$ , où il se voit que la ligne  $G Y$  étant plus grande que  $F Y$ , il faut aussi nécessairement que la ligne  $G F$  soit plus grande que  $F Z$ ; c'est à-dire, que  $F Z$  soit moindre que la ligne  $E Z$ , qui est la moitié de  $G Z$ , & que par conséquent, pour faire en sorte que le Problème soit possible, il faut prendre le point du sommet  $F$  entre les deux  $E$  &  $Z$ . Où il paroît que plus on le prendra éloigné du point  $Z$ , plus l'Ellipse montera & s'agrandira à l'infini, à mesure que le sommet  $F$  s'approchera du point  $E$ ; comme au contraire, elle diminuëra & deviendra plus plate en s'approchant de la ligne de la rampe  $A B$ , à mesure que le même sommet  $F$  s'approchera du point  $Z$ .

Que si les lignes  $A G$  &  $B G$  sont égales, l'on pourra se servir d'un cercle pour la solution de ce Problème, dont le centre sera dans la ligne  $G Z$ , au point où elle sera coupée par les lignes tirées des points  $A$  &  $B$  perpendiculaires aux lignes  $A C$  &  $B D$ . Mais en tous les autres cas de cette hypothèse, il n'y a que la seule Ellipse qui puisse servir à la solution du Problème, étant impossible de trouver aucune autre section qui touche les deux pieds droits, & dont le sommet se trouve en-dehors vers le point  $N$ .

## P R O B L E M E   T R O I S I E M E.

*Fig. 11. III. IV.  
de la IV. Plan-  
che.*

Si les deux pieds droits  $A C$  &  $B D$  sont tous deux en surplomb (comme aux 2. 3. & 4. Figures de la 4. Planche) & étans continuez, se rencontrent en  $G$ , la ligne

de la rampe  $AB$  doit être divisée en deux également en  $Z$ ; & du point  $G$  par  $Z$ , il faut mener  $GZ$  indéfiniment, & partager la ligne  $GZ$  en deux également en  $E$ . Après quoi, il faut sçavoir que cette proposition contient trois cas differens, à chacun desquels il convient une particulière Section Conique. Car ou l'on prendra le sommet en  $E$ , auquel cas la Section qui résout le Problème est une Parabole (comme en la 2. Figure;) ou bien entre  $E$  &  $Z$ , auquel cas il faut une Ellipse (comme en la 3. Figure;) ou enfin entre  $E$  &  $G$ , & alors il faut une Hyperbole pour satisfaire à la question (comme en la 4. Figure.) Il faut donc examiner les susdits cas l'un après l'autre.

*Premier Cas du troisième Problème.*

Si donc vous prenez le sommet de votre section en  $E$ , Fig. II. de la IV. Planche, point du milieu entre  $G$  &  $Z$  (comme en la 2. Figure de la 4. Planche); & qu'aux deux lignes  $EZ$  &  $ZB$  vous trouviez une troisième proportionnelle  $EF$ , que vous fassiez en  $E$  parallèle à  $AB$ ; je dis que la Parabole dont le sommet est  $E$ , le diamètre  $EZ$ , & son paramètre ou diamètre contigu sous un angle  $ZEF$  égal à  $AZE$ , est la ligne  $EF$ , passera par les points  $A$  &  $B$ , où elle touchera les lignes  $AC$  &  $BD$ : car la ligne  $EF$  étant troisième proportionnelle Géométrique aux deux  $EZ$  &  $ZB$ , le carré de  $ZB$  ou de son égal  $ZA$  sera égal au rectangle  $ZEF$ ; & parant les lignes  $ZA$ ,  $ZB$  seront ordonnées au diamètre  $EZ$  d'une Parabole dont le sommet sera  $E$ , & le diamètre contigu  $EF$ . Et parce que  $EZ$  est égal à  $GE$ , les deux lignes  $GA$  &  $GB$  toucheront la Parabole aux points  $A$  &  $B$ , par la 33. du 1. des Coniques d'Apollonius.

*Second Cas du troisième Problème.*

Si vous prenez le sommet de votre section entre les points  $E$  &  $Z$  (comme en la 3. Figure) au point  $F$ ; & qu'a- Fig. III. de la IV. Planche, près avoir fait  $FH$  égal à  $FZ$ , vous faites que comme la

$Nn$   $n$   $ij$

ligne  $GH$  est à  $HF$ , ainsi  $FZ$  soit à une quatrième  $ZY$ . Et si vous tirez par le point  $Y$  la ligne  $KYI$  parallèle à la rampe  $AB$ , & rencontrant les lignes  $AC$ ,  $BD$  continuées en  $K$  &  $I$ , sur laquelle  $KI$  des points  $A$  &  $B$ , vous menez des lignes  $AP$  &  $BL$  parallèles à  $GY$ , & qu'entre les deux  $KY$  &  $YP$ , ou leurs égales  $IY$  &  $YL$ , vous faites des moyennes Géométriques de part & d'autre  $YM$  &  $YO$ ; & enfin si vous prenez  $YN$  égale à  $YF$ , je dis que les deux lignes  $FN$  &  $MO$  sont diametres de même conjugaison d'une Ellipse, qui touchera les deux lignes des pieds droits  $AC$  &  $BD$  aux points  $A$  &  $B$ .

La démonstration en est quasi la même que celle du Problème précédent, & elle se fait ainsi. Parce que  $GH$  est à  $HF$  comme  $FZ$  à  $ZY$ , en composant, permutant, & composant,  $GY$  sera à  $FY$  comme  $FY$  à  $ZY$ ; & partant le Quarré  $FY$  sera égal au rectangle  $GYZ$ . Mais le rectangle  $KYP$  ou  $IYL$  est aussi égal au quarré  $MY$  ou  $YO$ ; partant le rectangle sera au rectangle comme le quarré est au quarré. Maintenant le rectangle  $GYZ$  est au rectangle  $KYP$  en raison composée des lignes  $GY$  à  $KY$ , c'est-à-dire,  $AP$  à  $KP$ , &  $ZY$  ou son égale  $AP$  à  $YP$ : Donc le quarré  $FY$  sera au quarré  $MY$  en raison composée des lignes  $AP$  à  $KP$ , &  $AP$  à  $PY$ , c'est-à-dire, comme le quarré  $AP$  est au rectangle  $KPY$ . Mais le rectangle  $KPY$  est égal au rectangle  $MPO$  (comme nous dirons cy-dessous.) Donc le quarré  $FY$  est au quarré  $MY$ , ou prenant leurs quadruples, le quarré du diametre  $FN$  est au quarré du diametre  $MO$ , comme le quarré  $AP$  est au rectangle  $MPO$ . Nous prouverons par le même discours que le quarré  $BL$  a aussi la même raison au rectangle  $MLO$ ; mais les lignes  $AP$  &  $BL$  sont parallèles au diametre  $FN$ , elles seront donc ordonnées au diametre  $MO$ , & les points  $A$  &  $B$  seront dans l'Ellipse, dont le centre sera  $Y$ , & les lignes  $FN$ ,  $MO$  diametres de même conjugaison.

Je dis de plus, que ladite Ellipse touchera les lignes

AC, BD aux mêmes points A & B : parce que la ligne FY est moyenne Géométrique entre les deux GY & YZ, & YN est égale à FY ; la toute GN sera divisée Harmoniquement aux deux points F & Z, & la ligne GZ sera moyenne Harmonique entre les deux extrêmes GN & GF ; & la ligne AZ est égale à ZB & parallèle à MO ; donc les deux lignes AG & BG toucheront aux points A & B l'Ellipse dont le sommet est F, les diametres de même conjugaison FN & MO ; & les ordonnées AZ & BZ, par la 34. du 1. des Coniques d'Apollonius.

Il ne reste donc plus qu'à démontrer que les deux rectangles KPY & MPO sont égaux, ce qui se fait en cette maniere. Le quarré MY & le rectangle KYP sont égaux, mais le quarré MY est égal au rectangle MPO avec le quarré PY ; & le rectangle KYP est égal au rectangle KPY avec le même quarré PY ; ôtant donc des égaux le même quarré PY, les restes seront égaux, sçavoir le rectangle KPY au rectangle MPO. Ce qu'il falloit démontrer.

Que si les lignes AG & BG sont égales, & que des points A & B l'on mene des lignes perpendiculaires aux mêmes AC & BD, elles se rencontreront dans la ligne GZ en un point qui sera le centre d'un cercle utile pour la solution de ce Problème.

### *Troisième Cas du troisième Problème.*

Enfin, si vous prenez le point F entre E & G (comme en la 4. Figure) ; & que FH étant prise égale à GF, vous fassiez que comme ZH est à HF, ainsi FG soit à une quatrième GY ; puis par le point Y, si vous tirez indéfiniment la ligne KYI parallèle à la ligne de la rampe AB, & rencontrant les lignes CA & DB continuées en K & I, sur laquelle IK des points A & B vous fassiez tomber les lignes AP & BL parallèles à ZY, afin qu'entre les deux PY & YK, ou leurs égales LY & IY vous puissiez prendre les

Fig. IV. de la  
IV. Plaque.

moyennes Géométriques de part & d'autre  $Y M$  &  $Y O$ , & qu'enfin vous fassiez  $Y N$  égale à  $Y F$ .

Je dis que  $Y$  est le centre d'une Hyperbole, dont les diametres de même conjugaison sont  $F N$  &  $M O$ , & le sommet  $F$ , laquelle passant par les points  $A$  &  $B$ , y touchera les deux pieds droits  $A C$  &  $B D$ .

Parce que la ligne  $M Y$  ou  $O Y$  est moyenne Géométrique entre les deux  $P Y$  &  $Y K$ , ou leurs égales  $L Y$  &  $I Y$ , le carré de  $M Y$  ou de  $Y O$  sera égal au rectangle  $K Y P$ . De plus, parce que  $Z H$  est à  $H F$ , comme  $F G$  est à  $G Y$ , en composant, & permutant  $Z F$  sera à  $F Y$  comme  $H F$  ou son égale  $F G$  à  $G Y$ , & en composant  $Z Y$  sera à  $F Y$  comme  $F Y$  à  $G Y$ ; & partant le carré de  $F Y$  sera égal au rectangle  $Z Y G$ . Donc le carré  $F Y$  sera au carré  $M Y$ , comme le rectangle  $Z Y G$  est au rectangle  $K Y P$ : Mais le rectangle est au rectangle en raison composée des lignes  $Z Y$  à  $Y P$  ou son égale  $A Z$ , & de  $Y G$  à  $Y K$ , c'est-à-dire, (à cause de la similitude des triangles  $G Z A$ ,  $G Y K$ ,) de  $G Z$  à la même  $A Z$ : Donc le carré  $F Y$ , sera au carré  $M Y$ , en raison composée des lignes  $Y Z$  à  $A Z$ , &  $G Z$  à  $A Z$ , c'est-à-dire, comme le rectangle  $Y Z G$  au carré  $A Z$ . Mais le rectangle  $Y Z G$  est égal au rectangle  $N Z F$ , (ainsi que nous le démontrerons cy-après,) Et partant le carré  $F Y$  sera au carré  $M Y$ , ou prenant leurs quadruples, le carré du diametre  $N F$  sera au carré du diametre  $M O$ , comme le rectangle  $N Z F$  est au carré  $A Z$ : Mais la ligne  $A B$  est parallèle à  $M O$ , & divisée en deux également en  $Z$ ; Donc l'Hyperbole dont le sommet est  $F$ , le centre  $Y$ , & les diametres de même conjugaison  $N F$  &  $M O$ , passera par les points  $A$  &  $O$ .

Je dis de plus, qu'elle y touchera les lignes des pieds droits  $A C$  &  $B D$ ; ce que je prouve en cette maniere. D'autant que la ligne  $F Y$  est moyenne Géométrique entre les deux  $Z Y$  &  $G Y$ , & que  $N Y$  est égale à  $F Y$ , la route  $N Z$  sera divisée Harmoniquement aux deux points  $G$  &

F ; & la ligne GZ sera la moyenne Harmonique entre les deux extrêmes NZ & FZ ; & par conséquent, par la 34. du 1. des Coniques d'Apollonius, les deux lignes AG & BG toucheront l'Hyperbole en A & B.

Il ne reste plus qu'à prouver que le rectangle YZG est égal au rectangle NZF : ce que je fais ainsi. Puis que ZY est à FY, comme FY est à YG ; par conversion de raison, & permutant ZY sera à FY ou son égale YN comme FZ à FG ; & composant ZN sera à YN comme ZG à FG ; & par conversion de raison ZN sera à ZY comme ZG est à ZF ; & partant le rectangle des moyennes YZG sera égal au rectangle des extrêmes NZF. Ce qu'il falloit démontrer.

## SECONDE OBSERVATION.

*Décrire les Arcs rampans dont les hauteurs sont données.*

### PREMIERE HYPOTHESE.

*Quand les lignes des pieds droits sont paralleles.*

### PROBLEME QUATRIEME.

SI les pieds droits AC, BD sont paralleles ( comme Fig. V. VI. de la IV. Planche. aux 5. & 6. Figures de la 4. Planche ) & la ligne EF, qui détermine la hauteur, est aussi parallele à celle de la rampe AB ; en ce cas il ne faut que diviser la ligne AB en deux également en H, & tirer par le point H la ligne FHG parallele aux lignes des pieds droits, & rencontrant EF en G ; puis en prenant de l'autre part du point H la ligne HI égale à HG, le point H sera le centre, & les deux lignes AB, GI diametres de même conjugaison d'une Ellipse, laquelle touchera les deux pieds droits aux points donnez A & B, & la ligne EF en G ; avec cette difference, que si AB est perpendiculaire aux pieds droits,

& que  $HG$  soit égale à  $AH$ , les deux  $AB$  &  $IG$  seront les diametres d'un Cercle ; ou les Axes de l'Ellipse proposée, si  $HG$  &  $AH$  sont inégales.

La démonstration est toute entiere dans la 32. du 1. & la converse de la 27. du 2. des Coniques d'Apollonius.

## P R O B L E M E C I N Q U I E M E .

Figure VII.  
VIII. de la IV.  
Planch.

Si les pieds droits  $AC$ ,  $BD$  étant paralleles, la ligne  $EF$  qui détermine la hauteur rencontre la ligne de la rampe  $AB$  comme au point  $I$ , soit de la part de  $B$ , (ainsi que la 7. Figure de la 4. Planche,) ou de la part de  $A$  (comme en la 8. Figure;) il faudra diviser comme dessus la ligne  $AB$  en deux également au point  $H$ , & tirer  $HG$  indéfiniment de part & d'autre du point  $H$ , & parallele aux pieds droits, qui coupe la ligne  $EF$  au point  $G$ . Puis il faut faire  $GK$  égale à  $GF$ , & mener  $IK$ , à laquelle il faut aussi mener du point  $F$  une ligne parallele  $FL$ , & faire la ligne  $GM$  égale à  $GL$ . Je dis que le point  $M$  sera celui où l'Ellipse que l'on cherche doit toucher la ligne  $EF$ ; & que si après avoir mené  $MN$  parallele à  $AB$ , vous faites  $HO$  égale à  $HN$ , & sur la ligne  $GO$  comme diametre, vous décrivez un Cercle  $GRQ$ , qui coupe en  $R$  la ligne  $HR$ , tirée du point  $H$  perpendiculaire à  $HG$ , faisant ensuite les deux lignes  $HP$ , &  $HQ$  égales à  $HR$ , vous aurez les deux lignes  $PQ$  &  $AB$  pour ses diametres de même conjugaison.

La démonstration s'en fait en cette manière, après avoir mené la ligne  $MV$  parallele à  $HG$ . D'autant que  $GK$  est égale à  $GF$ ,  $GL$  à  $GM$ , &  $LF$  parallele à  $IK$ , la ligne  $IG$  sera à  $GK$ , c'est-à-dire,  $GF$ , comme  $GF$  est à  $GL$ , c'est-à-dire,  $GM$ . Et parce que  $MV$  est parallele à  $GH$ , la ligne  $IH$  sera à  $AH$  ou  $HB$ , comme  $IG$  est à  $GF$ ; &  $AH$  ou  $HB$  à  $HV$ , comme  $FG$  à  $GM$ , c'est-à-dire, que  $HB$  sera moyenne Géometrique entre les deux  $IH$  &  $HV$ ; & parce que  $AH$  est égale à  $HB$ , la toute  $AI$  dans la 7.

Figure

Figure sera divisée Harmoniquement aux deux points V & B, ou dans la 8. Figure la route B I aux deux points V & A, & en l'une & en l'autre la ligne V I sera la moyenne Harmonique entre les deux A I & B I : Et par conséquent H V sera à V B, comme H B à B I, & A I à I H, comme V I à I B. Par le même raisonnement nous montrerons que le rectangle G H O, c'est-à-dire, G H N étant égal au carré de H R ou H P, les trois lignes Q G, N G & P G sont aussi en continuelle proportion Harmonique.

Maintenant la raison du carré H B, c'est-à-dire, du rectangle I H V au rectangle A V B étant composée des raisons des lignes I H à A V, & H V à V B, c'est-à-dire, H B à B I ; & cette composition étant la même que celle de I H à B I, c'est-à-dire, A I à I V, & de H B à A V ; & celle-ci étant encore la même que de A I à A V, & de H B à I V ; il s'ensuit que la raison du carré H B au rectangle A V B sera composée des raisons de A I à A V, & de H B à I V. Mais parceque A I est à I H, comme V I est à B I, en permutant, & par conversion de raison dans la 7. Figure, ou en divisant dans la 8 ; A I sera à A V, comme I H à H B ; & partant la composition de raisons de A I à A V, & de H B à I V, sera la même que celle de I H à H B, & de H B à I V, c'est-à-dire, la même de I H, à I V, le carré donc de H B, c'est-à-dire, le rectangle A H B sera au rectangle A V B, comme I H est à I V, c'est-à-dire, comme G H est à M V ou H N : Mais comme G H est à H N, ainsi est le carré P H, c'est-à-dire, le rectangle Q H P au carré de H N ou M V ; Donc le rectangle A H B sera au rectangle A V B, comme le rectangle Q H P est au carré de M V ; & en permutant le rectangle A H B sera au rectangle Q H P, comme le rectangle A V B est au carré de M V. Et partant l'Ellipse dont A B & Q P seront diamètres de même conjugaison, passera par le point M, d'où sont tirées les deux ordonnées M V & M N parallèles ausdits diamètres.



Il paroît encore qu'elle touchera les deux pieds droits  $AC$  &  $BD$  aux points  $A$  &  $B$ , parce que ces points sont au bout du diamètre  $AB$ , & que les pieds droits sont parallèles à l'autre diamètre  $PQ$ . Je dis de plus, qu'elle touchera la ligne  $EF$  au point  $M$ ; ce qui est clair par la 34. du 1. des Coniques d'Apollonius.

Si la ligne de la rampe étant perpendiculaire aux pieds droits, la ligne tirée du point  $H$  en  $M$  se trouvoit aussi perpendiculaire à celle de la hauteur  $EF$ , & égale à l'une des deux  $AH$  ou  $BH$ , ce seroit un Cercle qui résoudroit la question, dont le centre seroit  $H$ , & le diamètre  $AB$ ; ce qui est clair par ce qui a été démontré cy-dessus.

### SECONDE HYPOTHESE.

*Quand les pieds droits se rencontrent, & la ligne de la hauteur est parallèle à celle de la rampe.*

### PROBLEME SIXIEME.

Fig. 1. de la V.  
Planche

SI les pieds droits  $AC$  &  $BD$  ne sont point parallèles, mais en talu (comme en la 1. Figure de la 5. Planche,) en sorte qu'étant continuez, ils se rencontrent au-dessous au point  $G$ , de la part de  $C$  &  $D$ ; & si la ligne  $EF$  qui détermine la hauteur est parallèle à celle de la rampe, il faut couper la susdite ligne  $AB$  en deux également au point  $Z$ , par lequel de  $G$  il faut tirer indéfiniment la ligne  $GZ$ , qui coupera aussi  $EF$  en deux également en  $H$ ; duquel point  $H$  il faut tirer la ligne  $HB$ , & la couper en deux également en  $X$ , par où du point  $F$  il faut mener la ligne  $FX$  qui rencontre  $GZ$  en  $Y$ , puis mener  $AH$  &  $EY$  qui se rencontrent en  $V$ . Je dis que  $Y$  sera le centre de l'Ellipse, qui touchera les trois lignes  $AC$  en  $A$ ,  $BD$  en  $B$ , &  $EF$  en  $H$ . Et que si l'on fait  $YN$  égale à  $YH$ , & que menant par le point  $Y$  la ligne  $KYI$  parallèle à  $AB$ , &  $AP$ ,  $BL$  parallèles à

GY, l'on fasse Y M moyenne Géométrique entre les deux KY & YP, & Y O égale à Y M : les deux lignes NH & MO en seront les diamètres de même conjugaison.

La démonstration s'en fait en cette manière, après avoir tiré les lignes ZX, ZV, AY & BY. D'autant que la ligne KY est parallèle à AB, elle sera divisée également en Y : & partant les deux triangles EYK, FYI sur bases égales, & entre mêmes parallèles seront égaux ; aussi bien que les deux AYK, BYI. Et partant les deux triangles EYA, FYB seront égaux ; mais les deux EHY, FHY sont aussi égaux. Il y aura donc même raison du triangle EYA au triangle EHY, que du triangle FYB à FHY. Mais les triangles EYA & EYH ayans même base EY, sont entre eux comme les lignes AV & VH ; & les triangles FYB, FYH comme les lignes BX & XH. Donc les lignes AV & VH seront entre elles comme les lignes BX & XH ; mais ces dernières sont égales par la construction : Donc les deux autres AV & VH seront aussi égales ; & partant VX sera parallèle & égale à la moitié de AB, c'est-à-dire, AZ. Et parce que dans le triangle ABH, la ligne HB est à BX comme AB est à BZ, la ligne XZ sera parallèle & égale à la moitié de la base AH, c'est-à-dire, à VH. Par la même raison VZ sera parallèle & égale à XH.

Maintenant, si l'on continue les lignes HB, EY jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en R : Comme nous avons montré que AZ étoit égale à VX ; AZ sera à EH, c'est-à-dire, ZG à GH, comme VX est à la même EH, c'est-à-dire, XR à RH ; & en changeant, & par conversion de raison, GH sera à HZ, comme RH à HX, ou à son égale VZ. Mais à cause de la similitude des triangles H Y R, V Y Z, le côté RH est à VZ comme HY est à YZ. Donc GH sera à HZ comme HY est à YZ ; & en permutant, & divisant GY sera à HY comme HY à YZ, c'est-à-dire, que HY, ou son égale NY sera moyenne Géométrique entre les deux GY & YZ ; & partant la route GH

sera divisée Harmoniquement en  $Z \& N$  ; & la ligne  $GZ$  sera moyenne Harmonique entre les deux  $GH \& GN$  ; &  $GY$  moyenne Arithmétique entre les mêmes. Par même raisonnement nous montrerons que  $KP$  est moyenne Harmonique entre les deux  $OK \& KM$  ; &  $KY$  moyenne Arithmétique entre les mêmes : aussi bien qu'entre les deux  $MI \& IQ$ , la ligne  $IL$  sera moyenne Harmonique, &  $IY$  Arithmétique.

Maintenant nous pourrons faire voir par le même discours dont nous nous sommes servis aux précédentes propositions, que le rectangle  $HYN$  est au rectangle  $MYO$ , comme le quarré de  $AP$  est au rectangle  $KPY$ , ou son égal  $MPO$  ; & comme le quarré  $BL$  est au rectangle  $YLI$  ou son égal  $OLM$  ; & comme  $AP \& BL$  sont parallèles à  $NH$ , elles seront ordonnées au diamètre  $MO$  ; & l'ellipse, dont les diamètres de même conjugaison seront  $HN \& MO$ , passera par les points  $A \& B$ , où elle touchera aussi les lignes  $AG, BG$  par la 34. du 1. des Coniques, & la ligne  $EF$  en  $H$  par la converse de la 6. du 2. du même. Ce qu'il falloit démontrer.

Que si les deux lignes  $AG \& BG$  étant égales, &  $AY$  perpendiculaire à  $AC$ , elle se trouvoit égale à  $YH$  ; ce seroit un Cercle, qui résoudroit le Problème dont le centre seroit  $Y$ , &  $YH$  demi-diamètre.

## P R O B L E M E   S E P T I E M E.

Fig. II, III, IV, de  
la V. Planche,

Si les pieds droits  $AC \& BD$  ne sont point parallèles, mais en surplomb (comme aux 2. 3. & 4. Fig. de la 5. Planche), en sorte qu'étant prolongez, ils se rencontrent au-dessus, comme au point  $G$  de la part de  $A \& B$  ; & si la ligne  $EF$ , qui détermine la hauteur de l'Arc à décrire est parallèle à celle de la rampe  $AB$ . Il y a trois cas differents en cette proposition, qui demandent chacun une Section Conique pour leur solution, en la même maniere que nous avons dit en l'explication du troisième Problème cy-

dessus : car après avoir divisé la ligne de la rampe  $AB$  en deux également en  $Z$ , & tiré du point  $G$  la ligne  $GZ$  : il arrivera que la ligne  $EF$  passera par le milieu de la susdite ligne  $GZ$  en  $H$  (comme en la 2. Figure, ) ou bien elle passera au-dessous (comme en la 3. Figure) ; en sorte que la ligne  $ZH$  soit moindre que  $HG$  ; ou enfin elle passera au-dessus (comme en la 4. Figure, ) en sorte que  $GH$  soit moindre que  $HZ$ . Au premier cas il faudra une Parabole pour résoudre la question ; au second une Ellipse ; au troisième une Hyperbole. Et pour les traiter avec ordre :

*Premier Cas du Problème septième,*

Soit (comme en la 2. Figure de la 5. Planche, ) la ligne Fig. II. de la V.  
Planche de la hauteur  $EF$ , qui passe au point  $H$ , où la ligne  $GZ$  est divisée en deux également ; & après avoir tiré les deux lignes  $AH$  &  $BH$ , soit  $BH$  aussi partagée en deux également en  $X$ , & tirée indifféremment  $EX$ , à laquelle du point  $E$  il faut mener  $EV$  parallèle. Je dis que la section qui touchera les trois lignes  $AC$ ,  $BD$ , &  $EF$  aux points  $A$ ,  $B$ , &  $H$ , sera une Parabole. Ce que je démontre en cette manière.

D'autant que la ligne  $GZ$  est double de  $HZ$  ; & que  $EB$  est parallèle à  $AB$ , la ligne  $GB$  sera aussi double de  $BH$  ; &  $GA$  double de  $EA$  : Mais la ligne  $BH$  est aussi double de  $BX$  ; & partant dans le triangle  $GBH$ , la ligne  $GB$  sera à  $BF$  comme  $HB$  à  $BX$  : Donc la ligne  $FX$  sera parallèle à  $GH$ . De plus, la ligne  $EV$  ayant été faite parallèle à  $EX$ , elle le sera aussi à  $GH$ , & partant dans le triangle  $GHV$ , la ligne  $GA$  sera à  $AE$  comme  $HA$  à  $AV$  : Mais  $GA$  est double de  $AE$ , donc  $HA$  sera aussi double de  $AV$  ; c'est-à-dire, que la ligne  $EV$  divisera  $AH$  en deux également en  $V$  ; aussi bien que  $FX$  la ligne  $BH$  en  $X$ , &  $GZ$  la ligne  $AB$  en  $Z$ . Et partant par la 19. du 2. des Coniques d'Apollonius, les trois lignes  $GZ$ ,  $FX$ ,  $EV$  seront diamètres d'une section ; que les lignes  $AC$ ,  $BD$  &  $EF$  touchent

aux points A, B, & H. Mais ces trois diamètres sont parallèles; donc la section sera une Parabole par la 46. du 1. des mêmes Coniques. Si donc nous faisons H I troisième proportionnelle Géométrique aux deux lignes H Z & A Z; & si nous décrivons une Parabole, dont le diamètre soit H Z, son paramètre ou diamètre conjugué H I, le sommet H, & l'angle des ordonnées G H F, elle passera par les points suivants A, B, & H, où elle touchera les trois lignes A C, B D, & E F.

Et premièrement, il est constant qu'elle passera par le point H, puisqu'il en est supposé le sommet; ensuite H I étant troisième proportionnelle Géométrique aux deux H Z & A Z, le carré A Z ou B Z sera égal au rectangle Z H I; & partant les deux points A & B seront dans la Parabole; laquelle touchera les lignes A C & B D aux mêmes points, par la 33. du 1. des mêmes Coniques; & la ligne E F en H par la converse de la 46. du même.

*Second Cas du Problème septième.*

Fig. III. de la  
V. Planches.

Que si la ligne de la hauteur D F coupe G Z, en sorte que G H soit plus grande que H Z (comme en la 3. Figure de la 5. Planche.) après avoir tiré les lignes A H & B H, & divisé B H en deux également en X, tiré P X, jusqu'à ce qu'elle rencontre G Z au point Y, & mené E Y. Je dis que le point Y sera au dessous du point H vers Z, & que la section qui touchera les trois lignes A C, B D, E F aux points A, B, H, sera une Ellipse, dont le centre sera Y. Et partant si nous faisons Y N égale à Y H, & qu'après avoir mené par le point Y la ligne K Y I parallèle à A B, & sur laquelle tombent les lignes A P & B L parallèles à G Z, nous faisons (ainsi qu'il est dit tant de fois) Y M & Y Q deux cinquièmes Géométriques entre K Y & Y P, ou entre I X & Y L, les deux lignes H N & M O en seront les diamètres de même conjugaison.

Il se démontre en cette manière, après avoir continué

les lignes  $Y E, B X$  jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en  $R$ , & menant les lignes  $V X, V Z, X Z, A V, B Y$ , &  $F$  parallèle à  $G Y$ . D'autant que  $G H$  est plus grande que  $H Z$ , &  $E F$  parallèle à  $A B$ , la ligne  $G F$  sera aussi plus grande que  $F B$ . Mais  $H X$  est égale à  $B X$ ; donc dans le triangle  $G H B$  la ligne  $G F$  aura plus grande raison à  $F B$  que  $H X$  à  $B X$ , & en composant  $G B$  aura plus grande raison à  $F B$  que  $H B$  à  $B X$ . Mais comme  $G B$  est à  $F B$ , ainsi  $H B$  est à  $B X$ . Et par conséquent  $H B$  aura plus grande raison à  $B X$  qu'à  $B X$ ; & partant  $B X$  sera plus grande que  $B Z$ ; & le point  $X$  sera entre  $Z$  &  $H$ ; & l'angle  $B F Y$  sera plus grand que l'angle  $B F Z$ , c'est-à-dire,  $B G Z$ . Et partant la ligne  $F Y$  rencontrera  $G Z$  continuée de la part de  $Z$  au point  $Y$ .

De plus, comme les triangles  $K E Y, I F Y$  sur bases égales  $K Y, I Y$ , & entre mêmes parallèles  $K I, E F$ , sont égaux; aussi bien que les triangles  $K A Y, I B Y$ , &  $E Y H, F Y H$ . Si des égaux  $K E Y, I F Y$  on ôte les égaux  $K A Y, I B Y$ , les restes seront égaux, c'est-à-dire, les triangles  $A E Y, B F Y$ . Et partant le triangle  $A E Y$  aura même raison au triangle  $E Y H$  que  $B F Y$  à  $F Y H$ . Mais les triangles  $A E Y, E Y H$  ayant même base  $E Y$ , sont entr'eux comme les lignes  $A H$  &  $Y H$ ; & les triangles  $B F Y, F Y H$  ayant aussi même base  $F Y$ , sont comme les lignes  $B X$  &  $X H$ ; la ligne  $A V$  sera à  $V H$  comme  $B X$  est à  $X H$ . Mais  $B X$  est égale à  $X H$  par la construction, donc  $A V$  sera aussi égale à  $V H$ ; & partant la ligne  $E Y$  coupera  $A H$  en deux également en  $V$ ; aussi bien que  $F Y$  la ligne  $B H$  en  $X$ ; &  $G Y$  la ligne  $A B$  en  $Z$ ; & le point  $Y$  a été démontré au dessous du point  $G$  vers  $Z$ . Et par conséquent les trois lignes  $E Y, F Y, G Y$  seront diamètres d'une Ellipse qui touchera les trois lignes  $A G, B G, E F$  aux points  $A, B$ , &  $H$ , par la 29. du 2. des Coniques d'Apollonius.

Je dis de plus, que les lignes  $H N$  &  $M O$  en seront les diamètres de même conjugaison. Comme  $A H$  est double de  $H V$ , aussi bien que  $B H$  double de  $H X$ ; la ligne  $Y X$

dans le triangle  $AHB$  sera parallèle, & égale à la moitié de la ligne  $AB$ , c'est-à-dire, à  $AZ$ . Par la même raison  $XZ$  dans le même triangle sera égale, & parallèle à la moitié de la ligne  $AH$ , c'est-à-dire, à  $VH$ , &  $VZ$  égale & parallèle à  $HX$ , & partant  $AZ$  sera à  $EH$ , c'est-à-dire,  $ZG$  à  $GH$ , comme  $VX$  à la même  $EH$ , c'est-à-dire,  $XR$  à  $RH$ : & en changeant & divisant  $GH$  sera à  $HZ$  comme  $RH$  à  $HX$ , ou à son égale  $VZ$ . Mais parce que dans le triangle  $RHY$ , la ligne  $RH$  est à  $VZ$  comme  $HY$  à  $YZ$ , la ligne  $GH$  sera à  $HZ$  comme  $HY$  à  $YZ$ , & en permutant & composant  $GY$  sera à  $HY$  comme  $HY$  à  $YZ$ , c'est-à-dire, que  $HY$  sera moyenne Géométrique entre les deux  $GY$  &  $YZ$ : Mais  $YN$  est égale à  $YH$ . Donc la toute  $NG$  est divisée Harmoniquement aux points  $Z$  &  $H$ : &  $GZ$  est moyenne Harmonique entre les deux  $NG$  &  $GH$ ; &  $GY$  moyenne Arithmétique entre les mêmes.

Maintenant nous démontrerons, ainsi qu'en la précédente proposition, que le quarré de  $AP$  ou  $BL$  est au rectangle  $MP O$  ou  $OL M$ , comme le quarré du diamètre  $HN$  est au quarré du diamètre  $MO$ . Mais les lignes  $AZ$  &  $BZ$  sont égales entr'elles, & parallèles à  $MO$ , elles sont donc ordonnées à l'autre diamètre  $HN$  dans l'Ellipse, dont les diamètres de même conjugaison sont  $HN$  &  $MO$ , laquelle touchera les lignes  $AC$ ,  $BD$  en  $A$  &  $B$ , par la 34. du 1. des Coniques, &  $EF$  en  $H$  par la convelle de la 6. du 2. des mêmes.

Que si les lignes  $AG$  &  $BG$  étoient égales, &  $AY$  étant perpendiculaire à  $AC$  se trouvoit égale à  $YH$ ; ce seroit un cercle qui satisferoit au Problème dont le centre seroit  $Y$ , & le demi-diamètre  $YH$ , ou  $AY$ .

*Troisième Cas du septième Problème.*

Fig. IV. de la V.  
Planches

Enfin si la ligne de la hauteur  $EF$  coupe  $GZ$ , en sorte que  $GH$  soit moindre que  $HZ$  (comme en la 4. Figure de la 5. Planche,) après avoir tiré comme ci-dessus les lignes  $AH$ ,

AH, BH, & divisé BH en deux également en X, & mené FX indéfiniment de part & d'autre, laquelle rencontre GZ prolongée en Y, & AB en T, & tiré EY indéfiniment de part & d'autre, qui rencontre AH en  $\lambda$ , & AB en S.

Je dis que le point Y sera dans la ligne GZ prolongée de la part de G, & que la section qui touchera les trois lignes AC, BD, EF aux points A, B & H, sera une Hyperbole, dont le centre sera Y. Et partant si nous faisons YN égale à YH, & ayant mené la ligne PYL par le centre Y, & parallèle à AB, si nous continuons AG & BG jusqu'en K & I; & tirant AP & BL parallèles à GZ, si nous prenons YM & YO moyennes Géométriques entre les deux KY & YP, ou leurs égales IY & YL: les lignes NH & MO en seront les diamètres de même conjugaison.

Il se démontre ainsi, après avoir mené la ligne XQV parallèle à AB, & rencontrant la ligne YE au point V. D'autant que EF est parallèle à AB, & AZ égale à BZ; EH sera aussi égale à FH; mais dans le Triangle YZS, la ligne EH est à ZS comme YH est à YZ; Et dans le Triangle YZT, comme YH à YZ, ainsi HF à ZT. Donc EH sera à ZS comme HF à ZT; & partant ZS sera égale à ZT. Mais ZT est à QX comme ZS à VQ: Donc QX sera aussi égale à QV; & partant BZ sera à QX, c'est à-dire, ZH à HQ comme AZ à VQ; & par conséquent le point V est dans la ligne AH, & le même que le point  $\lambda$ , & en la même raison de AH à HV, comme de ZH à HQ, ou BH à HX; c'est à-dire, que la ligne YES coupera AH en deux également en V, comme YFT la ligne BH en X, & YHZ la ligne AB en Z: & le point Y est au-dessus du point G, comme nous le démontrerons ci-dessous; & par conséquent les trois lignes YES, YFT, YHZ, seront diamètres d'une Hyperbole qui touchera les trois lignes AC, BD, EF aux points A, B, & H, par la 29. du 2. des Coniques.

Je dis de plus, que les lignes HN & MO en sont les  
*Rec. de l'Ac. Tom. V.*

P p p



diamètres de même conjugaison , après avoir continué la ligne BH jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne EY en R, & mené VZ. Nous démontrerons comme en la proposition précédente , que VX est parallèle & égale à AZ, & VZ parallèle & égale à HX; & que par conséquent AZ fera à EH, c'est-à-dire, ZG à GH comme VX à la même EH, c'est-à-dire, XR à RH; & en changeant & divisant GH fera à HZ comme RH à HX ou à son égale VZ. Mais dans le triangle YVZ, la ligne RH est à VZ comme YH est à YZ; Donc YH fera à YZ comme GH à HZ; & en changeant, permutant, & par conversion de raison YZ fera à YH comme YH à YG; c'est-à-dire, que YH sera moyenne Géométrique entre les deux YZ & YG: Et comme YN est égale à YH, la toute NZ sera divisée Harmoniquement aux points G & H, & la ligne GZ sera moyenne Harmonique entre les deux NZ & ZH, & la ligne YZ moyenne Arithmétique entre les mêmes.

Maintenant, parce que le carré YH est égal au rectangle ZYG, & le carré YO au rectangle P Y K; le carré sera au carré comme le rectangle est au rectangle: Mais la raison du rectangle ZYG au rectangle KYP est composée des raisons des lignes ZY à PY, ou à son égale AZ, & de YG à YK, c'est-à-dire, (à cause de la similitude des triangles YGK & ZGA) de GZ à AZ: Donc le carré YH sera au carré YO en raison composée des raisons de ZY à AZ, & de GZ à AZ, c'est-à-dire, comme le rectangle YZG au carré AZ. Mais le rectangle YZG est égal au rectangle NZH (comme nous le démontrerons ci-dessous; ) Donc le carré YH sera au carré YO, ou prenant leurs quadruples, le carré du diamètre transverse NH sera au carré du diamètre droit MO, comme le rectangle NZH au carré AZ. Mais AZ est égale à ZB, & parallèle au diamètre MO, elles seront par conséquent ordonnées au diamètre NZ; & les points A & B seront dans l'Hyperbole, dont NH & MO seront diamètres de même conjugaison, & le sommet au point H.

Il paroît de plus, que les lignes  $AG$  &  $BG$  toucheront la susdite Hyperbole aux mêmes points  $A$  &  $B$ , parcé que la ligne  $NZ$  est divisée Harmoniquement en  $G$  &  $H$ , par la 34. du 1. des Coniques; & la ligne  $EF$  au sommet  $H$ , parce qu'elle est parallèle à l'ordonnée  $AB$  par la converse de la 6. du 2. des mêmes.

Il faut maintenant faire voir que le point  $Y$  est dans la ligne  $ZG$  prolongée de la part de  $G$ , comme nous l'avons promis ci-dessus: ce qui se fait en cette maniere, après avoir tiré la ligne  $F\delta$  parallèle à  $GZ$ . D'autant que  $GH$  est supposée moindre que  $HZ$ , & que  $EF$  est parallèle à  $AB$ ;  $GF$  sera aussi moindre que  $FB$ : Mais  $HX$  est égale à  $XB$ : Donc  $GF$  aura moindre raison à  $BF$ , que  $HX$  à  $XB$ ; & en composant  $GB$  aura moindre raison à  $BF$ , que  $HB$  à  $BX$ ; Mais comme  $GB$  à  $BF$ , ainsi  $HB$  à  $B\delta$ ; Donc  $HB$  aura moindre raison à  $B\delta$  qu'à  $BX$ ; Et partant  $B\delta$  sera plus grande que  $BX$ , & l'angle  $BFX$  moindre que l'angle  $BF\delta$ , ou son égal  $BGH$ : Et partant la ligne  $XF$  rencontrant  $\delta F$  en  $F$ , rencontrera aussi la parallèle  $ZG$  prolongée au-dessus de  $G$  en  $Y$ .

De plus, il faut montrer que les rectangles  $YZG$  &  $NZH$  sont égaux; ce qui se fait ainsi. Parce que  $ZY$  est à  $YH$  comme  $YH$  à  $YG$ , par conversion de raison, & en permutant  $ZY$  sera à  $HY$ , ou à son égale  $YN$  comme  $ZH$  à  $GH$ , & en composant, & par conversion de raison  $NZ$  sera à  $YZ$  comme  $GZ$  à  $HZ$ . Et partant le rectangle des moyennes  $YZG$  sera égal à celui des extrêmes  $NZH$ . Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.



## T R O I S I E M E   H Y P O T H E S E .

*Quand les pieds droits ne sont point paralleles entr'eux , ni la ligne de la hauteur à celle de la rampe.*

## P R O B L E M E   H U I T I E M E .

*Figure 2. de la  
V. Planch.*

**S**il les pieds droits  $AC$ ,  $BD$  ne sont point paralleles, mais en talu (comme en la 1. Figure de la 6. Planche) en sorte qu'étant prolongez, ils se rencontrent au-dessous, comme au point  $G$  de la part de  $C$  &  $D$ . Et si la ligne  $EF$ , qui détermine la hauteur de l'Arc à décrire, n'est point parallele à celle de la rampe  $AB$ , mais l'une & l'autre étant prolongées, se rencontrent comme au point  $I$ .

Il faut premièrement couper la ligne  $AB$  en deux également en  $Z$ , & tirer indéfiniment la ligne  $GZ$ ; puis entre les deux  $EI$  &  $IF$  trouver une moyenne proportionnelle Harmonique  $IH$ , & du point  $H$  mener les deux  $HB$  &  $HA$ ; ensuite il faut diviser  $HB$  en deux également en  $X$ , & mener  $FX$  qui rencontrera la ligne  $GZ$  prolongée en  $Y$ , & joindre les points  $EY$ .

Je dis que  $Y$  sera le centre d'une Ellipse qui touchera les trois lignes  $AC$  en  $A$ ,  $BD$  en  $B$ , &  $EF$  en  $H$ ; & que si ayant tiré la ligne  $HY$  indéfiniment, & fait  $YT$  égale à  $YH$ , l'on mène par le point  $Y$  la ligne  $NYM$  parallele à  $EF$ , sur laquelle des points  $A$  &  $B$  l'on mène les deux  $A\delta$  &  $BP$  paralleles à  $HT$ , aussi-bien que  $A\psi$  &  $BS$  paralleles à  $MN$ ; & qu'enfin entre les deux  $NY$  &  $Y\delta$ , l'on prenne  $Y\epsilon$  moyenne Géométrique, à laquelle on fasse  $Y\beta$  égale. Je dis que les deux lignes  $HT$  &  $\epsilon\beta$  seront les diamètres de même conjugaison de la susdite Ellipse.

Pour le démontrer, il faut mener par le point  $Y$  la ligne  $KYQ$  parallele à  $AB$ , &  $Y\epsilon$  perpendiculaire à  $GB$ , &  $Y\alpha$  à  $GA$ ; puis sur  $AB$  prolongée, des points  $E$  &  $F$  tirer les

lignes  $E\mu$  &  $F\eta$  parallèles à  $GZ$ , & mener  $AY, BY$ ; après quoi je raisonne en cette maniere.

Puisque  $KQ$  est parallèle à  $AB$ , & que  $AB$  est divisée en deux également en  $Z$ , par la ligne  $GZ$ , la ligne  $KQ$  le sera pareillement en  $Y$ ; & les triangles  $GKY, GQY$  seront égaux, & leurs côtez seront en raison réciproque de leurs hauteurs, c'est-à-dire, que le côté  $GK$  sera au côté  $GQ$ , c'est-à-dire,  $GA$  à  $GB$ , comme  $Y\lambda$  hauteur du triangle  $GQY$  est à  $Y\upsilon$  hauteur du triangle  $GKY$ . De plus, les triangles  $AEY$  &  $BFY$  étant l'une à l'autre en raison composée de celles de leurs côtez & de leurs hauteurs, & la hauteur du triangle  $AEY$  étant  $Y\lambda$ , &  $Y\upsilon$  celle du triangle  $BFY$ ; le triangle  $AEY$  sera à  $BFY$  en raison composée des raisons du côté  $AE$  au côté  $BF$  & de la hauteur  $Y\lambda$  à la hauteur  $Y\upsilon$ . Mais la raison du côté  $AE$  à  $BF$  est encore composée des raisons de  $AE$  à  $E\mu$ , c'est-à-dire, (à cause de la similitude des triangles  $AE\mu$  &  $AGZ$ ) de  $AG$  à  $GZ$ , de  $E\mu$  à  $F\eta$ , & de  $F\eta$  à  $FB$ , c'est-à-dire,  $GZ$  à  $GB$  (à cause que les triangles  $BF\eta, BGZ$  sont aussi semblables.) La raison donc du triangle  $AEY$  à  $BFY$  sera composée des raisons de  $AG$  à  $GZ$ ,  $E\mu$  à  $F\eta$ ,  $GZ$  à  $GB$ , &  $Y\lambda$  à  $Y\upsilon$ . Mais il a été démontré ci-dessus que  $Y\lambda$  est à  $Y\upsilon$  comme  $GB$  est à  $GA$ ; & les raisons de  $AG$  à  $GZ$ , &  $GZ$  à  $GB$  sont égales à celle de  $AG$  à  $GB$ ; & partant le triangle  $AEY$  sera à  $BFY$  en raison composée de  $AG$  à  $GB$ ,  $GB$  à  $GA$ , &  $E\mu$  à  $F\eta$ : Mais les raisons de  $AG$  à  $GB$ , &  $GB$  à  $GA$  se détruisent; il ne reste donc plus que la raison de  $E\mu$  à  $F\eta$  pour celle du triangle  $AEY$  à  $BFY$ : Mais  $E\mu$  est à  $F\eta$  comme  $EI$  à  $IF$ , c'est-à-dire, comme  $EH$  à  $HF$  par la construction, ou comme le triangle  $EYH$  au triangle  $HYF$ : Donc le triangle  $AEY$  sera au triangle  $BFY$ , comme le triangle  $EYH$  à  $HYF$ ; & en permutant  $AEY$  sera à  $EYH$  comme  $BFY$  à  $HYF$ . Mais les deux triangles  $AEY, EYH$  ayant une base commune  $EY$ , sont entr'eux comme les lignes  $AV$  &  $VH$ ; & les

deux  $BFY$ ,  $HYF$  ayant la base commune  $FY$ , sont entr'eux, par la même raison, comme les lignes  $BX$  &  $XH$ ; il s'ensuit que  $AV$  est à  $VH$  comme  $BX$  est à  $XH$ ; mais celles-ci sont égales par la construction : Donc  $AV$  sera aussi égale à  $VH$ .

Et partant la ligne  $EY$  coupant  $AH$  en deux également en  $V$ ; & la ligne  $FY$  coupant de même  $BH$  en  $X$ , aussi-bien que  $GY$  la ligne  $AB$  en  $Z$ : il s'ensuit que les trois lignes  $EY$ ,  $FY$ , &  $GY$  sont diamètres d'une Ellipse, dont le centre est  $Y$ , & qui touchera les trois lignes  $AC$ ,  $BD$  &  $EF$  en  $A$ ,  $B$  &  $H$ .

Il faut maintenant montrer que  $HT$  &  $\alpha\beta$  en sont les diamètres de même conjugaison; & pour cet effet il faut des points  $E$  &  $F$  mener sur la ligne  $NM$  prolongée les lignes  $E\alpha$  &  $FR$  parallèles à  $HT$ , laquelle il faut continuer de part & d'autre, en sorte qu'elle rencontre  $AC$  en  $\chi$ , &  $BD$  en  $\zeta$ ; puis du point  $F$  mener  $FL$  parallèle à  $BH$ , rencontrant  $TH$  en  $L$ ; & par le point  $X$  tirer  $LX$ , qui rencontre  $BD$  en  $O$ , & mener  $YO$ . En la même manière du point  $E$  il faut mener  $E\gamma$  parallèle à  $AH$ , qui rencontre  $TH$  en  $\gamma$ ; d'où par le point  $V$  il faut tirer  $\gamma V$ , rencontrant  $AC$  en  $\beta$ , & mener  $Y\beta$ .

Maintenant, parce que  $HX$  est égale à  $XB$ , la ligne  $LF$  aura même raison à l'une & à l'autre; mais comme  $LF$  est à  $HX$ , ainsi (dans le triangle  $LYF$ ) la ligne  $LY$  est à  $YH$ ; & comme  $LF$  est à  $XB$ , ainsi (dans le triangle  $LOF$ ) la ligne  $LO$  est à  $OX$ : Donc  $LY$  est à  $YH$  comme  $LO$  à  $OX$ ; & par conversion de raison  $LY$  est à  $LH$  comme  $LO$  à  $LX$ ; & partant dans le triangle  $LYO$ , la base  $YO$  est parallèle à  $HX$ , c'est-à-dire, à  $LF$ ; & les triangles  $YXO$ ,  $LXF$  sont semblables, aussi-bien que  $Y\zeta O$ ,  $L\zeta F$ : & par conséquent  $YO$  est à  $LF$  comme  $YX$  à  $XF$ , c'est-à-dire,  $YH$  à  $HL$ : &  $YO$  à  $LF$  comme  $Y\zeta$  à  $\zeta L$ : Donc  $YH$  est à  $HL$  comme  $Y\zeta$  est à  $\zeta L$ ; & en permutant  $Y\zeta$  est à  $YH$  comme  $\zeta L$  à  $HL$ : Mais comme  $Y\zeta$  est à  $YH$ , ainsi  $\zeta M$  est

à MF, & comme  $\zeta L$  à LH, ainsi  $\zeta F$  à FB; Donc  $\zeta M$  est à MF comme  $\zeta F$  à FB, & en permutant & par conversion de raison  $\zeta M$  est à MF comme MF à MB. Mais comme  $\zeta M$  est à MF, ainsi  $\zeta Y$  est à FR ou à son égale HY; & comme FM à MB, ainsi FR est à BP, c'est-à-dire, HY à SY; Donc  $\zeta Y$  est à HY comme HY à SY: Et partant HY sera moyenne Géométrique entre les deux  $\zeta Y$  & SY: Mais YT est égale à YH: Donc la route T  $\zeta$  sera divisée Harmoniquement aux deux points H & S, & la ligne  $\zeta S$  sera moyenne Harmonique entre les extrêmes T  $\zeta$  & H  $\zeta$ ; & la ligne  $\zeta Y$  sera moyenne Arithmétique entre les mêmes.

Par le même raisonnement nous démontrerons que AV étant égale à VH, la ligne E  $\varsigma$  aura même raison à l'une & à l'autre; mais E  $\varsigma$  est à HV, dans le triangle EY  $\varsigma$ , comme EY à YV; & E  $\varsigma$  à AV, dans le triangle E  $\varsigma$   $\varsigma$ , comme E  $\varsigma$  à  $\varsigma$  A; EY sera à YV comme E  $\varsigma$  à  $\varsigma$  A; & par conversion de raison E  $\varsigma$  étant à EA comme EY à EV, dans le triangle EY  $\varsigma$ , la base Y  $\varsigma$  sera parallèle à AV, c'est-à-dire, E  $\varsigma$ . Et partant les triangles  $\varsigma$  XY, E  $\varsigma$  sont semblables, aussi-bien que  $\varsigma$  VY, EV  $\varsigma$ . Et par conséquent  $\varsigma$  Y sera à E  $\varsigma$  comme  $\varsigma$  Y à  $\varsigma$   $\varsigma$ ; &  $\varsigma$  Y à E  $\varsigma$  comme YV à VE, c'est-à-dire, comme YH à H  $\varsigma$ : Donc  $\varsigma$  Y sera à  $\varsigma$   $\varsigma$  comme YH à H  $\varsigma$ , & en permutant  $\varsigma$  Y sera à YH, comme  $\varsigma$   $\varsigma$  à H  $\varsigma$ . Or est-il que comme  $\varsigma$  Y est à YH, ainsi  $\varsigma$  N est à NE, & comme  $\varsigma$   $\varsigma$  à H  $\varsigma$ , ainsi  $\varsigma$  E est à EA; Donc  $\varsigma$  N est à NE comme  $\varsigma$  E est à EA: & en permutant, changeant, divisant & changeant  $\varsigma$  N sera à NE comme NE à AN. Mais comme  $\varsigma$  N est à NE, ainsi  $\varsigma$  Y est à YH ou son égale YT, & comme NE est à AN, ainsi HY ou YT est à Y  $\psi$ ; Et partant  $\varsigma$  Y est à TY comme TY est à Y  $\psi$ , & TY est moyenne Géométrique entre les deux  $\varsigma$  Y & Y  $\psi$ . Mais YH est égale à YT; donc la route H  $\varsigma$  est divisée Harmoniquement aux deux points  $\psi$  & T; & la ligne  $\varsigma$   $\psi$  est moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux extrêmes H  $\varsigma$  &  $\varsigma$  T; & la ligne  $\varsigma$  Y sera la moyenne Arithmétique entre les mêmes.

Maintenant, puisque la ligne  $HY$  ou  $TY$  est moyenne proportionnelle Géométrique tant entre les deux  $\zeta Y$  &  $YS$ , qu'entre les deux  $\chi Y$  &  $Y\psi$ , les rectangles  $\zeta YS$  &  $\chi Y\psi$  seront égaux entr'eux, & au carré  $HY$ : & ils auront l'un & l'autre même raison au carré  $Y\epsilon$  ou  $Y\beta$ . Mais le rectangle  $\chi Y\psi$  est au carré  $Y\epsilon$ , ou à son égal le rectangle  $NY\delta$ , en raison composée des lignes  $\chi Y$ ,  $NY$ , c'est-à-dire,  $A\delta$  à  $N\delta$ , & de  $Y\psi$  ou  $A\delta$  à  $Y\delta$ . Donc le carré  $TY$  sera au carré  $Y\epsilon$  en raison composée des lignes  $A\delta$  à  $N\delta$ , &  $A\delta$  à  $Y\delta$ , c'est-à-dire, comme le carré  $A\delta$  au rectangle  $N\delta Y$ : Mais le rectangle  $N\delta Y$  est égal au rectangle  $\epsilon\delta\beta$  (comme nous le démontrerons cy-dessous,) Et partant le carré  $A\delta$  sera au rectangle  $\epsilon\delta\beta$ , comme le carré  $TY$ , c'est-à-dire, le rectangle  $TYH$ , est au carré  $\epsilon Y$ , c'est-à-dire, au rectangle  $\epsilon Y\beta$ . Mais la ligne  $A\delta$  est parallèle au diamètre  $TH$ , & partant ordonnée au diamètre  $\epsilon\beta$ ; Donc le point  $A$  sera dans l'Ellipse, dont  $TH$  &  $\epsilon\beta$  sont diamètres de même conjugaison.

Par le même discours nous dirons que le rectangle  $\zeta YS$  étant au rectangle  $MYP$  en raison composée des lignes  $\zeta Y$  à  $YM$ , c'est-à-dire,  $BP$  à  $PM$ , & de  $SY$  ou  $BP$  à  $YP$ ; Et le rectangle  $MYP$  étant égal au carré  $Y\beta$  (comme nous le démontrerons cy-dessous,) le rectangle  $\zeta YS$ , c'est-à-dire, le carré  $HY$  sera au rectangle  $MYP$ , c'est-à-dire, au carré  $Y\beta$ , en raison composée des lignes  $BP$  à  $PM$ , &  $BP$  à  $YP$ , c'est-à-dire, comme le carré  $BP$  est au rectangle  $MPY$ : Mais le rectangle  $MPY$  est égal au rectangle  $\epsilon P\beta$  (ainsi que nous le démontrerons ci-dessous;) Et par conséquent le carré  $BP$  sera au rectangle  $\epsilon P\beta$  comme le carré  $HY$ , c'est-à-dire, le rectangle  $HYT$  est au carré  $Y\beta$ , c'est-à-dire, au rectangle  $\epsilon Y\beta$ . Mais il a été démontré ci-dessus, que le carré  $A\delta$  étoit au rectangle  $\epsilon\delta\beta$ , comme le même rectangle  $HYT$  est au rectangle  $\epsilon Y\beta$ ; Et partant le carré  $A\delta$  sera au rectangle  $\epsilon\delta\beta$ , comme le carré  $BP$  au rectangle  $\epsilon P\beta$ , Et parce que  $BP$  est  
parallèle

parallele à  $A\delta$ , c'est-à-dire, au diamètre  $TH$ , elle sera ordonnée au diamètre  $\alpha\beta$ ; Et par conséquent le point  $B$  sera aussi dans l'Ellipse, dont les lignes  $TH$  &  $\alpha\beta$  sont diamètres de même conjugaison.

Je dis de plus, que les lignes  $AC$ ,  $BD$  &  $EF$  toucheront la même Ellipse aux points  $A$ ,  $B$  &  $H$ ; ce qui se démontre en cette maniere. D'autant que la ligne  $EH$  est tirée au sommet du diamètre  $TH$  parallele à l'autre diamètre  $\alpha\beta$ , elle touchera l'Ellipse en  $H$  par la 6. du 2. des Coniques d'Apollonius. De plus, la ligne  $A\psi$  étant tirée du point  $A$  dans l'Ellipse, & parallele au diamètre  $\alpha\beta$ , & coupant l'autre diamètre  $TH$  au point  $\psi$ , de telle sorte que la ligne  $\chi\psi$  est moyenne Harmonique entre les deux  $H\chi$  &  $\chi T$ ; la ligne  $AC\chi$  touchera l'Ellipse susdite au point  $A$  par la 34. du 1. des Coniques. Et par la même proposition la ligne  $DB\zeta$  la touchera en  $B$ , d'où la ligne  $BS$  est tirée parallele à  $\alpha\beta$ , & de telle sorte, que  $\zeta S$  est moyenne Harmonique entre les deux  $T\zeta$  &  $\zeta H$ .

Nous avons donc trouvé le point  $Y$  & les deux lignes  $HT$  &  $\alpha\beta$  pour centre, & diamètres de même conjugaison d'une Ellipse, qui touchera les trois lignes  $AC$ ,  $BD$ , &  $EF$ , aux points  $A$ ,  $B$  &  $H$ . Ce qu'il falloit faire.

Il faut maintenant faire voir, ainsi que nous l'avons promis ci-dessus, que les rectangles  $N\delta Y$  &  $\delta\beta$  sont égaux, aussi bien que les rectangles  $MPY$  &  $\beta P$ ; & que le rectangle  $MPY$  est égal au carré  $Y\beta$  ou  $Y\epsilon$ ; ce que je fais premierement pour les rectangles  $N\delta Y$ ,  $\delta\beta$  en cette maniere. D'autant que le rectangle  $NY\delta$  est égal par la construction au carré  $\epsilon Y$ , si l'on ôte de l'un & de l'autre le même carré  $\delta Y$ , le rectangle  $N\delta Y$  restera d'une part, & le rectangle  $\delta\beta$  de l'autre, qui seront par conséquent égaux.

Pour la démonstration du reste, il faut mener la ligne  $VX$ , & la continuer de part & d'autre, jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne  $El$  au point  $9$ , & la ligne  $MN$  prolon-



gée au point 8. Il faut de plus continuer les lignes H B & H A qui rencontrent la même M N prolongée en 7 & 6, & faire I<sup>θ</sup> égale à I F, puis raisonner en cette sorte. D'autant que A V est égal à V H & B X à X H; la ligne A H sera à V H comme B H à X H; & partant V X sera parallèle à A B; & I H sera à H 9, comme B H à H X. Mais B H est double de H X, donc I H sera aussi double de H 9. D'ailleurs E H étant à H F comme E I à I F, en composant, permutant, & changeant E<sup>θ</sup> sera à E F comme I F est à H F. De plus, E H étant à H F comme E I à I F, en permutant & changeant E I sera à E H comme I F à H F; Et partant E I est à E H comme E<sup>θ</sup> à E F, & par conversion de raison E I sera à I H comme E<sup>θ</sup> à F<sup>θ</sup>, & en divisant E H à I H comme E F à I F; Et partant E H à la moitié de I H, c'est-à-dire, H 9, comme E F à la moitié de I F; c'est-à-dire, I F, & en composant E 9 à H 9 comme E I à I F. Mais comme E I est à I F, ainsi E H à H F; Donc E 9 sera à H 9 comme E H est à H F, & en permutant, & par conversion de raison, E 9 sera à H 9 comme H 9 à F 9.

Or parce que dans les triangles semblables E V 9, Y V 8 comme E 9 est à H 9, ainsi Y 8 est à 8 6, & dans les triangles semblables à H X 9, 7 X 8, comme H 9 est à F 9, ainsi 7 8 est à Y 8; il s'ensuit que la ligne 7 8 est à Y 8 comme Y 8 à 8 6, & en la même raison que E 9 à H 9; Mais comme 7 8 est à Y 8, ainsi 7 Y est à Y 6, & comme E 9 à H 9, ainsi E H ou son égale 2 Y est à H F, ou son égale Y R; il s'ensuit donc que 7 Y est à Y 6 comme 2 Y est à Y R, & partant que le rectangle des extrêmes 7 Y R est égal au rectangle des moyennes 6 Y 2.

Maintenant, parce que ζ Y est à H Y comme H Y est à S Y, par conversion de raison ζ Y sera à ζ H comme Y H à H S; Mais comme ζ Y est à ζ H, ainsi M Y est à H F ou à son égale Y R; & comme Y H est à H S, ainsi 7 Y est à B S ou à son égale Y P; Donc M Y sera à Y R comme 7 Y à Y P; & partant le rectangle des extrêmes M Y P est égal au rectangle des moyennes 7 Y R.



## 432      S E C O N D   P R O B L È M E .

pour la solution ; car ou la raison de la ligne  $E I$  à  $I F$  sera la même que celle de  $G F$  à  $F B$ , ou elle sera moindre, ou elle sera plus grande. Au premier Cas ( comme en la 2. Figure ) il faut une Parabole. Au second Cas ( comme en la 3. Figure ) il faut une Ellipse. Au troisième Cas ( comme en la 4. Figure ) il faut une Hyperbole. Et pour les traiter avec ordre.

### *Premier Cas du neuvième Problème.*

*Figure 2. de la  
VII. Planch.*

Soit ( comme en la 1. Figure de la 7. Planche ) la ligne  $E I$  à la ligne  $I F$ , comme la ligne  $G F$  à  $F B$  ; & après avoir coupé  $A B$  en deux également en  $Z$ , & mené  $G Z$ , qui divise  $E F$  en  $P$ , il faut du point  $F$  prendre  $F H$  égale à  $E P$ .

Je dis que la section qui touchera les deux lignes  $A C$ ,  $B D$  aux points  $A$  &  $B$ , & la ligne  $E F$ , sera une Parabole ; & que le point  $H$  sera celui où elle touchera la ligne  $E F$  ; en sorte que si nous coupons la ligne  $G Z$  en deux également en  $O$ , & qu'aux deux lignes  $O Z$  &  $A Z$  nous faisons une troisième proportionnelle Géométrique  $O R$ , que nous menions du point  $O$  parallèle à  $A B$ , la ligne  $O Z$  en sera le diamètre sous l'angle  $G Z A$ , &  $O R$  sera son paramètre ou diamètre contigu. Pour la démonstration, il faut mener les lignes  $E L$ ,  $H K$ , &  $F M$  parallèles à  $G Z$ , puis tirer les lignes  $A H Q$  &  $B H$ , qui rencontrent les lignes  $E L$  &  $M F$  prolongées en  $V$ ,  $X$ , &  $Q$ , & mener  $V X$  &  $F K$ .

D'autant que  $H F$  est égale à  $E P$ , & que  $E L$ ,  $H K$ , &  $F M$  sont parallèles à  $G Z$ , les deux lignes  $L Z$  &  $K M$  seront aussi égales ; & par conséquent les deux  $L K$  &  $Z M$ , aussi-bien que les deux  $E H$  &  $P F$ . Et parce que  $E I$  est à  $I F$ , ainsi que  $G F$  à  $F B$  ; & que comme  $E I$  est à  $I F$ , ainsi ( dans le triangle  $E I L$  )  $E L$  est à  $F M$  ; & que comme  $G F$  à  $F B$ , ainsi ( dans le triangle  $G B Z$  ) la ligne  $Z M$  à  $M B$  : Il s'ensuit que  $E L$  sera à  $F M$ , comme  $Z M$  à  $M B$ . Mais la raison de  $E L$  à  $F M$  est composée des raisons de  $E L$  à  $A L$ , ( c'est-

à-dire,  $GZ$  à  $AZ$ )  $AL$  à  $MB$ , &  $MB$  à  $FM$  (c'est-à-dire,  $BZ$  ou son égale  $AZ$  à  $GZ$ ) : Donc la raison de  $ZM$  à  $MB$  sera aussi égale à la composée des raisons de  $GZ$  à  $AZ$ ,  $AL$  à  $MB$ , &  $AZ$  à  $GZ$  ; c'est-à-dire (parce que les deux raisons de  $GZ$  à  $AZ$ , &  $AZ$  à  $GZ$  se détruisent) égale à la raison de  $AL$  à  $MB$  : Et par conséquent la ligne  $AL$  sera égale à  $ZM$ , c'est-à-dire, à  $LK$  ; mais comme  $AL$  est à  $LK$ , ainsi  $AV$  est à  $VH$  : Donc  $AV$  sera aussi égale à  $VH$ .

Maintenant, puisque  $AL$  est égale à  $LK$ , &  $LZ$  à  $KM$ ,  $AZ$  ou  $BZ$  sera égale à  $LM$  ; & ôtant le commun  $ZM$ , les deux  $ZL$  &  $MB$  seront égales ; mais  $ZL$  est égale à  $KM$  : Donc les deux  $MB$  &  $KM$  seront aussi égales : Et partant dans le triangle  $HBK$  la ligne  $HX$  sera égale à  $XB$ , &  $HS$  à  $SK$  ; & les deux triangles  $HKA$ ,  $QXV$  seront semblables ; &  $HK$  sera à  $AK$ , comme  $QX$  à  $VX$  ; & en permutant  $HK$  sera à  $QX$  comme  $AK$  à  $VX$ , ou à son égale  $LM$ . Ce qu'il faut remarquer.

De plus,  $GF$  étant à  $FB$  comme  $ZM$  à  $MB$ , c'est-à-dire, comme  $LK$  à  $KM$ , ou comme  $EH$  à  $HF$ , &  $EI$  étant à  $IF$  comme  $GF$  à  $FB$ , il s'ensuit que  $EH$  est à  $HF$  comme  $EI$  à  $IF$  : Et partant la ligne  $IH$  est moyenne Harmonique entre les deux  $EI$  &  $IF$ .

Davantage, comme  $GF$  est à  $FB$ , ainsi  $ZM$  à  $MB$ , c'est-à-dire,  $LK$  à  $KM$  ; ou prenant leurs doubles, comme  $AK$  à  $KB$ , il s'ensuit que  $AK$  est à  $KB$ , comme  $GF$  à  $FB$  ; & partant que la ligne  $FK$  est parallèle à  $AE$  ; & par conséquent les triangles  $GPE$ ,  $KHF$  seront semblables, & leurs bases  $PE$ ,  $HF$  étant égales, les côtes  $GP$  &  $HK$  seront égaux, aussi-bien que  $EG$  &  $FK$  ; &  $AE$  sera à  $EG$ , comme à  $KF$ , c'est-à-dire, comme  $EI$  à  $IF$ , ou  $GF$  à  $FB$ , ou  $EH$  à  $HF$ .

Voilà donc trois lignes  $AG$ ,  $BG$ , &  $EF$ , divisées en raisons égales aux points  $E$ ,  $F$ , &  $H$  : elles seront donc par la 41. du 3. des Coniques d'Apollonius, trois contingentes aux points  $A$ ,  $B$ , &  $H$ , d'une même Parabole.

Qq q iij

Or pour faire voir que la Parabole, dont les diamètres sont  $OZ$  &  $OR$ , est celle que ces trois lignes touchent aux trois points susdits, je raisonne en cette sorte. La ligne  $OR$  étant troisième proportionnelle Géométrique aux deux  $OZ$  &  $AZ$ , le rectangle  $ZOR$  sera égal au quarré  $AZ$  ou  $BZ$ ; & partant les deux points  $A$  &  $B$  seront dans la Parabole.

Mais pour montrer que le point  $H$  y est aussi, je fais ainsi. La ligne  $FK$  étant parallèle à  $AE$  dans le triangle  $AI E$ ,  $AI$  sera à  $IK$ , comme  $EI$  à  $IF$ ; c'est-à-dire, dans le triangle  $EIL$ , comme  $LI$  à  $IM$ ; & en divisant & permutant  $AK$  sera à  $LM$ , comme  $KI$  à  $IM$ , c'est-à-dire, ( dans le triangle  $H I K$  ) comme  $KH$  est à  $FM$ . Mais nous avons fait remarquer ci-dessus que  $HK$  étoit à  $QX$ , comme la même  $AK$  à  $LM$ : Donc la ligne  $HK$  aura même raison aux deux lignes  $QX$  &  $FM$ ; & partant elles seront égales: & ôtant  $FX$  commun, les restes  $QF$  &  $XM$ , ou  $VL$ , seront égaux; & par conséquent  $EV$  aura même raison à  $QF$  & à  $VL$ . Mais  $EV$  est à  $QF$ , comme  $EH$  est à  $HF$ , ou  $LK$  à  $KM$ , ou  $AL$  à  $LZ$ : Donc  $EV$  sera à  $VL$ , comme  $AL$  à  $LZ$ ; & en changeant & composant  $VL$  sera à  $EL$ , comme  $LZ$  à  $AZ$ , ou comme le rectangle  $ZLA$  au rectangle  $ZAL$  ( en prenant  $AL$  pour commune hauteur. ) Mais  $EL$  est à  $GZ$ , comme  $AL$  à  $AZ$ , c'est-à-dire, ( en prenant  $AZ$  pour commune hauteur ) comme le rectangle  $ZAL$  au quarré  $AZ$ : Donc par égalité  $VL$  sera à  $GZ$ , comme le rectangle  $ZLA$ , ou son égal  $LKM$ , au quarré  $AZ$  ou  $BZ$ ; & le double de  $VL$ , c'est-à-dire,  $HK$  à  $GZ$ , comme le double du rectangle  $LKM$ , c'est-à-dire,  $LKB$  au quarré  $BZ$ ; &  $HK$  à la moitié de  $GZ$ , c'est-à-dire  $OZ$ , comme le double du rectangle  $LKB$ , c'est-à-dire, le rectangle  $AKB$  au quarré  $BZ$ . Mais  $HK$  est parallèle au diamètre  $OZ$ : Donc le point  $H$  sera dans la Parabole, dont les diamètres sont  $OZ$  &  $OR$ .

Il est notoire que le sommet étant  $O$ , où  $GZ$  est divisée

en deux également, les deux lignes  $AG$  &  $BG$  toucheront la même Parabole en  $A$  &  $B$ . Et pour démontrer qu'elle touchera aussi  $EF$  en  $H$ , je raisonne en cette manière, après avoir tiré la ligne  $HN$  parallèle à  $AB$ , laquelle sera par conséquent ordonnée au diamètre  $OZ$ . Parce que  $FK$  est parallèle à  $AE$ ,  $EI$  est à  $IF$  comme  $AI$  à  $IK$ , & comme  $EH$  à  $HF$ , c'est-à-dire,  $LK$  ou  $ZM$  à  $KM$ ;  $AI$  sera donc à  $IK$  comme  $ZM$  à  $KM$ : & en divisant  $AK$  à  $IK$  comme  $KZ$  à  $KM$ : Et partant le rectangle des moyennes  $IKZ$  sera égal au rectangle des extrêmes  $AKM$ ; & deux fois le rectangle  $IKZ$  égal au rectangle  $AKB$ ; & ajoutant le carré  $ZK$ , deux rectangles  $IKZ$  avec le carré  $ZK$ , (c'est-à-dire, le rectangle  $IKZ$  avec le rectangle  $IZK$ ) égaux au rectangle  $AKB$  avec le carré  $ZK$ , (c'est-à-dire, au carré  $BZ$ ;) Et partant le rectangle  $IKZ$  sera égal au carré  $BZ$ , moins le rectangle  $IZK$ ; & le rectangle  $IZK$  aura même raison au rectangle  $IKZ$  qu'au carré  $BZ$ , moins le rectangle  $IZK$ . Mais le rectangle  $IZK$  est au rectangle  $IKZ$  comme  $IZ$  à  $IK$ , c'est-à-dire, comme  $PZ$  à  $HK$ : Donc le rectangle  $IZK$  sera au carré  $BZ$ , moins le rectangle  $IZK$ , comme  $PZ$  est à  $HK$ . Mais il a été démontré ci-dessus, que  $PG$  étoit égale à  $HK$ ; donc  $PZ$  sera à  $PG$  comme le rectangle  $IZK$  est au carré  $BZ$ , moins le rectangle  $IZK$ ; & en changeant & composant  $GZ$  sera à  $PZ$ , comme le carré  $BZ$  au rectangle  $IZK$ . Mais  $PZ$  est à  $PN$ , comme  $IZ$  à  $HN$  ou  $ZK$ , c'est-à-dire, comme le rectangle  $IZK$  au carré  $KZ$ , ou  $HN$ : Donc par égalité  $GZ$  sera à  $PN$ , comme le carré  $BZ$  est au carré  $NH$ . Mais parce que  $NH$  est parallèle à  $AB$ , & ordonnée à  $GZ$ , le carré  $BZ$  est au carré  $NH$  comme la ligne  $ZO$  à  $ON$ ; il s'ensuit que  $GZ$  sera à  $PN$  comme  $ZO$  à  $ON$ ; & en permutant  $GZ$  à  $ZO$ , comme  $PN$  à  $NO$ ; mais  $GZ$  est double de  $OZ$ : donc  $PN$  sera aussi double de  $NO$ ; & par conséquent la ligne  $EF$  touchera la Parabole susdite au point  $H$ . Ce qu'il falloit démontrer.

*Second cas du neuvième Problème.*

Fig. II, de la VI.  
Planche.

Si les pieds droits A C & B D étans en surplomb, se rencontrent de la part de A & B au point G, (comme en la 2. Fig. de la 6. Planche,) & que la ligne E F, qui détermine la hauteur de l'arc à décrire étant prolongée, rencontre aussi la ligne de la rampe A B, comme en I, en telle sorte que la raison de la ligne E I à I F soit moindre que celle de la ligne G F à F B.

Après avoir divisé la ligne A B en deux également en Z, & mené indéfiniment la ligne G Z, il faut trouver I H moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux E I & I F; & après avoir mené les lignes H B & H A, il en faut diviser l'une comme H B en deux également en X, & mener F X, qui rencontrera G Z continuée de la part de Z, comme en Y, ainsi qu'il se verra ci-dessous, d'où il faut mener la ligne E Y.

Je dis que la section qui touchera les deux lignes A C & B D en A & B, & la ligne E F, sera une Ellipse, dont Y sera le centre, & le point H celui où elle touchera la ligne E F. Et que si l'on mène indéfiniment la ligne H Y sur laquelle on prenne Y T égale à Y H, & qu'après avoir tiré la ligne N Y M par le point Y parallèle à E F, sur laquelle des points A & B tombent les lignes A  $\delta$  & B P parallèles à H Y, l'on prenne Y moyenne proportionnelle Géométrique entre les deux N Y & Y  $\delta$ , & que l'on fasse Y  $\epsilon$  égale à Y  $\epsilon$ ; les deux droites H T, &  $\epsilon$  seront les diamètres de même conjugaison de la susdite Ellipse.

Pour la démonstration, il faut premièrement mener des points E, H, & F sur la ligne A B, les lignes E  $\mu$ , H  $\phi$  & F  $\eta$  parallèles à G Z, & raisonner en cette manière. La ligne E  $\mu$  est à F  $\eta$  en raison composée des raisons de E  $\mu$  à A  $\mu$ , (c'est-à-dire, G Z à A Z) A  $\mu$  à B  $\eta$ , & B  $\eta$  à F  $\eta$  (c'est-à-dire, B Z ou A Z à G Z :) Mais les raisons de G Z à A Z, & A Z à G Z se détruisent, & par conséquent E  $\mu$  sera à

F  $\eta$ ,

$F\eta$ , comme  $A\mu$  a  $B\eta$ . De plus, parce que la ligne  $HI$  est moyenne Harmonique entre les deux  $EI$  &  $IF$ , comme  $EI$  est a  $IF$ , ainsi  $EH$  est a  $HF$ , c'est-a-dire,  $\mu\phi$  a  $\phi\eta$ , & comme  $EI$  a  $IF$ ; ainsi  $E\mu$  a  $F\eta$ , c'est-a-dire,  $A\mu$  a  $B\eta$ ; donc  $\mu\phi$  est a  $\phi\eta$ , comme  $A\mu$  a  $B\eta$ ; & en composant  $A\phi$  a  $\phi B$ , comme  $A\mu$  a  $B\eta$ , c'est-a-dire, comme  $EI$  a  $IF$ . Mais la raison de  $EI$  a  $IF$  est par l'hypothese moindre que celle de  $GF$  a  $FB$ , c'est-a-dire,  $Z\eta$  a  $B\eta$ : Donc la raison de  $A\phi$  a  $\phi B$  sera moindre que celle de  $Z\eta$  a  $B\eta$ , & en composant & permutant la raison  $AB$  a  $ZB$  moindre que celle de  $\phi B$  a  $B\eta$ ; mais  $AB$  est double de  $ZB$ : Donc  $\phi B$  sera plus grande que le double de  $B\eta$ , & partant  $\phi\eta$  plus grande que  $B\eta$ ; & dans le triangle  $H\phi B$ , la ligne  $H\tau$  sera plus grande que  $B\tau$ ; mais  $BX$  est égale a  $HX$ : donc la ligne  $BX$  sera plus grande que la même  $B\tau$ , & l'angle  $BFX$  plus grand que l'angle  $BF\tau$ , c'est-a-dire,  $BGZ$ ; Et partant la ligne  $FX$  étant continuée, rencontrera la ligne  $GZ$  continuée de la part de  $Z$  comme au point  $Y$ .

Maintenant, après avoir mené par le point  $Y$  la ligne  $KYQ$  parallèle a  $AB$ , & tiré du même point les deux lignes  $Y\upsilon$  &  $Y\lambda$  perpendiculaires aux deux  $BD$ ,  $AC$ , je dis que la ligne  $KQ$  étant parallèle a  $AB$ , elle sera divisée en  $Y$  comme  $AB$  l'est en  $Z$ , c'est-a-dire, en deux également; Et partant les deux triangles  $G Y K$ ,  $G Y Q$  seront égaux, & par conséquent ils auront leurs côtes en raison réciproque de leurs hauteurs, c'est-a-dire, que le côté  $KG$  du triangle  $G K Y$  sera au côté  $QG$  du triangle  $G Q Y$ , comme la ligne  $Y\upsilon$  hauteur du triangle  $G Q Y$  a la ligne  $Y\lambda$  hauteur du triangle  $G K Y$ : Mais comme  $KG$  est a  $QG$ , ainsi  $AG$  est a  $BG$ : Donc  $AG$  sera a  $BG$  comme  $Y\upsilon$  a  $Y\lambda$ .

De plus, après avoir mené les deux lignes  $AY$  &  $BY$ , d'autant que les deux triangles  $AYE$ ,  $BYF$  sont entr'eux en raison composée de leurs côtes & de leurs hauteurs, la raison du triangle  $AYE$  au triangle  $BYF$  sera compo-



sée des raisons des lignes  $AE$  à  $BF$ , &  $Y\lambda$  à  $Y\nu$ , c'est-à-dire,  $BG$  à  $AG$ . Mais la raison de  $AE$  à  $BF$  est encore composée de celle des lignes  $AE$  à  $E\mu$  (c'est-à-dire,  $AG$  à  $GZ$ )  $E\mu$  à  $F\eta$ , &  $F\eta$  à  $BF$ , (c'est-à-dire,  $GZ$  à  $GB$ ;) la raison donc du triangle  $AYE$  au triangle  $BYF$  sera composée des raisons de  $AG$  à  $GZ$ ,  $E\mu$  à  $F\eta$ ,  $GZ$  à  $GB$ , &  $GB$  à  $AG$ ; mais les raisons de  $AG$  à  $GZ$ ,  $GZ$  à  $GB$ , &  $GB$  à  $AG$  se détruisent. Il ne reste donc plus que la raison de  $E\mu$  à  $F\eta$  qui soit égale à celle du triangle  $AYE$  au triangle  $BYF$ . Mais comme  $E\mu$  est à  $F\eta$ , ainsi  $E\lambda$  à  $IF$ , ou  $EH$  à  $HF$ , ou le triangle  $EYH$  au triangle  $FYH$ : Donc le triangle  $AYE$  sera au triangle  $BYF$ , comme le triangle  $EYH$  à  $HYF$ ; & en permutant, le triangle  $AYE$  au triangle  $EYH$ , comme le triangle  $BYF$  au triangle  $HYF$ . Mais les deux triangles  $AYE$ ,  $EYH$  ayant une base commune  $EY$ , sont entr'eux comme les lignes  $AV$  &  $VH$ ; & les deux triangles  $BYF$ ,  $HYF$  ayant une base commune  $FY$ , sont aussi comme  $BX$  à  $XH$ ; il s'ensuit que  $AV$  est à  $VH$  comme  $BX$  à  $XH$ . Mais  $BX$  est égale à  $XH$  par la construction: Donc  $AV$  sera aussi égale à  $VH$ .

Voilà donc trois lignes  $AB$ ,  $AH$ , &  $BH$  qui sont divisées également en deux aux points  $Z$ ,  $V$ , &  $X$ , par les lignes  $GZ$ ,  $EV$ , &  $FX$ , qui partent des points  $G$ ,  $E$ , &  $F$ , où les lignes  $AC$ ,  $BD$ , &  $EF$  se rencontrent, & qui se joignent toutes en un même point  $Y$ , au-dessous du point  $G$  vers  $Z$ . Et partant ce point  $Y$  sera le centre d'une Ellipse, qui touchera les trois lignes susdites  $AC$ ,  $BD$ , &  $EF$ , aux points  $A$ ,  $B$ , &  $H$ .

Il faut maintenant faire voir que les deux lignes  $HYT$ , &  $Y\zeta$  en sont les diamètres de même conjugaison. Et pour cet effet, il faut continuer la ligne  $HYT$  de part & d'autre, jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne  $AC$  prolongée en  $\chi$ , &  $BD$  en  $\zeta$ ; puis du point  $E$  mener la ligne  $E\varsigma$  parallèle à  $AH$ , & qui coupe la ligne  $HY$  prolongée en  $\varsigma$ , d'où par le point  $V$  il en faut mener une autre  $\varsigma V\eta$  qui coupe

la ligne A C en 3 , & joindre les points Y & 3. Semblablement du point F il faut mener F L parallele à B H , & qui coupe la même Y H prolongée en L , d'où par le point X il faut tirer une ligne L X O , qui rencontre B D prolongée en O , & joindre les points Y & O , & enfin tirer les lignes A  $\downarrow$  & B S paralleles à E F , & continuer M N de part & d'autre, afin qu'elle coupe les lignes H B , H A prolongées aux points 7 & 6 , & tirer la ligne V X indéfiniment de part & d'autre , afin qu'elle coupe E I au point 9 & M N au point 8.

Cela fait , je raisonne en cette maniere. D'autant que L F est parallele à B H , & B X est égale à H X , la ligne L F sera à H X , c'est-à-dire , L Y à Y H , comme la même L F à B X , c'est-à-dire , comme L O à O X ; & par conversion de raison L Y sera à L H comme L O à L X ; & partant dans le triangle L Y O , la base O Y sera parallele à la ligne H X ou L F : Donc au triangle Y  $\zeta$  O , la ligne Y O sera à L F comme  $\zeta$  Y à  $\zeta$  L ; & aux triangles semblables Y X O , L X F , la même Y O sera à la même L F comme Y X à X F , ou comme Y H à H L : Et partant  $\zeta$  Y sera à  $\zeta$  L comme Y H à H L ; & en permutant ,  $\zeta$  Y à H Y comme  $\zeta$  L à H L , Mais  $\zeta$  Y est à H Y comme  $\zeta$  M à M F , &  $\zeta$  L à H L comme  $\zeta$  F à F B : Donc  $\zeta$  M est à M F comme  $\zeta$  F à F B ; & en permutant , & par conversion de raison  $\zeta$  M est à M F comme M F à M B. Mais comme  $\zeta$  M est à M F , ainsi  $\zeta$  Y est à H Y , & M F est à M B , ainsi H Y à Y S : Donc  $\zeta$  Y est à H Y comme H Y à Y S , c'est-à-dire , que H Y est moyenne Géometrique entre les deux  $\zeta$  Y & Y S : Mais la ligne Y T est égale à Y H par la construction ; & partant la toute  $\zeta$  T est divisée Harmoniquement aux points H & S , & la ligne  $\zeta$  S est moyenne Harmonique entre les deux  $\zeta$  T  $\zeta$  H , & la ligne  $\zeta$  Y moyenne Arithmétique entre les mêmes.

Par même raisonnement , & par le moyen de la ligne E  $\downarrow$  nous démontrerons que la ligne H Y est aussi moyenne Géometrique entre les deux  $\propto$  Y & Y  $\downarrow$  : & que la toute

$T\chi$  est aussi divisée Harmoniquement aux points  $H$  &  $\psi$ , en sorte que la ligne  $\chi\psi$  est moyenne Harmonique entre les deux  $T\chi$  &  $H\chi$ , & la ligne  $\chi Y$  moyenne Arithmétique entre les mêmes.

D'où il appert que les rectangles  $\chi Y\psi$  &  $\psi YS$  étant chacun égal au carré  $HY$ , ils seront aussi égaux entre eux, & ils auront l'un & l'autre même raison au carré  $\epsilon Y$ , ou son égal  $Y\epsilon$ . Mais la raison du rectangle  $\chi Y\psi$  au carré  $\epsilon Y$ , ou son égal  $NY\delta$ , est composée des raisons des lignes  $\chi Y$  à  $NY$  (c'est-à-dire,  $A\delta$  à  $N\delta$ ) & de  $Y\psi$ , ou son égale  $A\delta$  à  $Y\delta$ , lesquelles font ensemble la raison du carré  $A\delta$  au rectangle  $N\delta Y$ : Donc le rectangle  $\chi Y\psi$ , ou le carré  $HY$  sera au carré  $\epsilon Y$ , comme le carré  $A\delta$  au rectangle  $N\delta Y$ : Or est-il que le rectangle  $N\delta Y$  est égal au rectangle  $\epsilon\delta\epsilon$ , comme il a été tant de fois démontré ci-dessus: Et partant le carré  $A\delta$  sera au rectangle  $\epsilon\delta\epsilon$ , comme le carré  $HY$  au carré  $\epsilon Y$ , ou prenant leurs quadruples, comme le carré du diamètre  $HT$  au carré du diamètre  $\epsilon\epsilon$ . Mais la ligne  $A\delta$  étant parallèle au diamètre  $HY$ , est ordonnée à l'autre diamètre  $\epsilon\epsilon$ : Donc le point  $A$  sera dans l'Ellipse, dont les deux lignes  $HT$ , &  $\epsilon\beta$  sont les diamètres de même conjugaison.

Il est notoire que le point  $H$  étant au bout d'un desdits diamètres, il est aussi dans la même Ellipse. Mais pour prouver que le point  $B$  s'y trouve pareillement, il faut discourir en cette manière. Le rectangle  $\zeta YS$  est au rectangle  $MYP$  en raison composée des raisons de  $\zeta Y$  à  $YM$ , c'est-à-dire,  $BP$  à  $PM$ , & de  $YS$ , ou son égale  $BP$  à  $YP$ , lesquelles composent la raison du carré  $BP$  au rectangle  $MPY$ : Et partant le rectangle  $\zeta YS$ , ou son égal le carré  $HY$  sera au rectangle  $MYP$ , ou son égal le carré  $Y\epsilon$ , ou  $Y\epsilon$  (comme nous le démontrerons ci-dessous) comme le carré  $BP$  est au rectangle  $MPY$ , ou a son égal  $\epsilon P\epsilon$ , (comme nous le démontrerons aussi ci-dessous,) c'est-à-dire, que le carré  $BP$  sera au rectangle  $\epsilon P\epsilon$  comme le

quarré  $HY$  au quarré  $Y\epsilon$ ; ou prenant leurs quadruples, comme le quarré  $TH$  au quarré  $\epsilon\epsilon$ : Mais  $PB$  étant parallèle au diamètre  $TH$ , est ordonnée a l'autre diamètre  $\epsilon\epsilon$ : Et partant le point  $B$  est dans l'Ellipse, dont les lignes  $HT$  &  $\epsilon\epsilon$  sont diamètres de même conjugaison.

Je dis de plus, que cette Ellipse touchera les lignes  $AC$ ,  $BD$ , &  $EF$  aux mêmes points  $A$ ,  $B$ , &  $H$ : ce qui est premierement constant par la 6. du 2. des Coniques au regard de la ligne  $EF$ , qui est menée au bout  $H$  du diamètre  $TH$  parallèle a l'autre diamètre  $\epsilon\epsilon$ . Mais pour les deux autres, il faut raisonner en cette sorte. D'autant que la ligne  $BS$  est parallèle a  $\epsilon\epsilon$ , elle sera ordonnée a  $TH$ ; mais elle divise la ligne  $T\zeta$  de telle sorte en  $S$ , que la ligne  $\zeta S$  soit moyenne Harmonique entre les deux  $\zeta T$  &  $\zeta H$ . Il s'en suit par la 34. du 1. des Coniques, que la ligne  $BD$  touchera en  $B$  la susdite Ellipse.

De plus, par la même proposition, il appert que la ligne  $AC$  la touche en  $A$ , parce que l'ordonnée  $A\psi$  coupe  $T\chi$  en  $\psi$ , de telle sorte que  $\chi\psi$  soit moyenne Harmonique entre les deux  $\chi T$  &  $\chi H$ .

Nous avons donc trouvé le point  $Y$  pour centre, & les deux lignes  $HT$  &  $\epsilon\epsilon$  pour diamètres de même conjugaison d'une Ellipse, laquelle touche les trois lignes  $AC$ ,  $BD$ , &  $EF$  aux points  $A$ ,  $B$ , &  $H$ . Ce qu'il falloit faire.

Il ne reste plus qu'à démontrer (comme nous l'avons promis) que le rectangle  $MYP$  est égal au quarré  $Y\epsilon$  ou  $Y\epsilon$ ; c'est-a dire, au rectangle  $NY\delta$ , & le rectangle  $MPY$  égal au rectangle  $\epsilon P\epsilon$ ; ce qui se fait en cette maniere, après avoir fait  $I\theta$  égale a  $IF$ . Puisque  $AV$  est égale a  $VH$ , comme  $BX$  égale a  $XH$ ; la ligne  $VX$  sera parallèle a  $AB$ , &  $H\theta$  égale a  $I\theta$ . Et puisque  $EH$  est a  $HF$  comme  $EF$  a  $IF$ , en composant, & permutant,  $E\theta$  sera a  $EF$  comme  $IF$  a  $HF$ . Mais comme  $IF$  a  $HF$ , ainsi  $EI$  a  $EH$ : Donc  $E\theta$  sera a  $EF$ , comme  $EI$  a  $EH$ ; & en divisant, prenant la moitié des antécédens, composant, & par conversion

de raison, EI sera à IF, c'est à-dire, EH à HF comme E 9 & à H 9; & en permutant, changeant, & par conversion de raison E 9 sera à H 9 comme H 9 à F 9.

Or dans les triangles semblables H X 9 & 7 X 8, comme H 9 est à F 9, ainsi 7 8 est à Y 8: Et dans les triangles semblables E V 9, Y V 8, comme E 9 est à H 9, ainsi Y 8 est à 6 8: Donc 7 8 sera à Y 8 comme Y 8 à 8 6, & en la même raison de E 9 à H 9. Mais comme E 9 à H 9, ainsi EH à HF, c'est-à-dire, 2 Y à Y R; & comme 7 8 à Y 8, ainsi 7 Y à Y 6: Donc 7 Y est à Y 6 comme 2 Y est à Y R; & le rectangle des extrêmes 7 Y R est égal au rectangle des moyennes 6 Y 2.

De plus, parce que 2 Y est à H Y comme H Y à S Y, par conversion de raison ζ Y sera à ζ H comme H Y à H S: Mais comme ζ Y est à ζ H, ainsi M Y est à H F, ou Y R; & comme H Y à H S, ainsi 7 Y est à B S ou Y P: Donc M Y sera à Y R comme 7 Y à Y P; & le rectangle des moyennes 7 Y R est égal à celui des extrêmes M Y P.

Par le même raisonnement nous ferons voir que le rectangle 6 Y 2 est égal au rectangle N Y 2. Et partant le rectangle 7 Y R est au rectangle M Y P comme 6 Y 2 à N Y 2; & en permutant 7 Y R étant égal à 6 Y 2, le rectangle M Y P sera aussi égal au rectangle N Y 2, c'est-à-dire, par la construction, au carré 2 Y ou β Y. Et partant si de l'un & de l'autre on ôte le commun carré Y P, le rectangle M P Y demeurera égal au rectangle 2 P 6. Qui est ce qu'il falloit démontrer.

Le cercle pourroit résoudre ce cas de ce Problème, ainsi que nous avons dit ci-dessus du 8<sup>e</sup>, si les deux lignes A G & B G se trouvant égales aussi-bien que les trois A Y, B Y, & H Y; ces trois lignes se trouvoient encore perpendiculaires aux trois A C, B D, & E F, chacune à la sienne.

*Troisième Cas du neuvième Problème.*

**Enfin, si les pieds droits A C & B D étant en surplomb,**

se rencontrent, étant prolongez de la part de A & B, au point G (comme en la 2. Figure de la 7. Planche) & que la ligne EF, qui détermine la hauteur de l'Arc à décrire, rencontre aussi la ligne de la rampe AB, comme en I, de telle sorte que la raison de la ligne EI à IF soit plus grande que celle de FG à FB. Après avoir divisé la ligne AB en deux également en Z, & mené la ligne GZ indéfiniment de la part de G; il faut trouver IH moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux EI & IF; & après avoir mené les lignes HB, HA, il en faut diviser l'une, comme HB, en deux également en X, & mener FX indéfiniment de la part de F, qui rencontrera GZ au-dessus du point G comme en Y (ainsi qu'il se verra ci-dessous) d'où il faut mener YE V.

Fig. II. de la  
VII. Planche.

Je dis que la section qui touchera les deux lignes AC & BD aux points A & B, & la ligne EF; sera une Hyperbole, dont le centre sera au point Y; & le point H celui où elle touchera la ligne EF; & que si l'on mène indéfiniment la ligne HY, sur laquelle on prenne YT égale à YH, & qu'après avoir tiré par le point Y la ligne MN parallèle à EF, sur laquelle des points A & B tombent les lignes Aδ & BP parallèles à HY; l'on prenne δY moyenne proportionnelle Géométrique entre les deux NY & Yδ, & que l'on fasse Yε égale à δY: les deux droites HT & εC seront les diamètres de même conjugaison de la susdite Hyperbole.

La démonstration s'en fait en la même manière, & presque aux mêmes termes que celle de la précédente proposition pour l'Ellipse; & pour ce sujet, il faut premièrement mener des points E, H, & F sur la ligne AB les lignes Eμ, Hφ, & Fη parallèles à GZ, & argumenter en cette sorte. La ligne Eμ est à Fη en raison composée de celles de Eμ à Aμ, (ou GZ à AZ,) Aμ à Bη, & Bη à Fη, (ou BZ, ou AZ à GZ.) Mais la raison de GZ à AZ détruit celle de AZ à GZ; & partant la raison de Eμ à Fη sera égale à celle

de  $A\mu$  à  $B\eta$ . De plus, parce que  $I H$  est moyenne Harmonique entre les deux  $E I$  &  $I F$ ; la ligne  $E H$  sera à  $H F$ , ou  $\mu\phi$  à  $\phi\eta$ , comme  $E I$  à  $I F$ , ou  $E\mu$  à  $F\eta$ , ou  $A\mu$  à  $B\eta$ : Donc  $A\mu$  sera à  $B\eta$  comme  $\mu\phi$  à  $\phi\eta$ ; & la toute  $A\phi$  à la toute  $\phi B$  comme la partie  $\mu\phi$  à la partie  $\phi\eta$ , c'est-à-dire, comme  $E I$  à  $I F$ . Mais la raison de  $E I$  à  $I F$  est par l'hypothèse plus grande que celle de  $G F$  à  $F B$ , ou  $Z\eta$  à  $B\eta$ : Donc la raison de  $A\phi$  à  $B\phi$  sera plus grande que celle de  $Z\eta$  à  $B\eta$ ; & en composant & permutant, celle de  $A B$  à  $Z B$  plus grande que celle de  $\phi B$  à  $B\eta$ . Mais  $A B$  est double de  $Z B$ : Donc  $\phi B$  sera moindre que double de  $B\eta$ ; c'est-à-dire, que  $\phi\eta$  sera moindre que  $\eta B$ ; & dans le triangle  $H\phi B$ ,  $H\tau$  sera moindre que  $\tau B$ ; & partant  $\tau B$  plus grande que  $B X$ , & l'angle  $B F \tau$ , ou  $B G Z$  plus grand que l'angle  $B F X$ , ou  $G F Y$ : Et partant la ligne  $X F$  rencontrera la ligne  $Z G$  continuée au-dessus de  $G$ , comme au point  $Y$ .

Maintenant, après avoir mené par le point  $Y$  la ligne  $K Y Q$  parallèle à  $A B$ , & tiré du même point les deux lignes  $Y\upsilon$  &  $Y\lambda$  perpendiculaires aux deux lignes  $A C G$ , &  $B D G$  prolongées; je dis que la ligne  $K Q$  étant parallèle à  $A B$ , elle sera divisée en  $Y$  en la même raison que  $A B$  l'est en  $Z$ , c'est-à-dire, en deux également: Et partant les triangles  $G Y K$ ,  $G Y Q$  seront égaux; & ils auront par conséquent les côtes réciproques de leurs hauteurs, c'est-à-dire, que le côté  $G K$  du triangle  $G K Y$  sera au côté  $G Q$  du triangle  $G Q Y$ , comme  $Y\upsilon$  hauteur de  $G Q Y$  à  $Y\lambda$  hauteur de  $G K Y$ ; mais comme  $K G$  est à  $G Q$ , ainsi  $A G$  est à  $G B$ : Donc  $A G$  est à  $G B$  comme  $Y\upsilon$  est à  $Y\lambda$ .

De plus, après avoir mené les deux lignes  $A Y$  &  $B Y$ ; d'autant que les deux triangles  $A Y E$ ,  $B Y F$  sont entr'eux en raison composée de celles de leurs côtes, & de leurs hauteurs; le triangle  $A Y E$  sera à  $B Y F$  en raison composée du côté  $A E$  au côté  $B F$ , & de la hauteur  $Y\lambda$  à la hauteur  $Y\upsilon$ , c'est-à-dire, de la ligne  $B G$  à  $A G$ . Mais la raison de  $A E$  à  $B F$  est encore composée de celles de  $A E$  à  $E\mu$ ,

(ou

(ou  $AG$  à  $GZ$ ,)  $E\mu$  à  $F\eta$ , &  $F\eta$  à  $FB$ , (ou  $GZ$  à  $GB$ ;) Donc la raison du triangle  $AEY$  au triangle  $BFY$  sera composée de celles de  $AG$  à  $GZ$ ,  $E\mu$  à  $F\eta$ ,  $GZ$  à  $GB$ , &  $GB$  à  $AG$ . Mais les raisons de  $AG$  à  $GZ$ ,  $GZ$  à  $GB$ , &  $GB$  à  $AG$  se détruisent: Donc le triangle  $AEY$  sera à  $BFY$  comme la ligne  $E\mu$  est à  $F\eta$ , ou comme  $E\iota$  à  $IF$ , ou  $EH$  à  $HF$ , ou enfin comme le triangle  $EYH$  au triangle  $FYH$ ; & en permutant le triangle  $AEY$  sera au triangle  $HEY$  comme le triangle  $BFY$  au triangle  $FYH$ . Mais parce que les deux triangles  $AVY$ ,  $VHY$  sont entr'eux comme  $AV$  est à  $VH$ , aussi-bien que les deux triangles  $AEV$ ,  $EVH$ , les restes, sçavoir les triangles  $AEY$ ,  $EHY$  seront aussi entr'eux comme  $AV$  est à  $VH$ . Par même raison nous montrerons que le triangle  $BFY$  est au triangle  $FHY$  comme  $BX$  est à  $XH$ : Donc  $AV$  sera à  $VH$  comme  $BX$  est à  $XH$ ; mais celles-ci sont égales par la construction, & partant  $AV$  sera aussi égale à  $VH$ .

Voilà donc trois lignes  $AB$ ,  $AH$ , &  $BH$ , qui sont divisées en deux également aux points  $Z$ ,  $V$ , &  $X$  par les lignes  $GZ$ ,  $EV$ ,  $FX$ , qui partant des points  $G$ ,  $E$ , &  $F$ , où les lignes  $AC$ ,  $BD$ , &  $EF$  se rencontrent, se joignent toutes au-dessus de  $G$  en un même point  $Y$ : Donc le point  $Y$  sera le centre d'une Hyperbole qui touchera les susdites trois lignes  $AC$ ,  $BD$ , &  $EF$  aux points  $A$ ,  $B$ , &  $H$ .

Il faut maintenant faire voir que les deux lignes  $HT$  &  $\epsilon\epsilon$  en sont les diamètres de même conjugaison. Et pour ce sujet il faut continuer la ligne  $YH$ , qui rencontrera  $AC$  prolongée au point  $\chi$ , &  $BD$  en  $\zeta$ ; puis du point  $F$  mener  $FL$  parallèle à  $BH$ , & qui coupe  $YH$  en  $L$ , par où du point  $X$  il faut mener la ligne  $XL$ , & la continuer jusqu'à ce qu'elle coupe  $BG$  prolongée en  $O$ , & joindre les points  $Y$  &  $O$ . En la même manière du point  $E$  il faut mener  $E\varsigma$  parallèle à  $AH$ , qui rencontre  $YH$  en  $\varsigma$ , par où du point  $V$  il faut tirer la ligne  $V\varsigma$ , & la continuer jusqu'à ce qu'elle rencontre  $AG$  continuée au point  $3$ , & joindre  $Y$  &  $3$ ; &



enfin mener  $A\psi$ , &  $BS$  parallèles à  $EF$  ou  $MN$ , & continuer  $MN$  de part & d'autre jusqu'à ce qu'elle coupe les lignes  $AH$ ,  $BH$  prolongées aux points 6 & 7, & tirer la ligne  $VX$ , en sorte qu'elle coupe  $EI$  au point 9, &  $MN$  au point 8.

Cela fait, je raisonne en cette maniere. Parce que  $HX$  est égale à  $BX$ , la ligne  $LF$  aura même raison à l'une & l'autre; c'est-à-dire, qu'au triangle  $HYX$ , la ligne  $LF$  sera à  $HX$  comme  $LY$  à  $YH$ ; & au triangle  $XOB$ ,  $LF$  sera à  $BX$  comme  $LO$  à  $OX$ ; & partant  $LY$  sera à  $YH$  comme  $LO$  à  $OX$ ; & en divisant & permutant,  $LY$  à  $LO$  comme  $LH$  à  $LX$ : Donc les triangles  $OLY$ ,  $HLX$  seront semblables, & la base  $OY$  parallèle à  $HX$  ou  $LF$ . Et par conséquent aux triangles semblables  $OZY$ ,  $LZF$ , la ligne  $OY$  est à  $LF$  comme  $YZ$  à  $ZL$ ; & dans les triangles semblables  $OXY$ ,  $LXF$ , la même  $OY$  est à la même  $LF$  comme  $OX$  à  $XL$ ; & partant  $ZY$  est à  $ZL$  comme  $OX$  à  $XL$ , c'est-à-dire, comme  $YH$  à  $HL$ ; & en permutant,  $ZY$  est à  $YH$  comme  $ZL$  à  $HL$ ; Mais comme  $ZY$  à  $YH$ , ainsi  $ZM$  à  $MF$ , & comme  $ZL$  à  $HL$ , ainsi  $ZF$  à  $FB$ : Donc  $ZM$  est à  $MF$ , comme  $ZF$  à  $FB$ ; & en permutant, changeant, composant, & changeant  $ZM$  sera à  $MF$ , (c'est-à-dire,  $ZY$  à  $YH$ ,) comme  $MF$  à  $MB$ , c'est-à-dire,  $YH$  à  $YS$ . Voilà donc la ligne  $YH$  moyenne Géométrique entre les deux  $ZY$  &  $YS$ ; mais la ligne  $YT$  a été prise égale à la même  $YH$ : Donc la toute  $TS$  sera divisée Harmoniquement aux points  $H$  &  $Z$ ; & la ligne  $ZS$  sera moyenne Harmonique entre les deux  $TS$  &  $SH$ ; &  $SY$  moyenne Arithmétique entre les mêmes.

Par même raisonnement, & par le moyen de la ligne  $E\chi$  nous démontrerons que la même  $YH$  sera aussi moyenne Géométrique entre les deux  $\chi Y$  &  $\psi Y$ , & que la toute  $T\psi$  est divisée Harmoniquement aux deux points  $H$  &  $\chi$ , & la ligne  $\psi\chi$  moyenne Harmonique entre les deux  $T\psi$  &  $\psi H$ ; &  $\psi Y$  moyenne Arithmétique entre les mêmes.

D'où il appert que les rectangles  $\chi Y \psi$  &  $\zeta Y S$  étant chacun égal au quarré  $HY$ , ils seront aussi égaux entre eux ; & le quarré  $HY$  sera au quarré  $\epsilon Y$ , ou à son égal le rectangle  $NY \delta$ , comme le rectangle  $\chi Y \psi$  au même rectangle  $NY \delta$ . Mais la raison du rectangle  $\chi Y \psi$  au rectangle  $NY \delta$  est composée de celles des lignes  $\chi Y$  à  $NY$ , c'est-à-dire,  $\chi \psi$  à  $A \psi$ , &  $\psi Y$  à  $Y \delta$ , ou à son égale  $A \psi$ , qui composent la raison du rectangle  $\chi Y \psi$  au quarré  $A \psi$  : Donc le quarré  $YH$  sera au quarré  $\epsilon Y$ , ou (prenant leurs quadruples,) le quarré du diamètre  $TH$  sera au quarré du diamètre  $\epsilon \beta$ , comme le rectangle  $\chi \psi Y$  au quarré  $A \psi$ . Mais le rectangle  $\chi \psi Y$  est égal au rectangle  $T \psi H$  (comme nous le démontrerons ci-dessous.) Et partant le rectangle  $T \psi H$  est au quarré  $A \psi$ , comme le quarré  $TH$  au quarré  $\epsilon \beta$ . Et comme la ligne  $A \psi$  est parallèle à  $MN$  ou  $\epsilon \beta$ , elle est ordonnée au diamètre  $TH$  : Et partant le point  $A$  est dans l'Hyperbole dont  $TH$  &  $\epsilon \beta$  sont diamètres de même conjugaison.

Il est constant que le point  $H$  étant au bout d'un des diamètres susdits, il est aussi dans la même Hyperbole. Mais pour prouver que le point  $B$  s'y trouve aussi, il faut discourir de cette sorte. Le rectangle  $\zeta Y S$  est au rectangle  $MY P$ , en raison composée de celles des lignes  $\zeta Y$  à  $MY$ , (ou  $\zeta S$  à  $BS$ ,) &  $YS$  à  $YP$ , ou  $BS$ , lesquelles composent aussi la raison du rectangle  $\zeta SY$  au quarré  $BS$  : Et partant le rectangle  $\zeta Y S$ , ou son égal le quarré  $YH$  sera au rectangle  $MY P$ , ou son égal le quarré  $\epsilon Y$  (comme nous le démontrerons ci-dessous,) comme le rectangle  $\zeta SY$  au quarré  $BS$ . Mais nous ferons aussi voir ci-dessous, que le rectangle  $\zeta SY$  est égal au rectangle  $TS H$ , Et partant comme le quarré  $YH$  au quarré  $\epsilon Y$ , ou (prenant leurs quadruples) comme le quarré du diamètre  $TH$  au quarré du diamètre  $\epsilon \beta$ , ainsi est le rectangle  $TS H$  au quarré  $BS$  : mais la même  $BS$  étant parallèle à  $\epsilon \beta$ , est ordonnée à  $TH$  : Donc le point  $B$  est aussi dans l'Hyperbole, dont les deux

Sff ij

droites  $TH$  &  $\epsilon\beta$  sont diamètres de même conjugaison.

Je dis de plus, que cette Hyperbole touchera les lignes  $AC$ ,  $BD$ , &  $EF$  aux points  $A$ ,  $B$ , &  $H$ . Ce qui est premièrement constant pour le point  $H$ , par la 6. du 2. des Coniques, la ligne  $EF$  étant menée au bout d'un des diamètres  $HT$ , & parallèle à l'autre  $\epsilon\beta$ . Mais pour les deux autres points, je le démontre en cette manière.

D'autant que la ligne  $A\psi$  ordonnée au diamètre  $TH$ , le coupe en  $\psi$  de telle sorte que  $\chi\psi$  soit moyenne Harmonique entre les deux  $T\psi$  &  $H\psi$ ; la ligne  $AC$   $\chi$  touchera la susdite Hyperbole au point  $A$  par la 34. du 1. des Coniques d'Apollonius. Et par la même proposition, & le même raisonnement, la ligne  $BD$   $\zeta$  touchera la même Hyperbole au point  $B$ , d'où la ligne  $BS$  est ordonnée au diamètre  $TH$ , & le coupe au point  $S$ , en telle sorte que la ligne  $\zeta S$  soit moyenne Harmonique entre les deux  $TS$  &  $SH$ .

Nous avons donc trouvé le point  $Y$  pour centre, & les deux lignes  $TH$ , &  $\epsilon\beta$  pour diamètres de même conjugaison d'une Hyperbole, qui touchera les trois lignes  $AC$ ,  $BD$ , &  $EF$  aux points  $A$ ,  $B$ , &  $H$ . Ce qu'il falloit faire.

Il faut maintenant démontrer que le rectangle  $\chi\psi Y$  est égal au rectangle  $T\psi H$ , ce qui se fait ainsi. Parce que  $\psi Y$  est à  $YH$ , ou  $TY$ , comme  $TY$  à  $Y\chi$ ; en composant, & par conversion de raison  $T\psi$  sera à  $\psi Y$  comme  $\chi T$  à  $TY$ , ou  $HY$ ; & en permutant, & par conversion de raison  $T\psi$  sera à  $\psi\chi$  comme  $\psi Y$  à  $\psi H$ : Et partant le rectangle des moyennes  $\chi\psi Y$  sera égal à celui des extrêmes  $T\psi H$ .

Par même raisonnement, on peut voir que le rectangle  $\zeta SY$  est aussi égal au rectangle  $TS H$ . De sorte qu'il ne reste plus qu'à montrer, que le rectangle  $MY P$  est égal au carré  $Y\beta$ , ou  $\epsilon Y$ , c'est-à-dire, au rectangle  $NY \delta$ . Ce qui se fait en cette manière. Parce qu'il a été démontré ci-dessus dans la précédente proposition, que la ligne  $E\theta$  étoit à  $H\theta$  comme  $H\theta$  est à  $F\theta$ ; & que dans les triangles semblables  $HX\theta$ ,  $7X8$ , la ligne  $H\theta$  est à  $F\theta$  comme  $78$

est à 8 Y ; & dans les triangles semblables E V 9 , Y V 8 , la ligne E 9 est à H 9 comme 8 Y est à 86 : Il s'ensuit que 78 est à 8 Y comme 8 Y est à 86 , & en la même raison de E 9 à H 9 , c'est-à-dire, de E H à H F , ou de 2 Y à Y R . Mais comme 78 est à 8 Y , ainsi 7 Y à Y 6 : Donc 7 Y sera à Y 6 comme 2 Y à Y R ; & le rectangle des extrêmes 7 Y R sera égal à celui des moyennes 6 Y 2 .

Maintenant , comme 2 Y est à H Y , ainsi H Y à Y S ; en divisant 2 Y sera à 2 H comme H Y à H S . Mais comme 2 Y à 2 H , ainsi M Y à F H , ou son égale Y R ; & comme H Y à H S , ainsi 7 Y à B S , ou son égale Y P : Donc M Y sera à Y R comme 7 Y à Y P ; & le rectangle des moyennes 7 Y R sera égal à celui des extrêmes M Y P .

Par même discours on fera voir que le rectangle 6 Y 2 sera égal au rectangle N Y 2 . Et partant le rectangle 7 Y R est à M Y P comme 6 Y 2 à N Y 2 , & en permutant comme le rectangle 7 Y R est égal au rectangle 6 Y 2 , ainsi M Y P sera égal à N Y 2 , ou au quarré 2 Y , ou 2 Y . Ce qu'il falloit démontrer.

### TROISIÈME OBSERVATION.

DAns les neuf Problèmes ci-dessus , la difficulté de la préparation dont nous avons parlé au commencement de ces Discours est comprise , & de ce qu'il faut faire avant que l'on puisse se servir du Problème de Pappus ; c'est-à-dire , de trouver les diamètres de même conjugaison de la section qui doit toucher les lignes des pieds droits aux points donnez.

Mais parce que , sans parler de la ligne qui détermine la hauteur , on pourroit proposer un Arc à décrire , qui passant par un point donné , toucheroit deux pieds droits en deux autres points aussi donnez ; & qu'en ce cas les Ouvriers se pourroient trouver embarrassés , qui ne sçau-

roient pas que l'on pût facilement, par ce point donné ; mener cette ligne que nous avons supposé dans les propositions ci-dessus, pour déterminer la hauteur de l'Arc à décrire, & avec cet avantage, que ce sera en ce même point que se fera l'atrouchement de l'Arc & de la ligne susdite.

Il m'a semblé à propos de le faire voir, & d'en donner les pratiques dans ce Discours, par une proposition universelle en cette sorte.

## P R O B L E M E.

*Ayant à décrire un Arc rampant par un point donné, & entre deux pieds droits, qu'il touche en deux autres points aussi donnez. Trouver la ligne droite, qui détermine la hauteur de l'Arc ; c'est-à-dire, la ligne qui doit toucher l'Arc au susdit premier point donné.*

Planches VIII,  
IX. & X.

Les deux pieds droits ( dans les Figures de la 8. 9. & 10. Planche ) soient A C, & B D, paralleles, ou non paralleles, & le point donné H, par lequel il faut décrire un Arc rampant, qui touche A C en A, & B D en B. Qu'il faille trouver la ligne E H F, qui détermine la hauteur de cet Arc, en sorte qu'il la touche au même point H.

Après avoir tiré la ligne de la rampe A B, & continué les pieds droits A C & B D, en sorte qu'ils se rencontrent au point G, s'ils ne sont point paralleles ; il faut de l'un des points A ou B, par le point H, tirer une droite comme B H, & alors.

## P R E M I E R E P R O P O S I T I O N.

Fig. I. II. de la  
VIII. Planche

Si les pieds droits sont paralleles ( comme aux Figures 1. & 2. de la 8. Planche ) la ligne B H rencontrera l'autre pied droit A C prolongé au point K ; auquel cas il faut diviser la ligne A K en deux également en E, & mener par le point H la droite E H F, qui sera celle que l'on cher-

che ; parce que , ou elle sera parallèle à la rampe  $AB$  , ( comme en la 1. Figure ) ou elle la rencontrera , étant prolongée comme en I , ( en la 2. Figure. )

*Premier Cas.*

Puisque dans le triangle  $AKB$  ( Figure 1. de la 8. Planche ) la ligne  $EH$  a été menée parallèle à la base  $AB$  , le côté  $AK$  sera à  $KE$  comme  $AB$  est à  $EH$  ; Mais  $AK$  a été faite double de  $KE$  , & partant la ligne  $AB$  , ou son égale  $EF$  , sera aussi double de la même  $EH$  ; & la section , qui passant sur le point  $H$  , touchera les deux lignes droites  $AC$  , &  $BD$  aux points  $A$  &  $B$  ; touchera aussi la ligne  $EF$  au même point  $H$  ; & ceci tombe dans la solution du 4. Problème ci-dessus.

Figure I. de la  
VIII. Planche.

*Second Cas.*

C'est-à-dire , lorsque la ligne  $EF$  ( Figure 2. de la 8. Planche ) rencontre la ligne  $AB$  prolongée en  $I$  ; parce que les deux lignes  $AE$  , &  $EK$  sont égales , elles auront même raison à la ligne  $BF$  ; qui leur étant parallèle , il s'en suivra qu'aux triangles  $EKH$  ,  $BHF$  , la ligne  $EK$  sera à  $BF$  , c'est-à-dire ,  $EH$  à  $HF$  , comme dans le triangle  $AEI$  , la ligne  $AE$  à la même  $BF$  , c'est-à-dire ,  $EI$  à  $IF$  : Et partant la ligne  $EI$  se trouvera coupée Harmoniquement aux deux points  $H$  &  $F$  , & la ligne  $IH$  sera la moyenne Harmonique entre les deux extrêmes  $EI$  &  $IF$  : Et par conséquent la section , qui passant par le point  $H$  , touchera les pieds droits  $AC$  en  $A$  , &  $BD$  en  $B$  , touchera aussi la ligne  $EF$  au même point  $H$  : Et ceci tombe dans la solution du 5. Problème.

Figure II. de la  
VIII. Planche.

*SECONDE PROPOSITION.*

Si les pieds droits étant en talu , se rencontrent en  $G$  au-dessous de la rampe  $AB$  ( Figures 3. & 4. de la 8. Planche ; ) & la ligne tirée du point  $B$  par  $H$  est parallèle à l'au-

Figure III. & IV.  
de la VIII. Plan-  
che.

tre pied droit  $AC$  ; il ne faut que prendre sur  $GA$  prolongée une ligne  $AE$  égale à  $AG$ , & mener la ligne  $EHF$ , qui sera parallèle à la rampe  $AB$  ( comme en la 3. Figure,) ou bien elle la rencontrera, comme en  $I$ , ( en la 4. Figure.)

*Premier Cas.*

*Figure III. de  
La VIII. Planche.*

Au premier Cas ( Figure 3. de la 8. Planche, ) parce que dans le triangle  $EGF$ , la ligne  $AB$  est supposée parallèle à la base  $EF$  ; la ligne  $GA$  sera à  $AE$  comme  $GB$  à  $BF$  ; Et parce que dans le même triangle  $EGF$ , la ligne  $BH$  est parallèle à la base  $EG$  ; la ligne  $GB$  sera à  $BF$  comme  $EH$  est à  $HF$  ; Et partant, par égalité, la ligne  $GA$  sera à  $AE$  comme  $EH$  à  $HF$  ; mais  $GA$  est égale à  $AE$  : Donc  $EF$  sera divisée en deux également en  $H$  ; Et comme elle est parallèle à la rampe  $AB$ , la section, qui passant par le point  $H$ , touchera les pieds droits  $AC$  en  $A$ , &  $BD$  en  $B$ , touchera aussi la même  $EF$  en  $H$ . Et ceci tombe dans la solution du 6. Problème.

*Second Cas.*

*Fig. IV. de la  
VIII. Planche.*

Au second Cas, c'est-à-dire, lorsque la ligne  $EF$  étant prolongée, rencontre la rampe  $AB$ , comme en  $I$  ; ( Figure 4. de la 8. Planche, ) il faut discourir en cette manière, après avoir mené par le point  $E$  la ligne  $OEP$  parallèle au côté  $BD$ , & qui rencontre la rampe en  $O$ , & la ligne  $BH$  prolongée en  $P$ . Parce que les triangles  $AEO$ ,  $AGB$  sont semblables, à cause des parallèles  $EO$ , &  $BG$ , & des angles au sommet  $A$  ; ils seront aussi égaux, à cause de l'égalité des côtes  $AE$ , &  $AG$  ; & partant les autres côtes  $EO$ , &  $BG$  seront aussi égaux : Mais  $BG$  est égale à  $EP$ , étant parallèles, & entre parallèles : Donc  $EO$  sera égal à  $EP$  ; &  $EO$  sera à  $BF$ , ( c'est-à-dire, dans le triangle  $EIO$ , la ligne  $EI$  à  $IF$ , ) comme  $EP$  à la même  $BF$ , c'est-à-dire, dans les triangles semblables  $EPH$ ,  $BHF$ , comme la ligne  $EH$  à  $HF$  : Et partant la ligne  $EI$  sera divisée Harmoniquement

Harmoniquement aux deux points H & F, & la ligne I H sera moyenne Harmonique entre les deux extrêmes E I & I F: Et par conséquent la section, qui passant par le point H, touchera les pieds droits A C en A, & B D en B, touchera aussi la même E F au point H. Et ceci tombe dans la solution du 8. Problème.

### TROISIEME PROPOSITION.

Si les pieds droits étant en talu & se rencontrant en G Fig. 1. & II. de la IX. Planche. au-dessous de la rampe A B, la ligne tirée du point B par le point donné H, coupe le côté A C prolongé en K, ( Figures 1. & 2. de la 9. Planche, ) il faut premièrement couper la ligne A K en deux également au point L, par lequel il faut mener L M parallèle à B K & égale à A L ou L K; & du point G par M tirer la droite G M jusqu'en N, où elle rencontrera la ligne B K prolongée; puis faire K E égale à K N, & du point E par H mener la ligne E H F, & raisonner en cette manière. Comme au triangle K G N, la ligne L M est parallèle à la base K N, la même L M sera à K N: c'est-à-dire, A L à K E, comme G L à G K; & prenant les doubles des antécédens, A K sera à K E comme A G & G K ensemble à G K; & en divisant A E sera à K E comme A G à G K; & en permutant, & changeant G K sera à K E comme A G à A E; & la toute G K sera divisée Harmoniquement aux deux points E & A, en sorte que la ligne A K soit la moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux extrêmes G K & K E.

Maintenant, ou la ligne tirée du point E par H, sera parallèle à la rampe A B, ( comme en la 5. Figure, ) où elle la rencontrera comme en I, ( en la 6. Figure. )

#### Premier Cas.

Au premier Cas ( Figure 1. de la 9. Planche: ) Après avoir mené par le point E la ligne O P parallèle au pied droit B D, & rencontrant la rampe en O, & la ligne B H Fig. 1. de la IX. Planche.

Rec. de l'Ac. Tom. V.

T r r



prolongée en P, je dis que la ligne EP dans le triangle GKB, ayant été tirée parallèle à la base GB, le côté GK sera à KE comme GB à EP; & dans les deux triangles semblables GAB, EAO, la ligne GA sera à AE comme la même GB est à EO. Mais parce que GK est à KE comme GA est à AE; il s'ensuit que GB sera à PE comme la même GB est à EO; & que les deux lignes EP & EO ou BF seront égales; & que dans les triangles semblables EHP, BHF, les deux côtes EH & HF seront égaux; & la ligne EF sera divisée en deux également en H; & comme elle est parallèle à la rampe AB, la section qui passant par le point H, touchera les deux pieds droits AC & BD en A & B, touchera aussi la ligne EF en H. Et ceci tombe dans la solution du 6. Probl.

*Second Cas.*

*Fig. II. de la IX.  
Planche.*

Au second Cas (Figure 2. de la 9. Planche; c'est-à-dire, lorsque la ligne EF rencontre la ligne AB prolongée comme en I: Après avoir comme dessus mené la ligne OEP parallèle au pied droit BD, & coupant les lignes AB en O, & BH en P; je dis que dans le triangle GKB, la ligne EP ayant été menée parallèle à la base GB; la ligne GK sera à KE comme GB à EP; mais celle-ci est composée des raisons de GB à BF, & de BF à EP, c'est-à-dire, FH à HE: il s'ensuit que la raison de GK à KE sera égale aux raisons de GB à BF, & de FH à HE. De plus, les triangles GAB, EAO étant semblables, aussi bien que BIF, OIE; la ligne GA sera à AE, comme GB est à EO, c'est-à-dire, en raison composée de GB à BF, & de BF, EO, c'est-à-dire, FI à EI. Mais il a été démontré que la raison de GK à KE étoit égale à celle de GA à AE: Donc la raison composée de GB à BF, & de FH à HE, sera égale à celle de la même GB à BF, & de FI à IE: ôtant donc la raison commune de GB à BF, la raison de FI à IE sera égale à celle de FH à HE; & la ligne IF

sera divisée Harmoniquement aux deux points E & H, & la ligne IH sera la moyenne Harmonique entre les deux extrêmes IF & IE : Et par conséquent la section, qui passant par le point H touchera les deux pieds droits AC en A & BD en B, touchera aussi la ligne EF en H. Et ceci tombe dans la solution du 8. Problème.

#### QUATRIEME PROPOSITION.

Si les pieds droits, étant en surplomb, se rencontrent au-dessus de la rampe au point G (comme aux Figures 1. 2. & 3. de la 10. Planche;) il faudra du point B par H mener indéfiniment une droite BH, qui coupe l'autre pied droit AC en K; & après avoir divisé la ligne AK en deux également en L, & mené LM parallèle à BH, & égale à AL; il faut joindre les deux points GM par une droite, qui coupe la même BH prolongée en N, & faire KE égale à KN; & par le point E tirer OP parallèle à BD, & rencontrant les lignes AB & BH en O & P. Ensuite nous dirons que LM étant parallèle à KN, LG est à GK comme LM est à KN, c'est-à-dire, AL à KE; & prenant les doubles des antécédens AG & GK ensemble seront à GK comme AK à KE; & en divisant AG à GK comme AE à EK; & en permutant AG est à AE comme GK à EK; Et partant la ligne AG est divisée Harmoniquement aux deux points E & K, & la ligne AK est moyenne Harmonique entre les deux extrêmes AG & AE. Maintenant, si l'on tire du point E par H une droite EF, elle sera parallèle à la rampe AB, (comme en la 1. Figure,) où elle la rencontrera comme en I, aux 2. & 3. Figures.

Fig. 1. II. III. de la X. Planche.

#### Premier Cas.

Au premier Cas (Figure 1. de la 10. Planche:) Parce qu'aux triangles semblables GAB, EAO, la ligne GA est à AE comme GB est à EO; & aux triangles semblables GKB, EKP, la ligne GK est à KE comme la même GB

Figure 1. de la X. Planche.

T t. ij . . .

est à EP, la raison de GA à AE étant égale à celle de GK à KE; il s'ensuit que la raison de GB à EO sera aussi égale à celle de GB à EP, & que la ligne EO, ou son égale FB sera égale à la ligne EP; & qu'aux triangles semblables EHP, FHB, les deux lignes EH & HF sont égales, & la ligne EF divisée en deux également en H; & comme elle est parallèle à la rampe AB, la section qui passant par le point H, touchera les deux pieds droits AC en A & BD en B, touchera aussi la ligne EF en H. Et ceci tombe dans la solution du 7. Probl.

*Second Cas.*

*Fig. II. & III.  
de la X. Planche.*

Au second Cas, c'est-à-dire, lorsque la ligne EF coupe la rampe AB en I, soit de la part de A (comme en la 2. Figure,) ou de la part de B (comme en la 3. Figure de la 10. Planche;) je dis que la raison de GA à AE étant la même que celle de GB à EO; & celle-ci étant composée des raisons de GB à BF & de BF à EO, c'est-à-dire, de IF à IE; la raison de GA à AE sera composée des raisons de GB à BF, & IF à IE. De même la raison de GK à KE étant la même que celle de GB à EP, & celle-ci étant égale aux deux raisons de GB à BF & BF à EP, c'est-à-dire, FH à HE; la raison de GK à KE sera composée des raisons de GB à BF & de FH à HE: mais GA est à AE comme GK à KE; Et partant la composée de GB à BF & IF à IE, sera égale à la composée de GB à BF, & FH à HE; & ôtant la raison commune de GB à BF, les deux autres IF à IE, & FH à HE seront égales, & la ligne FI (dans la 2. Figure) sera divisée Harmoniquement aux points E & H; & la ligne EI (dans la 3. Figure) aux points F & H: Et en l'une & en l'autre la ligne IH sera moyenne Harmonique entre les deux extrêmes EI & IF. Et partant la section, qui passant par le point H, touchera les deux pieds droits AC en A, & BD en B, touchera aussi la droite EH au point H. Et ceci tombe dans la solution du 9. Probl.

Voilà donc la résolution de tous les Cas qui peuvent être considerez sur cette matiere ; où il paroît qu'il faut que le point donné se trouve entre les lignes des pieds droits, si l'on veut rendre la question possible ; parce que l'Arc, qui partant des points A & B de la rampe, passeroit par un point posé hors les lignes A C, & B D prolongées, couperoit nécessairement celsdites lignes, & par conséquent il ne les pourroit pas toucher aux points A & B.

Et de cette façon j'estime qu'il est pleinement satisfait à tout ce qui peut être proposé sur la préparation nécessaire à la règle de Pappus, c'est-à-dire, à la recherche des diamètres de même conjugaison d'un Arc à décrire, qui touche deux pieds droits en deux points donnez, soit que la hauteur de l'Arc ne soit pas donnée, ou qu'elle soit déterminée par un point, ou par une ligne, ou par un plan.

#### QUATRIEME OBSERVATION.

**M**Ais parce que l'austérité de la démonstration nous a obligé à quantité de lignes inutiles pour la pratique, & qui peuvent embarrasser les Ouvriers, qui ne sont pas accoutumés à les démêler ; il m'a semblé que je ferois une chose qui leur seroit agréable, si je leur enseignois une Méthode universelle & facile de trouver ces diamètres en toute sorte de Cas. Ce qui se fait ainsi.

*Maniere universelle de trouver les diamètres de même conjugaison de la Section qui doit former l'Arc rampant sur toute sorte de pieds droits & de hauteurs.*

Soient (aux Figures de la Planche 1. r. & aux 2. premieres de la 12. Planche) les pieds droits A C & B D continuez indéfiniment, en sorte qu'ils se rencontrent en G, s'ils ne sont point paralleles ; & la ligne de la rampe A B soit divisée en deux également en Z ; & du point Z soit

*Planche XI. &  
Fig. 1. & II. de  
la XII. Planche.*

menée une droite, ou parallèle aux pieds droits, ( si ceux-ci le sont entr'eux, ) ou passant par le point de leur rencontre G : Ensuite soit la ligne donnée ou non donnée EF qui détermine la hauteur de l'Arc proposé, laquelle soit ou parallèle à la ligne de la rampe AB, ou la rencontrant au point I ; & cette ligne EF, comprise entre les lignes AC & BD continuées, soit coupée en deux également en K, d'où il faut mener une ligne KM égale à KF, & qui fasse quelque angle que ce soit avec EF ; & mener IM, à laquelle du point F, il faut tirer une parallèle FL, & faire KH égale à KL ; puis du point H il faut mener la ligne HB, & la diviser en deux également en S, par où du point F il faut tirer la ligne FSY ; laquelle sera ou parallèle à la ligne GZ, ou elle la rencontrera au point Y dans l'angle AGB, ou dans celui qui lui est au sommet. Au premier Cas la section sera une Parabole en la 1. Figure de la 12. Planche. Au second Cas une Ellipse, aux 5. Figures de la Planche 11. & une Hyperbole au troisième Cas dans la 2. Figure Planche 12. Et joignant aux deux derniers Cas la ligne HY ; & la continuant en sorte que YT soit égale à YH, & menant par le point Y la ligne VYX parallèle à EF, sur laquelle du point B tombe la ligne BN parallèle à HY ; il faut faire YQ égale à YN, & sur la ligne QYX comme diamètre, décrire le demi-cercle XRQ, qui soit coupé en R par la ligne YR tirée du point Y perpendiculaire à VX ; & enfin faire les deux lignes YO, & YP égales à YR ; Les diamètres de même conjugaison de l'Ellipse, ou de l'Hyperbole que l'on demande, seront les deux lignes HT & OP.

Et pour la Parabole, il faut du point B mener BN parallèle à EF, ( comme en la 1. Figure de la 12. Planche ) & HV parallèle à GZ, qui coupe BN en N ; sur laquelle il faut prendre HV égale à BN, & du point V mener VX parallèle à EF, & rencontrant la ligne HB prolongée en X ; & enfin prendre sur EF continuée la ligne HT égale à

V X. La ligne  $HN$  sera le diamètre de la Parabole, auquel  $BN$  sera ordonnée sous l'angle  $HN B$ , & la ligne  $HT$  en sera le Paramètre.

### TROISIEME DISCOURS.

*Trouver les Axes d'une Section servant à la description d'un Arc rampant, dont les diamètres de même conjugaison sont donnez.*

#### PREMIERE OBSERVATION.

*Premier moyen par la Regle de Pappus.*

Ces chose étant supposées, il ne reste plus qu'à trouver les Axes & les foyers pour décrire facilement la Section proposée, c'est-à-dire, appliquer aux diamètres trouvez de l'Ellipse, la Regle de Pappus, dont nous avons parlé au commencement de ces Discours, & dont nous rapporterons premierement la pratique qui se doit entendre pour toute sorte de Cas, & nous la démontrerons ensuite. Le Problème est donc tel.

#### R E G L E D E P A P P U S.

*Deux diamètres de même conjugaison d'une Ellipse étant donnez, en trouver les Axes & les foyers ou singliots.*

Les deux diamètres de même conjugaison  $HT$  &  $OP$  étant Planche XII. proposez (aux Figures de la 13. Planche) & par le point  $H$ , la ligne  $E H F$  indéfiniment prolongée, & parallèle à  $OP$ ; il faut sur  $HT$  au point  $A$  élever à angles droits la ligne  $HI$  égale à  $OY$ ; & mener  $IY$ ; sur laquelle au point  $I$  il faut tirer à angles droits la ligne  $IK$ , qui rencontre la ligne  $TH$  prolongée en  $K$ . Ensuite, après avoir divisé en deux également au point  $R$  la ligne  $YK$ , & mené à angles droits la ligne  $RS$ ,

qui coupera  $EF$  en quelque part comme en  $S$  (parce que les diamètres  $HT$ , &  $OP$  n'étant pas les Axes, l'angle  $HYP$ , ou son égal  $EHY$  ne sera pas droit;) il faut du point  $S$  comme centre, & de l'intervalle  $SY$  ou  $SK$ , décrire le cercle  $K\delta YC$ , lequel coupe la ligne  $EF$  aux deux points  $\delta$  &  $C$ ; d'où par le point  $Y$ , il faut mener les deux lignes indéfinies  $\beta Y$  &  $\delta Y$ ; sur lesquelles du point  $H$ , il faut mener à angles droits les lignes  $HL$ , &  $HM$ . Ensuite il faut faire sur la ligne  $\beta Y$  prolongée la ligne  $NY$  égale à  $YL$ ; & sur la ligne  $\beta N$  comme diamètre, décrire un demi-cercle  $NQ\beta$  qui coupe  $\delta Y$  au point  $Q$ , & rapporter la ligne  $YQ$  de part & d'autre du point  $Y$  sur  $\beta Y$ , en sorte que les lignes  $YV$ , &  $YX$  soient égales à  $YQ$ ; & par ce moyen nous aurons la toute  $VX$  pour l'un des Axes. En la même manière prenant sur  $\delta Y$  prolongée la ligne  $Y\lambda$  égale à  $YM$ , & sur la toute  $\delta\lambda$  comme diamètre décrivant le demi-cercle  $\delta\lambda\zeta$  qui coupe  $\beta Y$  prolongée au point  $\lambda$ ; il faut de part & d'autre du point  $Y$ , sur la ligne  $\delta Y$  prendre les deux  $YG$  &  $YZ$  égales à  $Y\lambda$ , afin d'avoir la toute  $GZ$  pour l'autre Axe. Et prenant une extrémité du moindre Axe comme le point  $G$  pour centre, & de l'intervalle  $G\delta$  égal à la moitié de l'autre Axe, c'est-à-dire à  $YV$ ; il faut décrire les deux Arcs de cercle qui coupent la ligne  $\beta Y$ , c'est-à-dire, le plus grand Axe aux deux points  $\delta$  &  $C$ , lesquels seront les foyers de la susdite Ellipse, que les Ouvriers appellent les singliers.

Voilà la pratique de Pappus, qui est la 14. proposition du 8. livre de ses Collections Mathématiques: Et quoique je ne la rapporte pas tout-à-fait dans les mêmes termes, c'est pourtant toujours la même chose; & ce que j'y ai ajouté n'est que pour en faciliter l'exécution aux Ouvriers: comme lors qu'il dit seulement qu'il faut faire le rectangle  $YHK$  égal au quarré  $OY$ , parce que, la manière d'appliquer un quarré à une ligne droite, qui est la même que de trouver une troisième proportionnelle à deux droites données, n'est pas familière aux Ouvriers; j'ai mieux aimé leur en marquer l'opération par le moyen du triangle

gle rectangle  $YIK$ , ( dans lequel la ligne  $IH$  étant perpendiculaire à la base  $YK$ , le carré  $HI$ , ou son égal  $OY$  est égal au rectangle  $YHK$ , ainsi que Pappus l'ordonne, ) que de la supposer comme lui toute faite. Tout de même, quand il dit qu'il faut faire les deux carrés  $YV$ , &  $YX$  égaux au rectangle  $CYL$ , & les deux carrés  $YG$  &  $YZ$  égaux au rectangle  $MY$ ; j'en ai fait les opérations toutes entières par le moyen des demi-cercles  $NQ$  &  $ΔΖ$

Au reste, ce Problème n'a que cette seule construction, & Commandin qui a commenté cet Auteur, s'étonne avec raison qu'il ne l'ait pas démontrée. Mais comme il y a dans le texte de la Proposition quelques obscuritez qui marquent qu'il a été corrompu, je crois que la démonstration que Pappus en avoit faite s'est perdue avec le reste de ses Ouvrages qui nous manquent.

Mais ce qui me surprend d'avantage, c'est que Commandin ayant entrepris de la réparer, y ait si mal réussi lui-même, n'ayant pas pu conclure, comme il fait, que les lignes  $XV$  &  $GZ$  soient Axes de l'Ellipse, parce que l'angle  $βYΔ$  est droit, aussi bien que les angles au point  $L$ , mais bien seulement que au cas que la ligne  $XV$  soit l'Axis, la ligne  $HL$  lui sera ordonnée; puis que quelque point de la ligne  $EF$  que l'on prenne pour centre d'un cercle qui passe par  $Y$ , & coupe  $EF$  en deux autres points que  $β$  &  $Δ$ , d'où l'on mène deux lignes au même point  $Y$ ; l'angle de ces lignes sera toujours droit au fufdit point  $Y$ , & l'on pourra tirer du point  $H$  une ligne qui fasse aussi angle droit avec celle qui viendra d'un autre point que  $Δ$  au point  $Y$ ; & cependant cette ligne ne sera pas l'Axis de l'Ellipse. Et je m'étonne que Commandin ne se soit pas apperçu que toute la force de la construction de Pappus dépend de ce que le rectangle  $YHK$ , c'est-à-dire,  $ΔHβ$ , est égal au carré  $OY$ , & qu'il n'ait pas scû la vérité de ce Théorème que je démontre en cette manière.



## T H E O R E M E.

*Si deux diamètres de même conjugaison étant donnés dans une Ellipse, l'on tire de l'extrémité de l'un d'eux une Contingente qui rencontre les deux Axes: le rectangle des parties de la Contingente entre les Axes, & le point de l'atouchement, est égal au quart du quarré de l'autre diamètre.*

Fig. III, de la  
XII, Planché,

Soient dans l'Ellipse  $V G X Z$ , dont les Axes sont  $V X$  &  $G Z$  (dans la 3. Figure de la 12. Planche) deux diamètres de même conjugaison  $H T$  &  $O P$ ; & de l'extrémité d'un d'eux, comme de  $H$  soit tirée la touchante  $\delta H \epsilon$ , (qui sera par conséquent parallèle à  $O P$ ) laquelle coupe les Axes, sçavoir  $V X$  au point  $\epsilon$ , &  $G Z$  au point  $\delta$ ; je dis que le rectangle  $\beta H \delta$  est égal au quarré  $O Y$ .

Pour le démontrer, il faut premièrement au point  $O$  mener une autre Contingente  $\xi O \pi$ , ( qui sera aussi parallèle à  $H T$ , ) & qui coupe les Axes  $V X$  en  $\pi$ , &  $G Z$  en  $\xi$ ; puis au point  $V$  en mener une autre  $\phi V \zeta$ , ( laquelle sera aussi parallèle à l'Axe  $G Z$ , ) & qui coupe la Contingente  $\delta H$  en  $\phi$ , &  $O P$  prolongée en  $\zeta$  en fin des points  $H$  &  $O$  mener  $H M$  &  $H L$ ,  $O \mu$  &  $O \nu$  ordonnées aux Axes  $V X$  &  $G Z$ , & continuer  $H L$  en  $\nu$ .

Maintenant, à cause de la touchante  $\delta H \epsilon$ , le rectangle  $\epsilon Y L$  est égal au quarré  $V Y$ ; & à cause de la touchante  $\xi O \pi$ , le rectangle  $\pi Y \mu$  est aussi égal au même quarré  $V Y$ ; les deux rectangles donc  $\epsilon Y L$ , &  $\pi Y \mu$  sont égaux. Et partant la ligne  $\epsilon Y$  est à  $\pi Y$  comme  $Y \mu$  à  $Y L$ . De plus, comme les lignes  $\delta \epsilon$ ,  $O Y$  sont parallèles, aussi-bien que les lignes  $\pi \xi$  &  $H Y$ ; les triangles  $\epsilon H Y$ ,  $Y O \pi$  sont semblables, aussi-bien que les triangles  $\epsilon H L$ ,  $Y O \mu$ ; & partant dans les deux premiers  $\epsilon Y$  sera à  $\pi Y$  comme  $H \epsilon$  à  $O Y$ ; & dans les deux derniers  $H \epsilon$  sera à  $O Y$  comme  $H L$  à  $O \mu$ ; & par conséquent  $\epsilon Y$  sera à  $\pi Y$  comme  $H L$  à  $O \mu$ . Mais nous avons démontré cy-dessus que  $\epsilon Y$  étoit à  $\pi Y$  comme

$Y\mu$  à  $YL$ , c'est-à-dire, dans les triangles  $OY\mu$ , &  $YL$ ,  
 comme  $O\mu$  à  $L$  : Donc  $HL$  sera à  $O\mu$ , comme  $O\mu$  est à  
 $L$  : & partant le rectangle  $HL$  sera égal au carré  $O\mu$  ; &  
 par conséquent le carré  $YL$  aura même raison au rectan-  
 gle  $HL$ , qu'au carré  $O\mu$ . Mais la raison du carré  $YL$   
 au rectangle  $HL$  est composée de celles de  $YL$  à  $HL$ , ou  
 à son égale  $YM$ , & de  $YL$  à  $L$ , c'est-à-dire, à cause que  
 les triangles  $YL$ , &  $Y\delta$  sont semblables, de  $Y$  à  $Y\delta$ ,  
 lesquelles composent aussi la raison du rectangle  $YL$  au  
 rectangle  $YM$ , ou de leurs égaux le carré  $VY$  au  
 carré  $GY$  : Donc le carré  $YL$  sera au carré  $O\mu$  com-  
 me le carré  $VY$  au carré  $GY$ , ou prenant leurs qua-  
 druples, comme le carré de l'Axe  $VX$  au carré  $GZ$ .  
 Mais comme le carré  $VX$  au carré  $GZ$ , ainsi le rectan-  
 gle  $V\mu X$  est au carré  $O\mu$  : Donc le carré  $YL$ , & le  
 rectangle  $V\mu X$  auront même raison au carré  $O\mu$  & par-  
 tant ils seront égaux : Et par conséquent le rectangle  $YL$   
 sera au carré  $YL$ , c'est-à-dire, la ligne  $YL$  à  $YL$ , com-  
 me le même rectangle  $YL$ , ou son égal le carré  $VY$ ,  
 au rectangle  $V\mu X$ , & par conversion de raison  $YL$  sera à  
 $YL$  comme le carré  $VY$  au carré  $Y\mu$ . Mais comme  
 $YL$  à  $YL$ , ainsi  $YL$  est à  $HL$ , c'est-à-dire, en pre-  
 nant  $HL$  pour commune hauteur, le rectangle  $YL$  au  
 rectangle  $HL$  : Donc le rectangle  $YL$  sera au rectangle  
 $HL$  comme le carré  $VY$  au carré  $Y\mu$ . Mais à cause des  
 parallèles  $YL$ ,  $HL$ , &  $\phi V$ , le rectangle  $YL$  est égal au  
 carré  $\delta\phi$ , comme le rectangle  $YL$  est égal au carré  
 $VY$  : Et partant le carré  $\delta\phi$ , ou son égal  $Y\zeta$ , sera au rec-  
 tangle  $HL$ , comme le carré  $VY$  au carré  $Y\mu$ . Mais  
 comme le carré  $VY$  au carré  $Y\mu$ , ainsi est le carré  $Y\zeta$   
 au carré  $OY$  : Donc le carré  $Y\zeta$  aura même raison au  
 rectangle  $HL$  qu'au carré  $OY$  : Et par conséquent le  
 rectangle  $HL$  est égal au carré  $OY$ . Ce qu'il falloit dé-  
 montrer.

## SECONDE OBSERVATION.

*Autre moyen de trouver les Axes susdits.*

**A** Près avoir suffisamment discours sur la manière de Pappus, pour trouver les Axes d'une Ellipse, dont les diamètres de même conjugaison sont donnez ; il ne reste plus qu'à en enseigner une qui trouve ceux de la Parabole, & de l'Hyperbole, ainsi que nous l'avons promis. Mais comme la règle, par laquelle on résout le Problème pour ces deux Sections, est universelle, & sert aussi à résoudre celui de l'Ellipse, il m'a semblé qu'il ne seroit pas inutile de l'expliquer en cet endroit, & que les Ouvriers m'auroient une double obligation, si je leur enseignois divers moyens de parvenir à un même but, desquels ils pourront choisir celui qui leur sera plus agréable, ou même faire la preuve de l'un par l'autre, puis qu'étant également vrais & démonstratifs, ils doivent également bien réussir, si on fait les opérations comme il se doit.

*Manière universelle de trouver les Axes d'une Section Conique, dont les diamètres de même conjugaison sont donnez.*

*Pour l'Ellipse & pour l'Hyperbole.*

*Fig. de la XIV.  
Planche.*

Soient donnez deux diamètres de même conjugaison d'une Ellipse ou d'une Hyperbole  $HT$  &  $OP$  se coupans au centre  $Y$ , & l'angle  $HY P$  (comme aux Figures de la 14. Planche.) Il faut premierement prendre la ligne  $HD$  troisième Géométrique aux deux  $TH$  &  $OP$ , & l'ajouter à la ligne  $TH$  dans l'Ellipse, ou la retrancher de la même  $TH$  dans l'Hyperbole, ou enfin retrancher la ligne  $TH$  de  $DH$ , si celle-ci est plus grande que l'autre; puis couper en deux également en  $I$  la toute, ou la difference  $TD$ . Ensuite sur la ligne  $HY$  comme diamètre soit décrit

le demi-cercle  $HNKY$ , (en sorte qu'il ne coupe point l'autre diamètre  $OP$ ) dont le centre soit  $G$ , dans lequel soit appliqué  $HN$  parallèle à  $OP$ , & continuée indéfiniment; puis, après avoir divisé  $HN$  en deux également en  $C$ , & tiré  $GC$ , il faut prendre sur  $CH$  continuée, s'il en est besoin, la ligne  $CB$  égale à  $IH$ , & tirer  $BL$  parallèle à  $GC$ , ou perpendiculaire à  $CB$ , laquelle  $BL$  rencontre la ligne  $TH$  prolongée, s'il est besoin, en  $L$ , d'où il faut mener  $LM$  parallèle à  $OP$ , & égale à  $HD$ , (de la part de  $H$  vers  $C$  dans l'Hyperbole, & dans l'Ellipse, si le point  $I$  se rencontre entre les points  $D$  &  $H$  comme en la Figure 3. ou de la part opposée, si le point  $H$  se trouve entre  $I$  &  $D$ , comme en la 4. Figure;) & du point  $M$  par  $G$  mener  $MKG$ , qui coupe le demi-cercle en  $K$ , par où des points  $H$  &  $Y$  il faut mener indéfiniment les lignes  $HKQ$ , &  $YKF$ , qui rencontrent  $HN$  continuée en  $V$ ; après quoi entre les deux  $VY$  &  $YK$ , il faut faire  $YE$  moyenne Géométrique, à laquelle il faut prendre  $YF$  égale, & tirer des points  $E$  &  $Y$  des lignes indéfinies  $ER$ , &  $ZYX$  parallèles à  $HK$ ; puis aux deux  $EK$  &  $KH$  faire une troisième Géométrique  $KQ$ , & du point  $F$  par  $Q$  mener  $FQR$ , qui coupe  $ER$  en  $R$ ; & enfin entre les deux  $ER$  &  $EF$ , trouver une moyenne Géométrique, dont la moitié soit égale à chacune des lignes  $YX$  &  $YZ$ : Et faisant dans l'Ellipse du point  $F$  sur l'Axe  $XZ$  les lignes  $EA$ , &  $FS$  égales à  $YZ$ ; ou bien dans l'Hyperbole du point  $Y$  sur l'Axe  $EF$ , les lignes  $YA$  &  $YS$  égales à  $EZ$ : on aura les deux Axes que l'on demande  $ZX$  &  $EF$ , & les deux foyers ou singliers  $A$  &  $S$ .

*Pour la Parabole.*

Soit  $OZ$  le diamètre d'une Parabole, &  $OR$  son paramètre en l'angle  $ROZ$ , (comme en la 1. Figure de la 15. Planche.) Et après avoir continué  $ZO$  au-dessus du point  $O$ , il faut prendre  $OP$  égal à la moitié du paramètre  $OR$ ,

Fig. 1. de la  
XV. Planche.

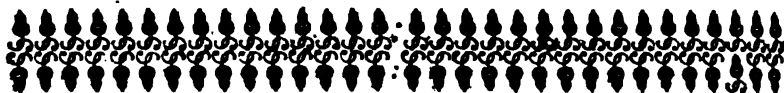
V u u iij

& du point P tirer la ligne P Q perpendiculaire à R O continuée, s'il en est besoin, & du point Q mener Q T parallèle à O Z, & O S perpendiculaire à Q T; ensuite après avoir divisé Q S en deux également en X, mener X V parallèle à O S, & troisième Géométrique aux deux lignes X S & O S. Je dis que le point X sera le sommet, la ligne X T l'Axe, & X V le côté droit de la Parabole proposée.

Fig. III, IV, V.  
VI. & VII. de  
la XV. Plancher.

La démonstration de cette manière universelle se fait en cette manière. Après avoir du point K ( dans les Figures 3. 4. pour l'Hyperbole, & 5. 6. & 7. de la 15. Planche pour l'Ellipse, pour éviter la confusion des lignes dans les Figures de la 14. Planche ) mené la ligne K  $\pi$  parallèle à N H, & qui rencontre la ligne G C prolongée, s'il en est besoin, au point O, je raisonne ainsi. Les triangles G H C, L H B étant semblables, L H sera à G H comme B H à H C, & en composant ( dans les 3. 4. & 6. Figures ) ou par conversion de raison ( dans la 5. ) L G sera à G H comme B C à C H. Mais à cause de la similitude des triangles L G M, H G  $\theta$ ; L G est à G H comme L M à H  $\theta$ : Donc B C est à C H comme L M est à H  $\theta$ ; & en permutant B C est à M L comme C H à H  $\theta$ . Mais comme B C a été prise égale à I H, & M L égale à H D; & comme C H est à H  $\theta$ , ainsi O  $\pi$  est à  $\pi$  K: Donc I H est à H D comme O  $\pi$  est à  $\pi$  K: Et ( dans la 3. Figure ) en changeant, par conversion de raison, en doublant les conséquens, par conversion de raison, & en changeant; ou ( dans la 4. Figure ) en divisant, doublant les antécédens, & en composant; ou bien ( dans la 5. Figure ) en changeant, par conversion de raison, doublant les conséquens, en divisant, & en changeant; ou ( dans la 6. Figure ) en composant, doublant les antécédens, & en divisant; ou enfin ( dans la 7. Figure ) en changeant, par conversion de raison, doublant les conséquens, en divisant & changeant; H T sera à D H comme  $\pi$  est à K  $\pi$ , c'est-à-dire, comme le rectangle  $\pi$  K est au carré K  $\pi$ , ou comme le rectangle H  $\pi$  Y au même carré

$K\pi$ , & en changeant, le quarré de la ligne  $K\pi$  sera au rectangle  $H\pi Y$  comme la ligne  $HD$  est à  $HT$ , c'est-à-dire, au double de la ligne  $HY$ . Mais  $HD$  a été prise dans tous les Cas la troisième proportionnelle aux deux diamètres de même conjugaison  $HT$  &  $OP$ : Donc la ligne  $HD$  sera le paramètre du diamètre  $HT$ , par la 4. des secondes def. du 1. des Coniques d'Apollonius, &  $HD$  étant à la double de  $HY$  comme le quarré de  $K\pi$  est au rectangle  $H\pi Y$ , le point  $K$  est trouvé, ainsi que le demande la préparation des deux cas des Propositions 53. & 54. du 1. des Coniques d'Apollonius; & le reste de notre pratique est le même que ce qui est fait & démontré dans ces deux Problèmes. La démonstration pour la Parabole est toute entière dans la 52. Proposition du même Livre.



## TROISIEME PROBLEME

### R E S O L U.

*Trouver Géométriquement les veritables joints de tête de toutes sortes d'Arcs rampans.*

#### P R E M I E R D I S C O U R S.

**A**près avoir enseigné ci-dessus la maniere de décrire les Arcs rampans, il est bien juste d'avertir les Ouvriers que leur pratique ordinaire d'en tracer les joints de tête est inutile, ou fautive. Voici ce qu'ils font.

Fig. II. de la  
XV. Planch.

Ils divisent premierement l'Arc comme D A F (dans la 2. Figure de la 15. Planche,) en autant de portions qu'ils veulent faire de Vousloirs, comme A B & A C; & voulant tirer le joint de tête, par exemple du point A, ils mettent le Compas sur le point B, & de quelque ouverture que ce puisse être, pourvû qu'elle soit plus grande que la ligne A B, ils font de part & d'autre deux Arcs de cercle comme N M & P Q; puis rapportant le Compas au point C, ils en font deux autres comme R H & T V, qui coupent les premiers en G & O, par où ils tirent la ligne G O; (qui passera nécessairement par le point A,) & ils prennent la portion A G pour leur joint de tête; ce qu'ils font par tous les points de la division de leur Arc, pour avoir par ce moyen tous les autres joints de tête.

Sur quoy je dis premierement, qu'il n'y a qu'aux seuls Cas, où l'Arc proposé est portion de cercle, ou bien lors qu'étant une section Conique, le joint se doit tirer par l'un des sommets, que cette règle n'est pas fausse; ausquels Cas en échange elle est inutile, puisqu'il ne faut alors que  
tirer

tirer les joints au centre ; & qu'en tous les autres Cas ; où l'Arc proposé est portion d'une autre ligne que circulaire, elle est absolument fausse & absurde.

Parce que sur cette hypothèse on peut tirer une infinité de lignes différentes, & tendantes à differents points, qui passeront néanmoins par un même point de division de l'Arc, & pourront toutes également être le joint de tête du même Arc en ce même point. Je veux dire que suivant cette méthode on pourra faire passer une infinité de lignes par le point A comme A G, A H, &c. tendantes à differens points comme G, H, &c. & qui pourront autant l'une que l'autre être prises pour le joint de tête de l'Arc D A F au point A ; ce qui est absurde, puisqu'il n'y a qu'un seul joint de tête qui puisse être legitimement appelé tel en chaque point de quelque Arc que ce puisse être ; & la règle par conséquent qui en produit plusieurs ne peut être que fausse & absurde.

Or qu'il soit vrai que par la règle susdite on puisse tirer une infinité de lignes par le point A, qui pourront toutes être également prises pour le joint de tête de l'Arc D A F en ce même point, je le montre en cette maniere. Soit par exemple l'Arc D A F portion d'une Ellipse, & le point A pris ailleurs qu'au bout d'un des Axes : Et après avoir comme dessus pris les points B & C également distans de A, & tiré les Arcs M N, R H & P Q, T V, afin que des points de leur rencontre G & O, on puisse mener la ligne G A O, laquelle sera perpendiculaire à la ligne B C, & la divisera en deux également en X, & la ligne A G sera par cette opération le joint de tête du point A.

Je dis maintenant, que si on prend quelqu'autre point dans l'Arc comme D, duquel on tire une ligne D E parallèle à B C, & rencontrant la section en E, & la droite G O en I, les angles au point I seront aussi droits ; mais les droites D I & I E ne sont point égales, parce qu'autrement la ligne A O seroit l'axe de l'Ellipse, ( les deux lignes B C



& D E étant parallèles, & toutes deux divisées également, & à angles droits par A O; ) ce qui est contre l'hypothèse: Et partant D I ne sera point égale à I E, ni par conséquent la droite A D à la droite A E; Et partant si du point A nous inscrivons dans l'Ellipse une ligne A F égale à A D, elle tombera ou dessus ou dessous du point E, & la ligne D F dessus ou dessous de D E, & les angles faits au point K par la ligne G O ne seront point droits; & partant D K & K F ne seront point égales: Et partant si des points D & F également distans du point A, on fait selon la règle susdite des Arcs de cercle au-dessus & au-dessous, par le rencontre desquels on tire une droite comme H L, elle passera par le point A, & coupera au point L la ligne D F en deux également, & par conséquent elle ne sera pas la même que G K, & la droite A H ne sera pas la même que A G; & A H sera néanmoins le joint de tête de l'Arc au point A, suivant la règle susdite. Et comme on peut prendre une infinité de points differens également distans de part & d'autre du même point A, & par le moyen desquels on peut faire une infinité de lignes differentes par la règle susdite, qui peuvent être aussi legitimement prises pour le joint de l'Ellipse au point A, que la ligne A G; & comme ce que je viens de démontrer pour l'Ellipse, peut être aussi bien entendu pour toute autre sorte de ligne courbe differente de la circulaire; il s'ensuit ce que nous avons dit ci-dessus, & par conséquent que la règle qui est communément en usage parmi les Ouvriers, est fautive.

---

## SECOND DISCOURS.

**M**Ais comme il seroit inutile d'avoir découvert la fausseté de la pratique ordinaire, si l'on n'en enseignoit une autre qui ne soit pas sujette à ces défauts: j'ai pour ce sujet assez sérieusement médité sur cette matiere; sur la-

quelle j'ai premierement reconnu que la vraie & universelle maniere de tracer les joints de tête de toutes sortes d'Arcs dans toute leur perfection, tant pour la sûreté & solidité de la liaison des Voussoirs, que pour la beauté & l'élégance du trait, consistoit à les tirer perpendiculaires à l'Arc, c'est-à-dire, à plomb sur les lignes qui toucheroient l'Arc aux mêmes points; puisque cette pratique, ( qui est la même que celle dont on se sert au cercle où les joints de tête vont au centre, ) ne détermine jamais qu'un seul joint de tête en chaque point, & donne aux coupes des Voussoirs toute la force & la grace, donc l'Arc puisse être capable. Et pour la rendre familiere aux Ouvriers, j'ai tâché de leur en composer deux règles si faciles, que rien ne les puisse dorenavant empêcher de s'en servir; & quoique les Arcs puissent être portions de différentes Sections du Cone, comme du Cercle, de l'Ellipse, de l'Hyperbole, ou de la Parabole; je les ai néanmoins concûs sous des termes si généraux, & si propres, qu'elles peuvent également servir à toutes.

*Maniere universelle de tirer les joints de tête de toutes sortes d'Arcs rampans.*

Il faut de chaque point de l'Arc tirer des perpendiculaires à l'Axe de la Section, qui coupent le diamètre qui passe par le point, où le côté droit, ou paramètre du même Axe, est coupé en deux également; & du point, où la perpendiculaire rencontre l'Axe, comme Centre, & de l'intervalle compris entre le susdit Axe & ledit diamètre, faire un Arc de cercle, qui coupera l'Axe en deux points, de l'un desquels, sçavoir de celui qui est le plus éloigné du sommet de la section, il faut mener, par le point premierement pris dans l'Arc rampant, une ligne droite, qui marquera le joint de tête que l'on demande.

Soit la ligne A C B l'Axe d'une section B K K B, (aux 1.

X x x ij

Fig. 1. II. & III.  
de la XVI. Plan-  
che.

2. & 3. Figures de la 16. Planche ) dont la ligne  $BH$  soit le côté droit ou paramètre; & par le point  $I$  qui divise  $BH$  en deux également, soit menée indéfiniment le diamètre  $IN$  : Puis de quelque point pris dans la section comme de  $K$ , soit menée la ligne  $KMN$  perpendiculaire à l'Axe qu'elle coupe en  $M$ , & le diamètre  $IN$  en  $N$ ; & du point  $M$  comme centre, & intervalle  $MN$ , ( c'est-à-dire, de la portion de la perpendiculaire comprise entre l'Axe  $ACB$  & ledit diamètre  $IN$  : ) soit fait le cercle  $NL$  qui coupe le même Axe au point  $L$ , en sorte que le point  $M$  soit toujours entre le sommet de la section dont il est le plus proche, & le susdit point  $L$ ; duquel par le point  $K$ , il faut tirer la ligne  $LKO$ , qui donnera la droite  $KO$  pour le joint que l'on demande.

Mais parce que les Ouvriers ne savent pas toujours comme on trouve ce diamètre  $IN$ , il est à propos de leur en enseigner la maniere, supposé, par ce qui a été montré dans le précédent Problème, qu'ils connoissent les Axes de la section proposée, qui soient par exemple les lignes  $ACB$  &  $ECD$ , par le moyen desquels il faut trouver la ligne  $BH$  côté droit ou paramètre de l'Axe  $ACB$ , ce qui se fait ainsi. Il faut du centre  $C$  prendre sur l'Axe  $CA$  la ligne  $CF$  égale à  $CD$ , & du point  $F$  tirer la ligne  $FG$  parallèle à  $AD$ , & du point  $A$  par  $G$  dans l'Ellipse & l'Hyperbole, ( Figures 1. & 3. ) tirer la droite  $AGH$ , qui coupe en  $H$  la ligne  $BH$  perpendiculaire à  $AB$ ; ou bien dans la Parabole ( Figure 2. ) faire  $AH$  égale à  $CG$ , & tirer indéfiniment la ligne  $HG$ , afin que l'on ait par ce moyen en toutes les Figures la ligne droite  $BH$  pour le côté droit, ou paramètre que l'on recherche, qui étant divisé en deux également en  $I$ , & tirant du centre  $C$  dans l'Ellipse & l'Hyperbole, la ligne  $CIN$ , ou bien tirant dans la Parabole la ligne  $IN$  parallèle à  $AC$ ; la même  $IN$  sera le diamètre de la section que l'on demande. Ce que je démontre en cette maniere.

Mais auparavant je dois dire que les diamètres de la Parabole étant tous paralleles, il paroît qu'il n'y a aucun centre de cette Figure, c'est-à-dire, aucun point de concours des diamètres; & pour cet effet nous avons mis les deux extrémitez de l'Axe A & B en un seul point, qui est le sommet; Et pour le point C qui sert de centre, nous l'avons pris à fantaisie dans l'Axe, par lequel nous avons mené l'ordonnée E C D, qui fait en la Parabole, en quelque endroit que l'on la prenne, le même effet que le second Axe dans les autres Figures.

Je dis donc pour démontrer que la ligne I N est le diamètre que l'on cherche. Parce que C F est égale à C D, & G F parallele à A D; la ligne A C sera à C D, comme C F, ou son égale C D à C G: Et partant dans la Parabole (Figure 2.) le quarré de C D sera égal au rectangle A C G, & la ligne C G, ou son égale A H, sera le paramètre ou côté droit de l'Axe de la Parabole A C. Mais dans l'Hyperbole & l'Ellipse (Figures 1. & 3.) puisque A C est à C D comme C D est à C G; le quarré A C sera au quarré C D (ou leurs quadruples, sçavoir le quarré de l'Axe A B au quarré de l'Axe E D,) comme la ligne A C à la ligne C G, c'est-à-dire, comme l'Axe transverse A B à B H: Et par conséquent la ligne B H sera le paramètre ou côté droit de l'Axe transverse A B.

Maintenant, pour démontrer que les lignes K O sont les véritables joints de tête de la section proposée, & qu'ils la coupent à angles droits; il faut de quelque point que ce soit de la section comme k, par lequel on a tiré un joint de tête k o, mener une ligne droite k R perpendiculaire à la ligne k o, & qui rencontre l'Axe de la section continuée en R, & prolonger la droite k m jusqu'à ce qu'elle trouve G H continuée au point q. Après quoi, pour faire voir que le joint k o coupe la section à angles droits, ou (ce qui est la même chose) que la ligne k R touche la section au point

*k*, je raisonne en cette sorte. D'autant que du sommet *k* du triangle rectangle *l k R*, on a mené une droite *k m* perpendiculaire à la base *R l*, le rectangle *R m l* sera égal au carré de *k m*. Mais le même carré *k m* est aussi égal au rectangle *B m q*, par les 11, 12 & 13 du 1. des Coniques d'Apollonius : Donc les rectangles *R m l* & *B m q* seront égaux ; mais parce que la ligne *m l* est égale à *m n*, le rectangle *R m l* sera aussi égal au rectangle *R m n* ; & partant les deux rectangles *R m n* & *B m q* seront égaux ; & la ligne *R m* sera à *B m* comme *m q* à *m n*, & en divisant *R B* à *B m* comme *q n* à *m n* : Et partant comme la ligne *q n* dans la Parabole (Figure 2.) est égale à la ligne *m n*, la ligne *R B* sera aussi égale à *B m*, & la droite *k R* touchera la Parabole en *k* par la 33 du 1. des Coniques. Mais pour l'Ellipse & l'Hyperbole (Figures 1 & 3,) puisque *R B* est à *B m* comme *q n* est à *m n*, & *q n* est égale à *H I* ou *B I* ; la ligne *R B* sera à *B m* comme *B I* à *m n*, c'est-à-dire, comme *B C* à *C m*, en permutant & composant *R C* sera à *B C* comme *B C* à *C m*. Et comme *A C* est égale à *C B*, la toute *R A* dans l'Ellipse sera divisée Harmoniquement aux deux points *B* & *m*, & la route *A m* dans l'Hyperbole aux deux points *B* & *R* : & partant, en l'une & en l'autre, la ligne *A R* sera à *B R* comme *A m* à *B m* ; & la ligne *k R* touchera la section au point *k*, par la 34. du 1. des Coniques. Et comme la même chose se peut semblablement démontrer dans tous les points de la section, il paroît de la vérité de la proposition. Ce qu'il falloit démontrer.

*Seconde maniere de tirer les joints de tête de toutes sortes d'Arcs rampans.*

Il faut de chacun des foyers de l'Ellipse & de l'Hyperbole mener des lignes qui se rencontrent en un même point de l'Arc ; Mais dans la Parabole il faut du foyer me-

ser une droite, qui soit coupée en un point de l'Arc par une ligne parallèle à l'Axe. Ensuite dans toutes les sections, l'angle qui est fait par ces lignes au point de l'Arc, doit être coupé en deux également par une droite, qui sera le joint de tête que l'on demande.

Des points G & F foyers de l'Ellipse ou de l'Hyperbole, *Fig. IV. V. & VI. de la XVI<sup>e</sup> Planche.* ( dans les 4 & 5 Figures ), il faut tirer tant de lignes que l'on voudra GH, FI qui se coupent en des points de l'Arc comme en K. Tout de même, il faut du point F foyer de la Parabole, ( dans la 6 Figure ) mener FI qui soit coupée en un des points de l'Arc K, par la ligne HK parallèle à l'Axe de la Parabole AF. Ensuite ( dans toutes les trois Figures ) il faut faire les deux lignes HK & IK égales, & des points I & H comme centres, & de quelque intervalle que l'on voudra, ( pourvu qu'il ne soit pas plus petit que la moitié de la distance entre I & H ) l'on doit décrire les deux Arcs qui se coupent au point L, d'où il faut mener OLK, qui sera le joint de tête que l'on recherche.

La démonstration en est aisée : Car ayant mené par un des points K la ligne MKN qui touche la section au point K, qui fera par conséquent ( ainsi qu'il a été démontré par d'autres ) l'angle MKI égal à NKH ; & l'angle IKL ayant été fait égal à HKL, il s'ensuit que l'angle MKL est égal à NKL ; & partant, que LK est perpendiculaire à la contingente.

Les points G & F foyers de l'Ellipse ( dans la 4. Figure ) se trouvent, en faisant les lignes EF & EG ( qui sont tirées d'une des extrémités du petit Axe ED sur le grand Axe AB ) égales à CB, moitié du grand Axe AB.

Ceux de l'Hyperbole G & F ( dans la 5. Figure ) se trouvent, en prenant du point C, qui est le centre, les lignes CG & CF sur le grand Axe, égales à la ligne EB tirée d'un des bouts du petit Axe ED à une des extrémités du grand Axe AB.

476 DES JOINTS DE TESTE.

Le foyer de la Parabole  $F$  (dans la 6. Figure) se trouve en faisant depuis le sommet  $A$  la ligne  $AF$  égale à  $AG$ , c'est-à-dire, au quart de la ligne  $AD$  qui est le paramètre, ou le côté droit de la Parabole.

# QUATRIÈME PROBLEME

## R E S O L U.

*Trouver la ligne sur laquelle les Pontres doivent être coupées  
en leur hauteur & largeur, pour les rendre par tout  
également fortes & résistantes.*

### P R E M I E R D I S C O U R S.

#### O U

#### F. B. EPISTOLA AD P. W. .

*In quâ celebris Galilæi propositio discutitur circa naturam  
lineæ quâ Trabes secari debent secundum altitudinem, ut  
sint æqualis ubique resistentiæ; & in quâ lineam illam non  
quidem Parabolicam, ut ipse Galilæus arbitratus est, sed  
Ellipticam esse, demonstratur.*

#### F. B. P. W. S. P. D.

**P**Ergratæ mihi tuæ litteræ fuerunt, cùm ex illis intelli-  
gam & te valere, & me à te amari; quamquam sub-  
rator videaris quòd ad te rarò scribam, id quod non tam  
meâ negligentia quàm penuriâ Tabellariorum contigisse,  
credas velim. Nam à quo tempore à Sarmatis ad Cimbros  
evolavit Heros vester, nemo sanè fuit qui ad te tutò per-  
ferret litteras, etsi id optabam vehementer, tùm ut sin-  
ceras tibi grates agerem, quòd officiosâ tuâ confabulatio-  
ne sciverit Magnus ille noster Amicus, maximo me affec-  
tum fuisse gaudio, cùm summum Arctoi maris imperium,  
ei concessisse mihi nuntiatum est; tùm etiam ut tibi signi-  
ficarem, id mihi perutile futurum, si me quâ soles beni-

*Rec. de l'Ac. Tom. V.*

Y y y



gnitate apud illum amicâ commendatione prosequeris.

Cæterum perjucunda mihi profectò fuit elegantissima tua narratio de admirabili illâ Machinâ quâ in Colossicorè tui Leonis Hyperborei constructione uti te dicis; & magnopere me delectat ista contemplatio intricatissimæ illius tignorum, rudentum, & ferramentorum, compagis, quæ Rectoris imperio ingenioque ita se præstat obsequentem: Sed pergratum mihi feceris, si per te certior aliquando fiam, quandônâ Navistua.

*Premet imperiosa suum mare?*

Ingensenim de illâ percrebuit rumor, dignam scilicet fore, cui

*Baltica tota lubens deserviat ora.*

Quod autem scribis, sectas à te ex præscripto Galilæi lineâ Parabolicâ secundum altitudinem Trabes, ut æqualis ubique forent resistentiæ, non omninò expectationi tuæ respondisse; istud me primùm non mediocriter commovit: tantæ enim apud me existimationis vir ille semper fuit, ut inducere in animum nunquam possem, quicquam ab eo minùs sapienter excogitatum posse à nobis aliquando refarciri.

Verùm re penitus introspectâ, discussisque his propositionibus, quas de resistentiâ Solidorum 2. lib. Mechan. conscripsit; & quandoquidem tu me meam ea de re sententiam rogas; ita me censere fateor, neque dissimulabo delusum sanè istâ ratione fuisse Galilæum, ut ea trabibus utrinque sultis congruere arbitratus fuerit, quæ tignis alterâ sui parte in murum infixis, aliâ verò liberè prominentibus convenire rectè demonstraverat.

Etenim quando asserit momentum resistentiæ in A (licet enim mihi affari te verbis Geometricis) Cunei seu Prismatis triangularis A B G D F esse ad momentum ejusdem in C, ut linea A B est ad lineam C B: At è contrario mo-

mentum resistentiæ in A Trabis, seu Prismatis quadrangularis A B E D, esse ad momentum ejusdem in C, ut linea C B est ad lineam A B: Id profectò aliter intelligi non potest, nequidem ex ipso Galilæanæ demonstrationis contextu, quàm si prismata muro firmiter in punctis vel A, vel C adhærentia supponantur, dum Pondera ex B dependeant, quæ sic augeantur, ut Prismatum resistentiis evadant tandem æqualia; quorum ponderum eadem tunc erit ratio, quæ linearum A B & C B.

At si Trabs A E secari intelligatur per lineam Parabolicam F N K B, unde Solidum fiat A F N B G O D, quod Cuneum Parabolicum appellare licet; tunc ipse Galilæus infert, ex iis quæ antè demonstraverat, momenta resistentiæ in quibusvis punctis esse æqualia; id est, (ut patet ex contextu demonstrationis) Ponderus quod pendens ex B, Solidum Parabolicum frangeret infixum in parietem in puncto A, seu per superficiem A F D; idem etiam Ponderus pendens ex eodem B, idem Solidum frangeret infixum in parietem in puncto C, seu per superficiem C N O, & sic de cæteris. Quod perutile futurum ait rei ædificatoriæ, ac construendis præsertim navigiis, in quibus transtra quæ foros sustinent tertiâ ponderis & molis parte multari possint, salvâ & incolumi resistentiâ.

At ego (mi VV.) fateor, prorsùs ignorare me, cuinam id usui esse possit, transtra enim in navibus nulla sunt quæ utrinque non suffulciantur, & quorum extrema, imò & sæpè media pars, quibusdam rebus non insideant firmiter incumbantque.

Sed & rei ædificatoriæ parùm id opinor subsidii afferet, cum omnis ferè quæ in illa adhibetur materies, utrâque extremitate firmis quibusdam fulcimentis sustineatur; sic in contignationibus Trabes mutulis aut parietibus, asseres trabibus, columnen Columnis, cantherii capreolis & transtris, & templa cantheriis insistent: nec ullum ferè tignum reperias, cujus extremitas altera in murum infixæ

fit, altera verò liberè extrà promineat; nisi si quod in subgrundis domorum extet sustinendis trochleis, quibus pondera attollantur in Cænacula, aut in mutulis quæ Mæ-niana suffulciant.

Restat igitur ut, si eadem tigna utrinque fulta suppo-nantur, incumbantque in diversis eorum partibus illa pondera quæ trabes effringere possint; Quænam inter ista proportio intercedat, inquiramus.

### PROPOSITIO PRIMÆ.

Fig. 1. Tab. 17.

Ac primùm quidem de Prismate quadrangulæ AB E fulto in A & B, notum est ex eodem Galilæo, momentum resistentiæ in C ad momentum resistentiæ in H, id est, minimum pondus quod incumbens in P, trabem frange-ret, ad minimum pondus quod eandem frangeret in M, esse ut rectangulum AHB ad rectangulum ACB; hoc enim ab ipso demonstratum est.

### PROPOSITIO SECUNDA.

Fig. 1. Tab. 17.

At in Prismate triangulæ seu Cunco ABGDF, mo-menta resistentiæ sunt inter se, ut rectangula sub alternis lineæ AB partibus; id est, momentum in C est ad momen-tum in H, ut rectangulum sub lineis AH, CB, ad rectan-gulum sub lineis AC, BH. Est enim ratio momenti resis-tentiæ Cunei in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H, composita ex rationibus momenti Cunei in C ad mo-mentum resistentiæ Prismatis quadrangulæ seu trabis AE, è quâ nascitur, in eodem puncto C, momenti resis-tentiæ trabis in C ad momentum ejusdem in H, & tandem momenti resistentiæ trabis in H ad momentum resistentiæ Cunei in eodem H. Sed ratio momenti resistentiæ Cunei in C ad momentum trabis in eodem C est (ex Galilæo) ut quadratum CN ad quadratum CP seu AF, id est, ut quadratum CB ad quadratum AB, (componitur enim ex rationibus partium solidi contentarum in superficiebus

DE LA COUPE DES POUTRES EGALEMENT RESIST. 481

CO & CI quæ sunt inter se ut superficies, id est, propter communem altitudinem NO, IP, ut lineæ CN & CP; & ex ratione distantiarum actionis earumdem, quæ etiam sunt ut eadem lineæ CN, CP: ) Ratio verò momenti resistentiæ prismatis quadrangularis seu trabis in C, ad momentum ejusdem in H est, ex eodem Galilæo, ut rectangulum AHB ad rectangulum ACB; & tandem ratio momenti resistentiæ trabis in H ad momentum resistentiæ Cunei in eodem H, est ut quadratum HM seu AF ad quadratum HK, id est, ut quadratum AB ad quadratum HB: Ergo ratio momenti resistentiæ Cunei, seu Prismatis triangularis in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H, componitur ex rationibus quadrati CB ad quadratum AB, rectanguli AHB ad rectangulum ACB, & quadrati AB ad quadratum HB. Sed rationes quadrati CB ad quadratum AB, & quadrati AB ad quadratum HB sunt æquales rationi quadrati CB ad quadratum HB; & ratio quadrati CB ad quadratum HB æqualis rationibus linearum CB ad BH, plus CB ad BH; ratio verò rectanguli AHB ad rectangulum ACB, eadem est quæ linearum AH ad AC, plus HB ad CB: Ergo ratio momenti resistentiæ Cunei in C ad momentum ejusdem in H, componitur ex rationibus linearum CB ad BH, plus CB ad BH, plus AH ad AC, plus BH ad CB. Atqui rationes CB ad BH plus BH ad CB sese mutuò destruunt: Superfunt ergo rationes AH ad AC plus CB ad BH, quæ componunt rationem rectanguli AH, CB ad rectangulum AC; BH. Unde patet propositum.

PROPOSITIO TERTIA.

Sic si trabs ABE utrinque secetur per diagonales A Q; Fig. 3. Tab. 17. QB quæ Solidum deinceps Cuneatum AQBTRS efficiant, occurrentes in medio trabis QR. Momentum resistentiæ duplicis illius Cunei in C, erit ad momentum ejusdem in H, ut rectangulum sublineis HB, BC ad rec-  
Y y iij

tangulum sub  $AC$  &  $AH$ . Nam ratio momenti resistentiæ  
 duplicis Cunei in  $C$  ad momentum ejusdem in  $H$ , compo-  
 nitur ex rationibus momenti in  $C$  ad momentum in  $G$ , &  
 momenti in  $G$  ad momentum in  $H$ . Sed demonstrabitur,  
 ut supra, momentum Cunei in  $C$  ad momentum ejusdem  
 in  $G$ , esse in ratione compositâ quadrati lineæ  $CN$  ad qua-  
 dratum lineæ  $GQ$ , & rectanguli  $AGB$  ad rectangulum  
 $ACB$ : Sed ratio quadrati  $CN$  ad quadratum  $GQ$  eadem  
 est quæ quadrati  $GB$  ad quadratum  $GB$  seu ad rectangu-  
 lum  $AGB$ : Ergo ratio momenti in  $C$  ad momentum in  $G$ ,  
 componetur ex rationibus quadrati  $CB$  ad rectangulum  
 $AGB$ , & rectanguli  $AGB$  ad rectangulum  $ACB$ , quæ  
 quidem sunt æquales rationi quadrati  $CB$  ad rectangu-  
 lum  $ACB$ , vel denique rationi lineæ  $CB$  ad lineam  $AC$ .  
 Eodem argumento demonstrabitur momentum resisten-  
 tiæ Cunei in  $G$  ad momentum resistentiæ ejusdem in  $H$ ,  
 esse ut linea  $HB$  ad lineam  $AH$ : Ergo ratio momenti resi-  
 stentiæ duplicis Cunei in  $C$ , ad momentum ejusdem in  $H$ ,  
 componetur ex rationibus linearum  $CB$  ad  $AC$ , plus  $HB$   
 ad  $AH$ : quibus etiam componitur ratio rectanguli  $HBC$   
 ad rectangulum  $HAC$ . Unde patet propositum.

#### PROPOSITIO QUARTA.

Fig. 2. Tab. 27.

Quod autem ad lineam Parabolicam spectat, quâ qua-  
 drifariam secari trabes possunt secundum altitudinem,  
 neutro tamen modo continget unquam, ut momenta  
 resistentiæ supersint ubique æqualia. Etenim trabs  $AE$  eâ  
 ratione secetur ut Axis semi-parabolæ sit longitudo trabis  
 $AB$ , amplitudo verò dimidia, sit ejusdem altitudo  $AF$ ,  
 (planè ut superior Galilæi figura docet,) unde Solidum  
 $AFNBGO$  oriatur, quod Cuneum Parabolicum ap-  
 pellare licet: Quoddque si utrinque fulciatur in  $A$  &  $B$ ,  
 momentum resistentiæ ut in  $C$ , erit ad momentum resi-  
 stentiæ ut in  $H$ , in ratione lineæ  $AH$  ad lineam  $AC$ .

Nam demonstrabitur ut supra rationem momenti re-

DE LA COUPE DES POUTRES EGALEMENT RESIST. 483  
 sistentiæ Cunei Parabolici in C ad momentum ejusdem  
 in H, componi ex ratione quadrati CN ad quadratum  
 HK, ( id est, propter Parabolam lineæ CB ad lineam HB ),  
 plus ratione rectanguli AHB ad rectangulum ACB, ( id  
 est, ratione linearum AH ad AC ) plus HB ad CB : Ergo  
 ratio momenti resistentiæ Cunei in C ad momentum ejus-  
 dem in H, componetur ex rationibus linearum CB ad  
 HB, plus HB ad CB, plus AH ad AC, sed ratio CB ad  
 HB destruit rationem HB ad CB, est enim ratio æquali-  
 tatis quæ in compositione rationum nihil addit aut demit:  
 Ergo superest ratio lineæ AH ad AC, cui æqualis est ratio  
 momenti resistentiæ Cunei Parabolici in C ad momentum  
 resistentiæ ejusdem in H. Quod erat demonstrandum.

### PROPOSITIO QUINTA.

Deinde ipsa Trabs AE secetur diagonaliter à duabus *Fig. 4. Tab. 17. 3.*  
 semi-parabolis AKQ, BNQ, quarum Axis communis  
 sit AB & dimidia amplitudo etiam communis GQ, quæ  
 occurrentes in medio Trabis in Q, efficiant Solidum  
 AKQNB T O R L S, quod duplicem Cuneum Parabo-  
 licum appellare possumus; in quo momentum resistentiæ  
 in C erit ad momentum resistentiæ in H, ut linea HB ad  
 lineam AC.

Etenim ratio momenti resistentiæ duplicis Cunei Para-  
 bolici in puncto C ad momentum resistentiæ ejusdem in  
 puncto H, componitur ex rationibus momenti in C ad mo-  
 mentum in G, & momenti in G ad momentum in H; jam  
 verò ratio momenti resistentiæ Cunei Parabolici in C ad  
 momentum ejusdem in G, componitur ex rationibus mo-  
 menti Cunei in C ad momentum resistentiæ trabis AE,  
 è quâ nascitur, in eodem puncto C, & momenti trabis AE  
 in C ad momentum Cunei in G. Atqui momentum Cunei  
 in C ad momentum trabis in C, est ut quadratum CN ad  
 quadratum CP seu GQ, id est, ( propter Parabolam  
 BNQ ) ut linea CB ad lineam GB : Momentum verò tra-

bis in C est ad momentum Cunei Parabolici in G, ut quadratum G B ad rectangulum A C B, ( idem enim est momentum resistentiæ Trabis & Cunei in G, ) id est, in ratione linearum G B ad A C, plus G B ad C B: Ergo momentum Cunei in C ad momentum ejusdem in G, erit in ratione linearum C B ad G B, plus G B ad A C, plus G B ad C B; id est, ut linea G B ad A C. Eodem modo ostendetur momentum Cunei in G, esse ad momentum ejusdem in H, ut linea H B est ad lineam A G seu G B: Ergo ratio momenti resistentiæ Cunei Parabolici in C ad momentum ejusdem in H, componetur ex rationibus linearum G B ad A C & H B ad G B, id est, erit ut linea H B ad lineam A C. Quod erat demonstrandum.

## PROPOSITIO SEXTA.

*Fig. 5. Tab. 17.* Tertiò, si Trabs A E secari intelligatur lineâ Parabolicâ A K Q N B cujus vertex sit in Q, axis Q G, & amplitudo A B, quâ quidem sectione fiet Solidum A Q B T R S quod Parabolicum appellabitur; cujus momentum resistentiæ in C est ad momentum resistentiæ in H, ut rectangulum A C B est ad rectangulum A H B, vel, quod idem est, ut linea C N ad lineam H K.

Etenim, ut supra ostensum est, ratio momenti illius Parabolici in C ad momentum ejusdem in H, componitur ex rationibus quadrati C N ad quadratum H K & rectanguli A H B ad rectangulum A C B, id est, ex rationibus linearum C N ad H K, plus C N ad H K, & rectanguli A H B ad rectangulum A C B: Sed ratio lineæ C N ad H K, eadem est ( propter Parabolam ) quæ rectanguli A C B ad rectangulum A H B: Ergo ratio momenti resistentiæ Solidi Parabolici in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H, componetur ex rationibus C N ad H K, plus rectanguli A C B ad rectangulum A H B, plus rectanguli A H B ad rectangulum A C B: Sed rationes A C B ad A H B, & A H B ad A C B sese mutuò destruunt: Est ergo momentum

DE LA COUPE DES POUTRES EGALEMENT RESIST. 485  
momentum resistentiæ Solidi Parabolici in C ad momen-  
tum ejusdem in H, ut linea CN ad lineam HK, id est  
(propter Parabolam) ut rectangulum A CB est ad rectan-  
gulum A H B. Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M.

Et hinc vides istius Solidi Parabolici momenta pro-  
portionem habere inversam momentorum Trabis è qua  
enatum est; illius enim momentum in C est ad momentum  
in H, ut rectangulum A CB ad rectangulum A H B; hujus  
verò è contrario momentum resistentiæ in C est ad mo-  
mentum resistentiæ in puncto H, ut rectangulum A H B  
est ad rectangulum A CB.

P R O P O S I T I O S E P T I M A.

Quartò denique secetur Trabs A E per semiparabolam *Fig. 6. Tab. 178*  
F N K B, cujus axis sit A F & dimidia amplitudo A B;  
exurgatque Cuneus parabolicus A F K B G O D; in quo  
momenta resistentiæ longè intricatiorem inter se propor-  
tionem sortientur quàm in reliquis. Ostendetur enim ut  
supra momentum Cunei in C ad momentum ejusdem in  
H, esse in ratione compositâ quadrati CN ad quadratum  
H K, & rectanguli A H B ad rectangulum A C B; Quæ ra-  
tio si referatur ad lineam B A seu ad basim Cunei, eadem  
erit quæ composita rationum quadrati lineæ compositæ  
ex A C & A B ad quadratum lineæ compositæ ex eadem  
A B & A H, plus rectanguli sub lineis A H, C B ad rectan-  
gulum sub lineis A C, B H.

Sit enim A Q æqualis A B, & erit ex proprietate Para-  
bolæ CN ad H K ut rectangulum Q C B ad rectangulum  
Q H B, & ut quadratum CN ad quadratum H K, sic qua-  
dratum rectanguli Q C B ad quadratum rectanguli Q H B,  
id est, ut linea Q C ad Q H, plus Q C ad Q H, plus C B ad  
H B, plus C B ad H B. Sed ratio rectanguli A H B ad rec-  
tangulum A C B, eadem est quæ ratio linearum A H ad



$AC$ , plus  $HB$  ad  $CB$ : Ergo ratio momenti resistentiæ Cunei Parabolici in  $C$  ad momentum resistentiæ ejusdem in  $H$ , componetur ex rationibus linearum  $QC$  ad  $QH$ , plus  $QC$  ad  $QH$ , plus  $CB$  ad  $HB$ , plus  $CB$  ad  $HB$ , plus  $AH$  ad  $AC$ , plus  $HB$  ad  $CB$ . Sed rationes  $CB$  ad  $HB$ , plus  $HB$  ad  $CB$  sese mutuò destruunt; Relinquuntur ergo rationes  $QC$  ad  $QH$ , plus  $QC$  ad  $QH$ , plus  $CB$  ad  $HB$ , plus  $AH$  ad  $AC$ ; quæ componunt etiam rationem quadrati  $QC$  ad quadratum  $QH$ , & rectanguli  $AH$ ,  $CB$ , ad rectangulum  $AC$ ,  $BH$ . Sed quadratum  $QC$  æquale est quadrato lineæ compositæ ex  $AB$  &  $AC$ , quadratum verò  $QH$  æquale quadrato lineæ compositæ ex  $AB$  &  $AH$ . Ergo ratio momenti resistentiæ Cunei Parabolici in  $C$  ad momentum resistentiæ ejusdem in  $H$ , componitur ex rationibus quadrati lineæ compositæ ex  $AB$  &  $AC$  ad quadratum compositæ ex eadem  $AB$  &  $AH$ , & rectanguli sub lineis  $AH$ ,  $CB$  ad rectangulum sub lineis  $AC$ ,  $BH$ . Quod erat demonstrandum.

## S C H O L I U M.

Atque ex istis omnibus patet ratio, cur nimiam quam in Galilæum habebas fiduciam experimenta tua deluserint. Tantum enim abest ut illa sectio Parabolica, quocumque tandem modo trabibus secundum altitudinem adhibeatur, æquet in illis utrinque fultis momenta resistentiæ; quin illa potius in infinitum dimovere possit atque diducere; etiamsi id semper verissimum sit tertiam ponderis & molis partem per Parabolas in trabe refecari.

## P R O P O S I T I O O C T A V A.

*Fig. 7. Tab. 172* Sed nec ista momentorum æqualium proprietas sectioni hyperbolicæ conveniet. Nam si trabs  $AE$  secetur primò per semi-hyperbolam  $ANKR$  sub transversâ diametro  $QA$ , Axe  $AB$ , & amplitudine  $BR$ , unde Cuneus hyperbolicus oriatur  $BANRELSG$ . Erit momentum

DE LA COUPE DES POUTRES EGALEMENT RESIST. 487  
 resistantiæ in C ad momentum in H, ut est rectangulum  
 sub QC & HB ad rectangulum sub QH & CB. Nam, ut  
 supra, demonstrabitur momentum in C ad momentum in  
 H esse in ratione composita quadrati CN ad quadratum  
 HK, & rectanguli AHB ad rectangulum ACB. Sed ex  
 proprietate hyperboles quadratum CN est ad quadratum  
 HK ut rectangulum QCA ad rectangulum QHA: Ergo  
 momentum est ad momentum in ratione composita rec-  
 tangulorum QCA ad QHA & AHB ad ACB. Sed ratio  
 rectanguli QCA ad QHA eadem est quæ linearum QC  
 ad QH, & AC ad AH; ratio verò rectanguli AHB ad  
 ACB eadem est quæ linearum AH ad CA, plus HB ad  
 CB: Et ratio AC ad AH destruit rationem AH ad CA:  
 Ergo momentum resistantiæ Cunei hyperbolici in C ad  
 momentum resistantiæ ejusdem in H, est in ratione com-  
 posita linearum QC ad QH, plus HB ad CB; Quæ qui-  
 dem est ratio rectanguli QC, HB ad rectangulum QH,  
 BC. Quod erat demonstrandum.

*PROPOSITIO NONA.*

Si verò idem Prisma AE secetur per duas semi.hyper- *Fig. 8. Tab. 17.*  
 bolas contrariè positas AKQ, BNQ, quarum axis com-  
 munis AB, amplitudo eadem GQ, & transversæ diametri  
 æquales AV, BX, quæ se in trabis medio Q fecantes, So-  
 lidum in illa efficiant AKQNBTRS deinceps Cuneat-  
 um hyperbolicum. Idem prorsus eveniet quod supra,  
 eritque momentum resistantiæ in C ad momentum resi-  
 stentiæ in H, ut est rectangulum sub XC & HB ad rectan-  
 gulum sub VH & AC. Est enim ratio momenti resisten-  
 tiæ Solidi deinceps Cuneati hyperbolici in C ad momen-  
 tum resistantiæ ejusdem in H, composita ex rationibus  
 momenti in C ad momentum in G, & momenti in G ad  
 momentum in H. Et ratio momenti in C ad momentum  
 in G componitur ex rationibus rectanguli AGB ad rectan-  
 gulum ACB, plus quadrati CN ad quadratum GQ, id

Zzz ij

est, (ex proprietate hyperboles) rectanguli  $XCB$  ad rectangulum  $XGB$ . Sed ratio rectanguli  $AGB$  ad rectangulum  $ACB$ , eadem est quæ linearum  $AG$  ad  $AC$ , plus  $GB$  ad  $CB$ ; Ratio vero rectanguli  $XCB$  ad rectangulum  $XGB$ , eadem quæ linearum  $XC$  ad  $XG$ , plus  $CB$  ad  $GB$ : Et ratio  $GB$  ad  $CB$  destruit rationem  $CB$  ad  $GB$ : Ergo ratio momenti resistentiæ in  $C$  ad momentum in  $G$ , componetur ex rationibus  $AG$  ad  $AC$ , plus  $XC$  ad  $XG$ , quibus etiam componitur ratio rectanguli  $XC$ ,  $AG$  ad rectangulum  $XG$ ,  $AC$ . Eodem modo demonstrabitur rationem momenti resistentiæ in  $G$  ad momentum resistentiæ in  $H$ , eandem esse quæ rectanguli  $VG$ ,  $BH$  vel  $XG$ ,  $BH$  ad rectangulum  $VH$ ,  $AG$ : Ergo ratio momenti resistentiæ Solidi deinceps Cuneati hyperbolici in  $C$  ad momentum resistentiæ ejusdem in  $H$ , componetur ex rationibus rectangulorum  $XC$ ,  $AG$  ad  $XG$ ,  $AC$ , plus  $XG$ ,  $BH$  ad  $VH$ ,  $AG$ . Sed ista rationum compositio eadem est quæ compositio rationum rectangulorum  $XC$ ,  $AG$  ad  $VH$ ,  $AG$ , plus  $XG$ ,  $BH$  ad  $XG$ ,  $AC$ , id est, (propter communes altitudines  $AG$  &  $XG$ ) eadem quæ compositio rationum linearum  $XC$  ad  $VH$ , plus  $BH$  ad  $AC$ : Ergo momentum resistentiæ Solidi deinceps Cuneati hyperbolici in  $C$  ad momentum resistentiæ ejusdem in  $H$ , est in ratione composita ex rationibus linearum  $XC$  ad  $VH$  &  $BH$  ad  $AC$ , id est, rectanguli  $XC$ ,  $BH$  ad  $VH$ ,  $AC$ . Quod erat demonstrandum.

## PROPOSITIO DECIMA.

*Fig. 1. Tab. 18.* Quod si Trabs  $AE$  secetur per integram hyperbolam  $AKQNB$ , cujus axis sit  $GQ$ , transversa diameter  $QV$ , & opposita sectio  $IVZ$ ; erit adhuc intricatior ratio momenti resistentiæ Solidi hyperbolici  $AQBD RY$  in  $C$  ad momentum ejusdem in  $H$ . Si enim producantur lineæ  $CN$ ,  $HK$ , donec occurrant oppositæ sectioni in  $Z$  &  $I$ ; demonstrabitur rationem momenti in  $C$  ad momentum in  $H$ ,

eandem esse quæ rectanguli sub lineis  $I H$ ,  $C N$  ad rectangulum sub lineis  $Z C$ ,  $H K$ . Nam, ut supra, ostendetur rationem momentorum componi ex rationibus quadratorum  $C N$  ad  $H K$ , plus rectangulorum  $A H B$  ad  $A C B$ . Sed ex proprietate hyperboles rectangulum  $A H B$  ad rectangulum  $A C B$ , est ut rectangulum  $I H K$  ad rectangulum  $Z C N$ : Erit ergo ratio momenti in  $C$  ad momentum in  $H$  composita ex rationibus quadrati  $C N$  ad quadratum  $H K$ , & rectanguli  $I H K$  ad rectangulum  $Z C N$ . Rursus demonstratum est ab aliis idem esse compositum rationum quadrati  $C N$  ad quadratum  $H K$ , & rectanguli  $I H K$  ad rectangulum  $Z C N$ , quod compositum rationum quadrati  $C N$  ad rectangulum  $Z C N$ , id est, lineæ  $C N$  ad lineam  $Z C$ , & rectanguli  $I H K$  ad quadratum  $H K$ , id est, lineæ  $I H$  ad lineam  $H K$ : Est ergo ratio momenti resistentiæ Solidi hyperbolici in  $C$  ad momentum resistentiæ ejusdem in  $H$ , composita ex ratione lineæ  $C N$  ad  $Z C$ , plus ratione lineæ  $I H$  ad  $H K$ ; quibus etiam componitur ratio rectanguli  $I H$ ,  $C N$  ad rectangulum sub lineis  $Z C$ ,  $H K$ . Quod erat demonstrandum.

### PROPOSITIO UNDECIMA.

Denique, si Trabs  $A E$  per femi hyperbolam  $F K N B$  Fig. 2. Tab. 18. secetur, cujus Axis  $A F$ , transversa diameter  $F V$ , & opposita sectio  $V I Z$ , oriaturque alter Cuneus hyperbolicus  $A F N B G L D$ ; erit intricatissima ratio momentorum resistentiæ ejusdem in diversis punctis  $C$  &  $H$ . Nam si extendantur lineæ  $C N$ ,  $H K$ , ut in superiori propositione, donec occurrant oppositæ sectioni in  $Z$  &  $I$ , erit ratio momenti resistentiæ Cunei hyperbolici in  $C$  ad momentum ejusdem in  $H$ , composita ex rationibus rectanguli sub lineis  $I H$  &  $C N$  ad rectangulum sub lineis  $Z C$ ,  $H K$ , plus rectanguli sub compositâ ex tota  $A B$  & parte  $A C$  in lineam  $A H$ , ad rectangulum sub compositâ ex eadem  $A B$  & parte  $A H$  in lineam  $A C$ . Sit  $A Q$  æqualis  $A B$  ostende-

tur, ut suprà, momentum resistentiæ Cunei hyperbolici in C ad momentum ejusdem in H, esse in compositâ quadrati CN ad quadratum HK, & rectanguli AHB ad rectangulum ACB: Sed ratio quadrati CN ad quadratum HK componitur ex rationibus quadrati CN ad quadratum AF, & quadrati AF ad quadratum HK; ratio verò quadrati CN ad quadratum AF componitur rursus ex ratione quadrati CN ad rectangulum ZCN (id est, propter CN communem altitudinem,) lineæ CN ad lineam ZC, plus ratione rectanguli ZCN ad rectangulum QCB, id est (ex proprietate hyperboles) rectanguli VAF ad quadratum AB, plus ratione rectanguli QCB ad quadratum AB, plus ratione quadrati AB ad rectangulum VAF, & tandem plus ratione rectanguli VAF ad quadratum AF, id est, (propter AF communem altitudinem) lineæ VA ad lineam AF: Atqui ratio rectanguli VAF ad quadratum AB destruit rationem quadrati AB ad rectangulum VAF. Superest ergo ut ratio quadrati CN ad quadratum AF componatur ex rationibus lineæ CN ad lineam CZ, plus rectanguli QCB ad quadratum AB, plus lineæ VA ad lineam AF; quibus etiam componuntur rationes rectanguli VA, CN ad rectangulum CZ, AF & rectanguli QCB ad quadratum AB. Eodem argumento demonstrabitur rationem quadrati AF ad quadratum HK componi ex ratione rectanguli IH, AF ad rectangulum VA, HK, plus ratione quadrati AB ad rectangulum QHB: Ergo ratio quadrati CN ad quadratum HK componetur ex ratione rectangulorum VA, CN ad CZ, AF, plus QCB ad quadratum AB, plus quadrati AB ad rectangulum QHB, plus rectanguli IH, AF ad VA, HK; id est, ex rationibus rectangulorum VA, CN ad CZ, AF, plus QCB ad QHB, plus IH, AF ad VA, HK. Sed quod exurgit ex compositione rationum rectangulorum VA, CN ad CZ, AF, plus IH, AF ad VA, HK, æquale est ei quod exurgit ex compositione rationum rec-

angulorum  $V A$ ,  $C N$  ad  $V A$ ,  $H K$ , id est, ( propter  $V A$  communem altitudinem ) lineæ  $C N$  ad lineam  $H K$ , plus  $I H$ ,  $A F$  ad  $C Z$ ,  $A F$ , id est, ( propter  $A F$  communem altitudinem ) lineæ  $I H$  ad lineam  $C Z$ , quæ quidem conficiunt rationem rectanguli  $I H$ ,  $C N$  ad rectangulum  $C Z$ ,  $H K$  : Ergo ratio quadrati  $C N$  ad quadratum  $H K$  componetur ex rationibus rectangulorum  $I H$ ,  $C N$  ad  $C Z$ ,  $H K$ , plus  $Q C B$  ad  $Q H B$  : Ergo ratio momenti resistentiæ Cunei hyperbolici in  $C$  ad momentum ejusdem in  $H$  componetur ex rationibus rectangulorum  $I H$ ,  $C N$  ad  $C Z$ ,  $H K$ , plus  $Q C B$  ad  $Q H B$ , plus  $A H B$  ad  $A C B$  : Sed ratio rectanguli  $Q C B$  ad  $Q H B$  eadem est quæ linearum  $Q C$  ad  $Q H$ , plus  $C B$  ad  $H B$  ; ratio verò rectanguli  $A H B$  ad  $A C B$  eadem quæ linearum  $A H$  ad  $A C$ , plus  $H B$  ad  $C B$ . Quæ quidem ratio  $H B$  ad  $C B$  destruit rationem linearum  $C B$  ad  $H B$ . Est ergo momentum resistentiæ Cunei hyperbolici in  $C$  ad momentum ejusdem in  $H$ , in ratione compositâ rationum rectanguli  $I H$ ,  $C N$  ad rectangulum  $C Z$ ,  $H K$ , plus linearum  $Q C$  ad  $Q H$ , plus  $A H$  ad  $A C$ , ( id est, rectanguli  $Q C$ ,  $A H$  ad rectangulum  $Q H$ ,  $A C$ , ) id est, rectanguli sub lineâ compositâ ex  $A B$  &  $A C$  in  $A H$ , ad rectangulum sub compositâ ex eadem  $A B$  &  $A H$  in lineam  $A C$ . Quod erat demonstrandum.

### PROPOSITIO DUODECIMA.

Neque etiam ista momentorum æqualitas in Trabe, per *Fig. 3. Tab. 18.* quadrantem Circuli aut Ellipseos sectâ, reperietur. Nam si sub semidiametris  $A F$ ,  $A B$  quadrans Circuli aut Ellipseos  $F N K B$  describatur, qui secans Trabem  $A E$  producat Cuneum circularem aut ellipticum  $A F N K B G O D$ , sitque tota diameter  $B Q$ . Facile ostendetur momentum resistentiæ Cunei in  $C$  ad momentum ejusdem in  $H$ , esse ut rectangulum sub compositâ ex totâ  $A B$  & ex parte  $A C$  in  $H$ , ad rectangulum sub compositâ ex totâ  $A B$  & ex parte  $A H$  in  $A C$ . Nam ratio momenti resistentiæ Cunei ellip-

ptici seu circularis in puncto C ad momentum resistentiæ ejusdem in puncto H, componitur ex rationibus quadrati CN ad quadratum HK, plus rectanguli AHB ad rectangulum ACB. Sed propter Circulum aut Ellipſim quadratum CN est ad quadratum HK ut rectangulum QCB ad rectangulum QHB: Ergo ratio momenti resistentiæ in C ad momentum in H, componitur ex rationibus rectanguli QCB ad rectangulum QHB, plus rectanguli AHB ad rectangulum ACB, id est, (uti demonstratum est ab aliis) ex rationibus rectanguli QCB ad rectangulum ACB, plus rectanguli AHB ad rectangulum QHB; id est, (propter communes altitudines CB & HB) ex rationibus linearum AH ad QH, plus QC ad AC; quæ quidem faciunt rationem rectanguli AH, QC ad rectangulum AC, QH, seu rectanguli sub AH & compositâ ex totâ AB & parte AC, ad rectangulum sub AC & compositâ ex totâ AB & parte AH. Est ergo momentum resistentiæ Cunei circularis aut elliptici in C ad momentum ejusdem in H, ut rectangulum sub compositâ ex AB & AC in AH ad rectangulum sub compositâ ex AB & AH in AC, Quod erat demonstrandum.

Nunc verò (mi VV.) quanti æstimâris, si quis eam te figuram edoceat, quâ non tertia quidem ponderis & molis portio auferatur, sed illa saltem non exigua, momenta verò resistentiæ ubique in residuo supersint æqualia? Illud puto, gratissimum tibi erit, & tibi in mechanicis atque organicis assidue versanti, opis haud omnino contemnendæ. Sed quantò acceptius id erit tibi atque jucundius, quòd à viro tui amantissimo, & qui te magnopere colit, id contingeret? Enimverò iis quæ in nos amici conferunt beneficiis, nexu duplici nos obligari par est atque obstringi

#### PROPOSITIO DECIMA-TERTIA.

Age igitur, & quod sectioni parabolice, imò & hyperbolice, atque quadranti circuli aut ellipseos, denegavimus;

mus ; circulari profectò aut ellipticæ meritò concedamus : istæ enim sectiones id prorsus efficient , quod præstare Parabolam Galilæus perperam asseruerat.

Nam si duabus lineis  $A G$  vel  $G B$  &  $G Q$  tanquam semidiametris , describatur semicirculus  $A Q B$  , si eæ sint æquales ; vel semiellipsis , si sint inæquales ; & per hanc vel illam Trabs  $A E$  secundum altitudinem ita fecetur , ut fiat Solidum circulare , vel ellipticum  $A Q B T R S$  : Ejus sanè momenta resistentiæ erunt ubique æqualia , & quod pondus frangit in  $C$  Solidum utrinque fultum , illud etiam idem rumpet in  $H$ . Etenim momentum resistentiæ in  $C$  Solidi sive circularis sive elliptici , est ad momentum resistentiæ ejusdem in  $H$  , in ratione compositâ quadrati  $C N$  ad quadratum  $H K$  , & rectanguli  $A H B$  ad rectangulum  $A C B$  : Sed propter Circulum aut Ellipsim quadratum  $C N$  est ad quadratum  $H K$  , ut rectangulum  $A C B$  est ad rectangulum  $A H B$  : Ergo ratio momenti resistentiæ Solidi in  $C$  ad momentum ejusdem in  $H$  , componetur ex rationibus rectanguli  $A C B$  ad rectangulum  $A H B$  , & rectanguli  $A H B$  ad rectangulum  $A C B$  : Sed istæ rationes faciunt rationem æqualitatis : Ergo momenta in  $C$  & Herunt æqualia. Et hoc in omnibus Solidi punctis concludetur , unde patet ubique propositum.

Sic ( mi VV. ) petitioni tuæ satisfecisse me puto , nisi quòd hæc , quam ad te paucis verbis scribere cogitaveram , in ingentem ac penè fastidiosam molem , Epistola creverit. Sed hæc omnia ità exarare oportuit , tum ut rem tibi gratam faciam , si quidpiam boni tibi communicaverim , tum etiam ut habeas , quòd amicè me admoneas , si quid minùs cautè scripserim. Quippe non mirum profectò fuerit , iisdem me in grumis scrupisque collabi , in quos ipse Galilæus impegerit. Quare etiam atque etiam te rogo , ad me quamprimùm rescribe quid sentias , facis præsertim eà quâ soles sedulitate atque solertiâ experimentis. Ego verò non committam posthac ut de meâ ne-



SECOND DISCOURS.

OU

LETTRE AU SIEUR B.

*Pour la résolution de ses doutes sur les propositions du premier  
 Discours.*

**M**onsieur. Je vous suis parfaitement obligé du soin que vous avez pris, de me donner part des remarques qui ont été faites sur une Lettre, que j'écrivis il y a quelques années à un de mes Amis en Suede, & dont je vous avois laissé une copie, sur lesquelles il est bien raisonnable que je vous éclaircisse. Et pour y répondre par ordre & ne vous y laisser aucun sujet de douter, je veux premierement vous faire ressouvenir de ce que vous m'avez fait la grace de marquer, ou faire marquer par vos amis, à la marge de mon écrit, à côté des choses que je n'y avois pas assez clairement expliquées.

I.  
 Fig. 1. Tab. 17.

La premiere des remarques est sur la seconde Propo-  
 sition, où je dis que les momens de la résistance du Coin  
 ou Prisme triangulaire F A B G, que je suppose être sou-  
 tenu sur ses deux extrémités A & B, sont entr'eux, com-  
 me les rectangles sous les parties alternes de la base A B;  
 c'est-à-dire, que le moment de la résistance en C est au  
 moment en H, comme le rectangle des parties A H, C B  
 est au rectangle des parties A C, B H. Et pour le démon-  
 trer, je me sers de ces termes, que je rapporte en la Lan-  
 gue qu'ils sont écrits, parce que les notes sont aussi Lati-  
 nes: *Sed ratio momenti resistentiæ Cunei in C ad momentum*



*trabis in eodem C, est ex Galileo, ut quadratum C N ad*

quadratum  $CP$  seu  $AF$ , ( id est , ut quadratum  $CB$  ad quadratum  $AB$  ) componitur enim ex rationibus partium Solidi



contentarum in superficiebus  $CO$  &  $CI$ , quæ sunt inter se ut superficies , id est , ( propter communem altitudinem  $NO, IP$  ) ut lineæ  $CN, CP$ , & ex ratione distantiarum actionis earundem, quæ etiam sunt ut eadem lineæ  $CN$  &  $CP$ . Sur quoi dans le texte l'on a tiré des lignes, & fait des petites Croix, ainsi qu'il se voit ici. Et vis-à-vis de la première il est écrit à la marge, *Hoc falsum, est enim ut  $CN$  ad  $CP$  seu  $AF$ , ex Galilæo.* Et à l'endroit de la seconde, *Hoc non consideravit Galilæus, nec debet considerari in resistentiâ.* Un peu plus bas, où je dis sur la même Proposition : *Et tandem ratio momenti resistentiæ Trabis in  $H$  ad momentum resistentiæ Cunei in eodem  $H$ , est ut quadratum  $HM$  seu  $AF$  ad quadratum  $HK$ ,* il y a à la marge, *Falsum ob eandem rationem.*

La seconde est sur la troisième Proposition, où je dis : *Sed demonstrabitur ut supra momentum Cunei in  $C$  ad momentum ejusdem in  $G$ , esse in ratione compositâ quadrati lineæ  $CN$  ad quadratum lineæ  $GQ$ , & rectanguli,  $AGB$  ad rectangulum  $ACB$ .* Il y a à côté, *Falsum, sunt enim ut lineæ ut supra, & sic in sequentibus, quod ubique notandum. Hoc solummodò verum esset, si non solum trabs minueretur secundum unam dimensionem, ut in casibus Galilæi & censoris, ut patet ex omnibus ejus figuris, sed secundum duas dimensiones : At nullus hunc casum unquam inquisivit.*

Dans la quatrième Proposition, où j'explique la différence des momens de la résistance d'un Solide, que j'appelle Coin Parabolique, il y a à la marge : *Hæc & sequentia, in quibus aut dimidium, aut quadrans figuræ datur Trabi, superflua sunt ; cum satis pateat, quandoquidem trabs ex utraque extremitate sustinetur æqualiter, debere ex utraque parte trabem, figuram uniformem habere, non verò ex*

# 496 PROBLEME QUATRIEME.

*unà crassam, ex alià tenuem. Quare quæ de dimidiâ Parabola & Hyperbolâ, quæ de quadrante Circuli aut Ellipseos adducit, inutilia sunt; præterquamquod eodem semper Paralogismo omnia laborant.*

I V.  
Fig. 5, Tab. 17.

Dans la sixième Proposition, où il est parlé des momens de la résistance d'un Solide, que j'appelle Parabolique, il y a à côté : *Hæc figura suppositis supponendis est ea quam assignare debebant & Galilæus & Censor, abstrahenda scilicet à gravitate trabis, ut in hac omni inquisitione hypotheticâ abstrahi debet, alioquin fit Paralogismus. Multa notanda forent pro reductione ad praxim, si quis hæc aliter quàm hypotheticè vellet sumere, secundum enim materiae diversitatem pleraque falsa invenirentur, & vix ullius usus hoc esse potest, nisi in navibus, & aliis machinis, in quibus levitas consideranda foret.*

V.

A la fin de la douzième Proposition, où je dis : *Nunc verò (mi VV.) quanti æstimaris, si quis eam te figuram edoceat, quâ non tertia quidem ponderis aut molis portio auferatur, sed illa saltem non exigua.* L'on a écrit à côté : *Tertia pars è verâ figurâ auferatur.*

V I.  
Tab. 18.  
Fig. 45.

Enfin, lors que je dis dans la dernière Proposition, que *Momentum in C sive Elliptici Circularis Solidi, est ad momentum resistentiæ in H, in ratione compositâ quadrati CN ad quadratum HK & rectanguli AHB ad rectangulum ACB*, il y a encore à la marge, *Falsum.* Et où je dis ensuite : *Ergo momenta in C & H erunt equalia*, il y a encore, *falsum.*

Voilà, Monsieur, les Observations que j'ai trouvées dans l'écrit que vous m'avez renvoyé, & que j'ai marquées par nombres, afin de les sçavoir plus facilement distinguer l'une de l'autre dans le discours. Elles sont véritablement judicieuses & importantes, & si vraisemblables, qu'à moins de s'y appliquer sérieusement, & d'en faire une exacte discussion, il est mal-aisé de les résoudre, & de se développer de l'embarras qu'elles vous ont produit.

Pour les traiter avec quelque ordre, il paroît que la 1. 2. 5. & 6. sont celles qui contiennent le nœud de la difficulté, sur lesquelles il faudra par conséquent que je m'étende un peu davantage que sur les autres. Car pour la 3. où l'on dit que toutes les Propositions où je parle des Poutres, qui ne reçoivent que la moitié ou le quart de la figure, sont superflues, puis que l'on voit assez que la Poutre étant soutenue par ses deux bouts, doit avoir une figure uniforme, & n'être pas grosse par une extrémité, & menuë par l'autre; en sorte que tout ce que j'ai rapporté de la demy-Parabole, de la demi-Hyperbole, & du quart de Cercle, ou d'Ellipse, est absolument inutile.

Il me semble que j'ai quelque droit de dire, que je ne vois pas bien qu'il paroisse si clairement comme vous dites, qu'une Poutre soutenue des deux bouts doive être de figure uniforme, puis, qu'à mon avis, deux murs se peuvent rencontrer d'une inégale épaisseur, & dont l'un seroit assez fort pour porter le plus gros bout d'une Poutre inégale; & l'autre plus foible ne pourroit souffrir le poids que d'un plus alégé: Et la question pourroit cependant être faite sur cette hypothese; Quels seroient les momens de la résistance de cette Poutre, selon la difference de ses parties?

Outre qu'ayant été proposé sous une de ces figures par M. Galilée, sçavoir sous celle de la demi-Parabole, que j'ai appelée Coin Parabolique; il étoit bien juste que je parlasse des veritables proportions des momens de la résistance de ce Solide, pour faire voir en quoi, & de combien il s'étoit équivoqué dans celles qu'il lui avoit attribuées.

Joint qu'enfin, si nous en croyons les anciens Maîtres du Métier, c'est faire injure à la dignité des Sciences Speculatives, que de ne mesurer leur estime qu'à l'utilité que les Ouvriers en reçoivent, quand ils appliquent à la matiere, & avec les imperfections qui l'accompagnent in-

séparablement, la subtilité de leur doctrine & de leurs démonstrations.

Et pour la 4<sup>e</sup> remarque où vous dites que le Solide Parabolique, duquel je parle dans ma 6<sup>e</sup> Proposition, est celui que nous devions avoir proposé & M. Galilée & moi, je n'ai rien à y répondre, puisqu'il paroît que j'y ai satisfait de ma part en le considérant, & que je ne suis pas responsable des faits de M. Galilée. Que si l'on dit que nous le devions rapporter tout seul, sans parler aucunement des autres; je me remets à ce que je viens de dire sur la 3<sup>e</sup> Observation, & à ce qui sera ci-dessous expliqué sur toutes les autres.

L'on dit ensuite qu'il faut faire abstraction du propre poids du Solide dans toutes mes Propositions, comme dans celle de M. Galilée, puis qu'autrement il y auroit Paralogisme. J'en demeure d'accord aussi-bien que M. Galilée, qui s'en est assez fait entendre avant que d'entrer en cette matiere, quand il dit : *Quello che ricerca più sottile specolazione è quando astraendo d'alla gravità propria di tali Solidi, ci fusse proposto di dover investigare, se quella forza o peso che applicato al mezo d'un Cilindro sostenuto nelle estremità, basterebbe à romperlo, potrebbe far l'istesso applicato in qualsivoglia altro luogo più vicino all'una che all'altra estremità.* Et comme je n'ai fait que marcher sur les pas, j'ai crû que je pouvois librement supposer toute la doctrine, sans être obligé de remplir mon papier de ce qui se trouvoit pleinement expliqué dans son Livre.

Enfin, sur ce que l'on ajoûte qu'il y auroit beaucoup de choses à remarquer, si l'on vouloit mettre ces Propositions en pratique, & que la diversité de la matiere y feroit trouver beaucoup de déconte : Comme c'est une plainte qui s'est faite de tout temps contre les Propositions Mathématiques, que l'imbecillité de la matiere ne peut jamais recevoir ni souffrir avec exactitude; je me tiens à ce qui y a été répondu par les Grands Hommes des

siècles passés, & à ce que l'expérience nous enseigne de la perfection des Arts, qui n'ont d'excellence, qu'autant que leurs Ouvrages se trouvent approcher de plus près de la beauté des Idées, que les démonstrations de la Théorie ont produites.

Je dirai seulement, sur ce que l'on a écrit, que toutes ces méditations ne peuvent gueres avoir d'autre usage qu'aux Navires, & aux autres machines mobiles, où l'on recherche la légèreté : Que cela n'est pas tout-à-fait le sentiment de quelques personnes assez entendues au Bâtiment, à qui je me souviens d'avoir ouï dire, que si ce n'étoit le ver qui ronge le bois, ils aimeroient beaucoup mieux se servir de Poutres de sapin, dans les lieux où l'humidité n'est pas à craindre, que de celles de Chesne, seulement parce que celles-là ne chargent pas tant les murailles que celles-ci.

Toutes les autres remarques, qui contiennent en effet le nœud de la difficulté, & qui sont quasi toutes d'un même sens, & fondées sur un même principe, disent que les momens de la résistance en un même point, tant de la Poutre que du Solide qui lui est inscrit selon sa hauteur, ne sont pas entr'eux, comme les Quarrez des lignes perpendiculaires à la base commune, comprises & en l'une & en l'autre, ainsi que je l'ai rapporté de M. Galilée, mais qu'ils sont seulement dans la raison de ces mêmes lignes, c'est-à-dire, que les momens de la Poutre & du Solide Parabolique, par exemple en C, ne sont pas, selon Galilée, comme les Quarrez des lignes CP & CN, mais seulement comme ces mêmes lignes CP & CN : Puisque M. Galilée n'y a aucunement considéré la quantité des parties, qui se doivent séparer l'une de l'autre, dans les surfaces CI & CO ; & qu'en cette sorte de résistances, on n'y doit avoir aucun égard. Qu'au reste, cela seroit bon, s'il se faisoit diminution de plus d'une dimension dans ces Solides, & non pas d'une seule, comme il paroît dans

Fig. 5. Tab. 17.

# 500 PROBLEME QUATRIEME.

toutes mes figures, personne n'ayant jamais recherché ce qui arriveroit en l'autre cas.

Sur quoi je dois vous dire premierement, que quelque soin que j'aye pris de relire mon Galilée, je n'ai pas pu comprendre par aucun de ses raisonnemens, qu'il ait jamais eu la pensée ( non pas même dans l'hypothese, que ses Solides soient fichez par un bout, & que le poids pende librement à l'autre ) de dire que les momens de la résistance de la Poutre & d'un Solide inscrit, fussent en un même point entr'eux, comme les lignes perpendiculaires à la base commune, comprises en l'un & en l'autre; puisque dans la démonstration qu'il fait du Prisme triangulaire, il dit bien que le moment de sa résistance en C est au moment de sa résistance en A, comme la ligne CB est à la ligne BA, ou comme CN est à AF ou CP; mais il ne dit pas que le moment de la résistance du Prisme triangulaire en C, soit au moment de la résistance de la Poutre AE au même point C, comme la ligne CN est à la ligne CP.

Fig. 1. Tab. 17. Et dans celle qu'il rapporte du Solide Parabolique, il n'a jamais voulu que le moment de sa résistance, par exemple en C, soit au moment de la résistance de la Poutre AE au même point C, comme la ligne CN est à la ligne CP: mais au contraire, que le moment de la résistance du Coin Parabolique en C, est à son moment en A, comme le quarré de CN est au quarré de AF ou CP; puisqu'il ne peut pas autrement démontrer que les momens de la résistance en A & C, & par tout ailleurs, sont égaux, s'il ne suppose que la Composition des raisons de la résistance de AD & CO, & de leurs distances, ( qui sont entre elles comme les moitez des lignes AF & CN ) est égale à la Composition des raisons de la même puissance pendante en B, & agissante tantôt avec la distance AB, & tantôt avec la distance CB, lesquelles sont entr'elles comme les quarez des lignes AF ou CP & CN.

Je dis même dans l'Hypothese de M. Galilée, qui veut par

DE LA COUPE DES POUTRES EGLEMENT RESIST. 501  
 par sa démonstration qu'en l'une & en l'autre des Figures le Solide soit fiché dans la muraille par un bout, tantôt en A & tantôt en C; & que l'autre extrémité B, à laquelle le poids est attaché, soit toujours libre en l'air, sans être aucunement soutenuë. Bien loin de l'avoir dit dans l'autre supposition, qui veut que les Solides soient soutenus par les deux extrêmes, & que la puissance agisse entr'eux, ou qu'ils soient appuyez en quelque point entre lesdits extrêmes, sur lesquels la puissance fasse son effort: Et dans cette supposition il n'a jamais rien dit d'approchant sur cette matiere.

Je ne sçais pas aussi sur quel fondement l'on a pû dire que M. Galilée n'a jamais considéré dans la résistance les parties qui se doivent séparer l'une de l'autre dans les surfaces C I & C O, puisqu'il n'y a rien qu'il ait plus particulièrement expliqué.

Et il faut à ce propos que je vous avertisse en passant d'une difficulté qui se rencontre dans son premier Livre, où voulant enseigner une maniere tout-à-fait ingénieuse pour sçavoir la mesure de la plus grande longueur à laquelle les Verges ou Cylindres de toutes sortes de grosseur & de matiere, se peuvent étendre sans se rompre d'eux-mêmes.

*Pigliſi ( dit-il ) per eſſempio un fil di rame di qualſivoglia groſſezza è lunghezza , è fermato un de i ſuoi capi ad alto , ſi vadia aggiugnendo all' altro maggior è maggior pezo , ſi che finalmente ſi ſtrappi , è ſia il peſo maſſimo che poteſſe ſoſtenere , V. G. cinquanta libre . E' maſiſto che cinquanta libre di rame oltre al proprio peſo , che ſia per eſſempio un ottavo d'oncia , tirato in filo di tal groſſezza , ſarebbe la lunghezza maſſima del filo che ſe ſteſſo poteſſe reggere . Miſuriſi poi quanto era lungo il filo che ſi ſtrappò , è ſia V. G. un braccio . E' perche peſo un ottavo d'oncia , è reſſe ſe ſteſſo è cinquanta libre appreſſo che ſono ottavi d'oncia quattro mila ottocento : Diremo tutti i fili di rame di qualunche ſia la lor groſſezza , poterſi*

*Rec. de l'Ac. Tom. V.*

Bbb b



*reggere fino à la lunghezza di quattro mila ottocento è un braccio, è nò più.*

La difficulté consiste, en ce qu'il ne se voit pas bien clairement qu'il ait dû, d'une expérience singuliere, sur un fil d'une grosseur déterminée, tirer une conséquence si générale qu'il a faite par ces mots, *Diremo tutti i fili di rame*, &c. Ce qui est pourtant véritable, parce que tous ces fils ou Cylindres étant de même longueur, ils sont entr'eux comme leurs bases, & partant les poids qui sont entr'eux comme les Cylindres seront en la même raison de leurs bases; mais les résistances sont aussi en même proportion des bases; donc les poids & les résistances seront en même raison, & les poids seront à leur résistance, chacune à la sienne, en même proportion: Mais l'un de ces poids est supposé égal à sa résistance par la construction; Donc tous les autres poids seront aussi égaux à la résistance de leurs Cylindres, prise en la maniere qu'ils se répondent l'un à l'autre.

Mais laissant ce discours, qui sera beaucoup mieux éclairci dans la suite, il faut maintenant venir au fait, & vous bien faire connoître deux choses; la premiere, que j'ai eu juste sujet de dire que M. Galilée a pu s'être laissé surprendre, non pas en démontrant, selon son hypothese, que les momens de la résistance de son Solide Parabolique en tous ses points sont égaux, & que ce qui reste de la Poutre après que ce Solide en est ôté, fait justement la troisième partie de la Poutre; mais en ce qu'ayant fort bien démontré l'une & l'autre de ces deux propriétés dans un Solide fiché par un bout & l'autre libre, il a crû qu'il pouvoit en attribuer la premiere au même Solide lorsqu'il seroit soutenu par ces deux bouts.

L'autre, que j'ai légitimement démontré les véritables propriétés des Solides, que j'ai considerez dans mon Livre, & que je n'ai fait aucun Paralogisme, quand j'ai supposé de la doctrine de M. Galilée, que les momens de

la résistance du Solide inscrit & de la Poutre en un même point, lorsque l'un & l'autre étoient soutenus par les deux bouts, sont entr'eux comme les quarrés des lignes perpendiculaires à leur base commune, comprises en l'un & en l'autre.

Et pour vous ôter tout scrupule sur ces deux choses, il faudra vous rapporter plusieurs passages du Livre de M. Galilée, afin que vous n'ayez pas la peine de les y aller chercher, & vous entretenir un peu au long de sa doctrine, & de ses Propositions sur le sujet present de la résistance des Solides.

Il tire donc ses premieres idées de la confusion où se trouvent ordinairement les Ouvriers, qui ne rencontrant pas dans les grandes Machines, des effets proportionnez à ceux que les petites Machines, semblables aux premières, ont accoutumé de produire; & voyant au contraire que les plus vastes, & celles, dont les pièces qui la composent, sont de plus grande étendue, ont beaucoup moins de force pour résister aux insultes des accidens du dehors, à proportion que les plus petites & celles dont les membres sont plus resserrez, quoiqu'ils soient entre eux en la même raison que les parties des plus grandes; ils en rapportent la cause à l'inégalité de la matiere, & à l'imperfection de l'Art, comme si des causes si foibles pouvoient suffire à la production des effets si differens, & d'une si énorme difformité.

Mais M. Galilée considerant la chose d'une autre maniere, & après une méditation, comme il dit de plusieurs années, a cru à la fin en avoir trouvé les veritables raisons; & argumentant à la façon des Géomètres, & sur les anciens principes de la Méchanique, il est le premier qui ait fait connoître, que les résistances des Solides, c'est-à-dire, la force qu'ils ont d'eux-mêmes à soutenir leur propre poids, & résister à la violence des coups du dehors, ne marchent pas entr'elles avec les mêmes proportions

que les gravitez des mêmes Solides : & que celles-ci s'augmentant en la raison , & à mesure que les corps pesans d'une même matiere s'agrandissent ; la résistance au contraire suivoit une bien moindre proportion , & elle se trouvoit beaucoup affoiblie dans les grands corps , & bien moins capable de soutenir des efforts , qu'elle n'étoit à proportion dans les moindres.

Je serois trop long , si je voulois vous raconter tout ce qu'il a admirablement écrit sur cette matiere : aussi je me contenterai de vous rapporter ce qui fait à mon sujet , & vous dire premierement ; Que supposant , par exemple , un Cylindre attaché en haut par un de ses bouts , & un poids pendant à l'autre , qui soit petit à petit augmenté de telle sorte qu'il devienne à la fin assez fort pour rompre le Cylindre : Ce poids que j'ai supposé le plus grand de tous ceux que le Cylindre puisse soutenir sans se rompre , joint au propre poids du Cylindre , s'appelle par M. Galilée , *La mesure de la résistance absolue de ce Cylindre*, laquelle consiste en la tenacité & attachement des parties contenues dans les surfaces qui se doivent séparer l'une de l'autre par la rupture , & en l'effort que chacune fait en particulier pour demeurer liée & adhérente à ses voisines.

Ensuite il dit, que si un Cylindre ou Prisme est fiché par un bout perpendiculairement dans une muraille qui soit à plomb , & qu'à son autre bout on attache le plus grand poids qu'il puisse soutenir sans se rompre , ( faisant abstraction de la propre Gravité du Cylindre ) ce poids s'appelle , *B. La mesure du momens de la résistance du Cylindre en cette position* ; & la résistance absolue est à ce moment de la résistance , comme la longueur du Cylindre est à la moitié du diamètre de la base.

*Fig. 1. Tab. 19.* De plus , pour démontrer que les momens de la résistance des Prismes ou Cylindres de même longueur & de différente grosseur , comme A & B , fichez , comme il a été dit ci-dessus , dans une muraille , sont entr'eux com-

DE LA COUPE DES POUTRES EGLEMENT RESIST. 509  
 me les Cubes des diamètres de leurs bases  $CD$ ,  $EF$ , il se sert de ces mots : *Imperò che se consideriamo l'assoluta è C. semplice resistenza che risiede nelle basi, cioè ne i cerchi  $EF$ ,  $CD$ ; all' essere strappati facendogli forza col tirargli per dritto, nè è dubbio che la resistenza del Cilindro  $B$  è tanto maggiore che quella del Cilindro  $A$ , quanto il cerchio  $EF$  è maggiore del  $CD$ , perche tanto più sono le fibre, i filamenti ò le parti tenaci che tengono unite le parti de i solidi. Mà se consideriamo che nel far forza per traverso ci serviamo di due leve, delle quali le parti ò distanze dove si applicano le forze sono le linee  $DG$ ,  $FH$ ; i sostegni sono ne i punti  $DF$ : Mà le altre parti ò distanze dove son poste le resistenze, sono i semidiametri de i cerchi  $DC$ ,  $EF$ ; perche i filamenti sparsi per tutte le superficie de i cerchi, è come se tutti si riducessero ne i centri. Considerando, dico, tali leve, intenderemo la resistenza nel centro della base  $EF$  contro alla forza di  $H$ , essere tanto maggiore della resistenza della base  $CD$  contro alla forza posta in  $G$ , (è sono le forze in  $G$  &  $H$  di leve eguali  $DG$ ,  $FH$ ) quanto il semidiametro  $FE$  è maggiore del semidiametro  $DC$ : Cresce dunque la resistenza all' essere rotta nel Cilindro  $B$  sopra la resistenza nel Cilindro  $A$ , secondo amendue le proportioni de i cerchi  $EF$ ,  $DC$  è de i lor semidiametri, &c. c'est-à-dire, en raison triplée des diamètres.*

Ce que j'ai bien voulu vous rapporter tout au long, pour faire voir que M. Galilée a toujours considéré dans les momens de la résistance des Solides, & les parties contenues dans les surfaces qui doivent être séparées, & la distance de leur action; ne voulant pas m'arrêter présentement à vous expliquer à fonds cette proposition, qui prise en un sens & crûement, est paralogistique; me réservant à vous en entretenir plus au long une autre fois, d'autant plus volontiers, que cette réflexion ne fait rien du tout à notre sujet.

Monsieur Galilée rapporte par après quantité de merveilleuses proprietés des Cylindres de toutes sortes de

grosſeur & de longueur, égaux & inégaux, ſemblables & diſſemblables; & toujours dans la même hypothèſe, qu'ils ſoient attachez par un bout à un mur, & que l'autre s'étende librement en l'air, ſans être ſoutenu d'aucune choſe.

Après quoi il entre en une autre conſidération à leur égard, & recherchant ce qui arrive aux Cylindres ſoutenus ſur les deux bouts, ou ſur un point pris entre les extré-

D. mitez, il dit: *Che il Cilindro che gravato dal proprio peſo ſara ridotto alla maſſima lunghezza oltre alla quale più non ſi ſofterrebbe, ò ſia retto nel mezzo da un ſol ſoſtegno, ò verò di due nell'eſtremità potrà eſſer lungo il doppio di quello che ſarebbe fitto nel muro, cioè ſoſtenuto in un ſol termine. Il che per ſe*

Fig. 2. Tab. 19. *ſteſſo è aſſai manifeſto, perche ſe intenderemo del Cilindro ch'io ſegno  $ABC$ , la ſua metà  $AB$  eſſere la ſumma lunghezza po-  
tente à ſoſtenerſi ſtando fiſſa nel termine  $B$ , nell' iſteſſo modo ſi ſofterrà ſe poſita ſopra il ſoſtegno  $G$  ſara contrapeſata d'al-  
tra ſua metà  $BC$ . E' ſimilmente ſe del Cilindro  $DEF$  la  
lunghezza ſara tale, che ſolamente la ſua metà poteſſe ſoſte-  
nerſi fiſſa nel termine  $D$ , è in conſequence l'altra  $EF$  fiſſa nel  
termino  $F$ , è manifeſto che poſti i ſoſtegni  $HI$  ſotto le eſtremità  
 $DF$ , ogni momento che ſi aggiunga di forza ò di peſo in  $E$ ,  
quivi ſi farà la rottura.*

Et paſſant outre par ſes méditations, il recherche, en faiſant abſtraction du propre poids des Cylindres, quelle proportion les uiſſances ont entr'elles, qui peuvent rompre les Cylindres, appuyez ſur les deux extrêmes & faiſant leur effort ſur le milieu, ou ſur un autre point qui ſoit plus proche d'un bout que de l'autre. Sur quoi il démon-  
tre que ces uiſſances, qu'il appelle autrement les momens

E. de la réſiſtance du Cylindre, ſont entr'elles en propor-  
tion réciproque des rectangles faits des parties du côté,  
contenues entre les extrémités & le point où les uiſſan-  
ces agiſſent; c'eſt-à-dire, qu'au Priſme ou Cylindre  $AB$ ,  
ſoit qu'il ſoit ſoutenu tantôt en  $C$ , & tantôt en  $D$ , & que  
la uiſſance agiſſe des extrêmes  $A$  &  $B$ , ſoit qu'il ſoit ſou-

DE LA COUPE DES POUTRES EGALÉMENT RESIST. 507

tenu sous ses extrêmes A & B, & que la puissance fasse ses efforts tantôt au point D, tantôt en C; le moment de la résistance en D est au moment de la résistance en C, comme le rectangle A C B est au rectangle A D B.

D'où il paroît, dit-il, qu'en tout Prisme ou Cylindre, le moment de la résistance qu'il a dans son milieu, est le moindre de tous, & que ces momens s'augmentent toujours à mesure qu'ils s'éloignent du milieu, & qu'ils approchent de l'un ou de l'autre des extrêmes, & que nelle F.  
*travi grandissime è gravi se ne potrebbe levar nè piccola parte verso l'estramità con notabile alleggerimento di peso, che ne i travamenti di grandi stanze, sarebbe di commodo è utile non piccolo. E' bella cosa sarebbe il ritrovar quale figura deurebbe haver quel tal solido, che in tutte le sue parti fusse egualmente resistente, tal che nè più facile fusse ad essere rotto da un peso che lo premesse nel mezzo che in qualsivoglia altro luogo.*

Après quoi il dit immédiatement, que comme il a dé- Fig. 1. Tab. 17.  
montré que la résistance du Prisme Quadrangulaire D B dans son extrémité A D contre une force agissante en B, est à sa résistance en C I contre la même puissance en B, comme la ligne C B est à la ligne A B, c'est-à-dire, comme C N est à A F. Et qu'au Prisme Triangulaire inscrit G.  
F A B G D, la résistance en A D contre la force en B, est (ainsi qu'il le démontre en ce même endroit) à sa résistance en C O contre la même force en B, comme la ligne A B est à C B, ou comme A F est à C N: *Habbiamo dunque (dit-il) nel trave ò Prisma D B levatone una parte, cioè la metà segandolo diagonalmente, è lasciato il Cuneo ò Prisma triangolare F B A; è sono due solidi di conditioni contrarie, cioè quello tanto più resiste quanto più si scorcia, è questo nello scorciarfi perde altrettanto di robustezza. Orà stante questo par ben ragionevole, anzi pur necessario che se gli possadar un taglio, per il quale togliendo via il superfluo rimanga un solido di figura tale, che in tutte le sue parti sia egualmente resistente.*

Fig. 1. Tab. 17.

Et puis il démontre fort bien ensuite, que si la Poutre D B est coupée par une ligne Parabolique F N B, qui fasse le Solide inscrit F A B G, sa résistance en A D contre la force en B, sera égale à la résistance en C O contre la même puissance en B, & ainsi par tout ailleurs. *Di qui si vede, dit-il, come con diminuzione di peso di più di trentatré per cento, si possono fare i travamenti senza punto diminuir la loro gagliardia, il che ne i navigli grandi in particolare per reggere le coperte può essere d'utile non piccolo, atteso che in cotale fabriche la leggerezza importa infinitamente. Sagr. Le utilità son tante che lungo è impossibil sarebbe il registrarle tutte.*

Ce sont-là les passages du Livre de M. Galilée, dont j'avois besoin pour mon sujet, que j'ai cottez par lettres Capitales, & d'où vous pouvez facilement connoître qu'il a crû que les Poutres & les Solides triangulaires, dont il a recherché les propriétés, devoient être soutenus par les deux extrêmes, & souffrir l'effort des puissances pressantes sur différentes parties entre les bouts, puisque les textes cottez F & H vous empêcheront d'en douter, aussi-bien que tout le raisonnement qui les précède.

Et que néanmoins dans la démonstration qu'il en a faite, il les a absolument supposé fichés par un bout & libres par l'autre, puisqu'il dit clairement, que dans le Prisme D B la résistance en A D contre une force en B, étoit à la résistance en C I contre la même puissance en B, comme la ligne C B est à la ligne A B. Ce qui dans cette hypothèse peut être démontré de cette manière: Et supposé ce qui a été enseigné par d'autres; Que si deux raisons ont un même antécédent, elles seront entre elles comme réciproquement les termes conséquens. Maintenant, la résistance étant la même dans les surfaces A D & C I; les raisons de la résistance A D contre une force en B agissante avec la distance A B, & de la résistance C I contre la même force en B agissante avec la distance C B, auront un même antécédent, sçavoir cette résistance

AD

AD ou CI ; & partant elles seront entre elles comme réciproquement les termes conséquens ; c'est-à-dire , que la résistance AD contre une force en B , sera à la résistance CI contre la même force en B , comme la force en B agissante avec la distance CB , est à la même force en B agissante avec la distance AB. Mais comme dans ces momens la force est la même , ils seront comme les distances de leur action , c'est-à-dire , comme la ligne CB à la ligne AB : Donc la résistance en AD contre une force en B , sera à la résistance en CI contre la même force en B , comme la ligne CB est à la ligne AB.

Que si quelqu'un vouloit soutenir avec opiniâtreté, que Fig. 1. Tab. 17.  
M. Galilée a supposé dans sa démonstration que le Prisme DB fut soutenu par ses deux extrêmes , il ne faudra que prendre un autre point comme H , & dire en cette manière : Le moment de la résistance en C du Prisme DB , est au moment du même Prisme en A , comme AB est à CB par l'hypothèse de la démonstration de M. Galilée ; & par la même raison le moment en A est au moment en H , comme la ligne HB est à AB : Donc par égalité le moment de la résistance en C du Prisme DB soutenu sur ses deux bouts , sera au moment en H , comme la ligne HB est à CB. Mais par une autre démonstration cottée cy-dessus par la lettre E , il a fait voir dans la même hypothèse que la résistance du Prisme DB en C étoit à la résistance en H , comme le rectangle AHB est au rectangle ACB : Donc le rectangle AHB sera au rectangle ACB comme la ligne HB est à la ligne CB ; ou , en prenant AC pour hauteur commune , comme le rectangle AC , HB au rectangle ACB : & par conséquent le rectangle AC , HB sera égal au rectangle AHB , & la ligne AC égale à la ligne AH , la parrie au tout. Ce qui est absurde.

J'ai donc eu raison de dire que la démonstration de M. Galilée ne convient pas à sa supposition ; & qu'encore qu'il



eût fort bien démontré que certaines propriétés appartiennent aux Solides fîchez par un bout, & 800 livres par l'autre, il n'a pas eût pour cela aucun droit de dire qu'elles dûssent être énoncées des mêmes Solides qui seroient soutenus par les deux bouts.

Pour la solution de l'autre difficulté que j'ai gardée pour la dernière, parce que c'est celle de laquelle il paroît que l'on doute le plus, puis qu'en toutes les propositions où elle est supposée, l'on la traite de faux & de paralogisme. Je veux dire, pour démontrer que les momens de la résistance en un même point de la Poutre & du Solide, qui lui est inscrit selon sa hauteur, sont entre eux comme les quarrés des lignes perpendiculaires sur leurs bases communes, qui sont comprises en l'une & en l'autre, c'est-à-dire, comme les quarrés de leurs hauteurs au même point.

Il faut premièrement se souvenir, ainsi qu'il est dit dans le discours cotté cy-dessus par la lettre B, que la résistance absolue d'un Prisme fiché perpendiculairement par un de ses bouts dans un mur, est au moment de la résistance du même Prisme en cette situation, (faisant abstraction de la Gravité) comme la longueur du Prisme est au demi-diamètre de sa base.

Secondement, Que les résistances absolues des Solides semblables & de même matière, sont entre elles comme leurs bases; comme il est dit au discours cotté A.

Troisièmement, Qu'un Cylindre ou Prisme, au texte cotté D, reçoit les mêmes propriétés pour sa résistance, soit qu'il soit posé sur ses extrêmes & que la force agisse en différens endroits entre les bouts, ou qu'il s'appuie en quelque part entre les bouts, & que la puissance fasse son effort sur les extrêmes; puisque c'est de cette sorte que M. Galilée l'a entendu, & qu'il s'en est clairement expliqué dans les discours rapportez cy-dessus au même texte D.

Fig. 3. Tab. 19.

Joint que sa proposition, par laquelle il démontre au

# DE LA COUPE DES POUTRES EGALEMENT RESIST. 511

reste corté E, que les momens en D & C du Prisme ou Cylindre A B, aux extrémités duquel A & B, les poids ou puissances agissent, & qui est appuyé tantôt en D, tantôt en son milieu C, sont entre eux comme le rectangle A C B est au rectangle A D B : Cette Proposition, dis-je, se peut aussi, suivant son même raisonnement démontrer dans l'autre hypothèse, qui veut que le Prisme ou Cylindre soit soutenu en A & B, & que les poids & les puissances agissent tantôt en D, tantôt en C : Car supposant le poids F, qui est égal à la résistance en D, être divisé en deux parties I & H, de telle sorte que I soit à H, comme la ligne D B est à la ligne D A, ( afin que le poids I soit égal au moment de la résistance du Prisme A D fiché en A, & le poids H égal au moment de la résistance du Prisme D B fiché en B ), & le poids E, qui est égal à la résistance en C, être divisé en deux moitiés, dont l'une soit G ; le poids E sera au poids F, c'est-à-dire, la résistance en C à la résistance en D, en raison composée du poids E au poids G, du poids G au poids H, & du poids H au poids F. Mais le poids E est au poids G, comme la ligne A B est à C B ; le poids G est au poids H, comme la ligne D B est à C B ; & le poids H est au poids F, comme la ligne A D est à A B : Donc le poids E sera au point F, en raison composée de la ligne A B à la ligne C B, de la ligne D B à la ligne C B, & de la ligne A D à la ligne A B : Mais les raisons des lignes A D à A B & A B à C B, sont égales à la raison de la ligne A D à C B : Donc la raison du poids E au poids F, ou du moment en C au moment en D, sera composée des raisons de A D à C B & de B D à C B ; c'est-à-dire, comme le rectangle A D B au carré C B, ou au rectangle A C B.

Quatrièmement, Il est bon de prendre garde qu'en matière de résistance des Solides, où l'on fait abstraction de leur propre gravité, la variété de leurs figures ne fait effet qu'en tant qu'elles déterminent plus ou moins la distance de l'action de la puissance qui agit contre la résistance, &

la grandeur de la surface où se doit faire la rupture, laquelle contient plus ou moins de parties, qui se doivent séparer. Je veux dire, que dans le Solide  $ABE$ , le moment de la résistance en  $C$ , n'est aucunement altéré, quelle irrégularité de figure que l'on donne au Solide, comme celle de  $APXB$ ; pourvu que le point  $C$ , soit toujours en tous les cas, distant en la même maniere des extrêmes  $A$  &  $B$ , & que la surface  $CPI$ , qui contient les parties qui doivent être divisées l'une de l'autre, soit toujours la même. Et cela est à mon avis assez facile à comprendre, puisque les deux choses, en quoi les Solides sont differens l'un de l'autre, comme sont leurs formes ou figures & leurs propres poids, l'une n'entre point en considération dans les momens de la résistance, & il est fait abstraction de l'autre. Et les deux choses au contraire sur qui roulent toutes les raisons des résistances, c'est à-dire, la longueur des leviers, & la quantité & situation des parties résistantes, dans les surfaces où la rupture se doit faire, y demeurent égales, ou plutôt les mêmes en tous les cas.

En sorte que l'on pourra facilement juger, que pour déterminer le moment de la résistance en  $C$  du Solide difforme  $APXB$ , il suffira de faire connoître celui du Prisme  $AE$  au même point  $C$ , dont la longueur  $AB$  est commune, aussi-bien que la surface  $CPI$ , qui est perpendiculaire à la ligne  $AB$ , & où se doit faire la rupture sur le point  $C$ .

Cinquièmement, Puisque par le discours de M. Galilée cotté cy-dessus  $D$ , il paroît qu'un Prisme, soutenu par ses deux bouts ou seulement en son milieu, & qu'on suppose étendu jusqu'à sa plus grande longueur, sans qu'il se rompe de son propre poids, est le double de celui, qui n'étant fiché que par un bout, sera aussi alongé autant qu'il se peut sans se casser. Comme si le Prisme  $AB$ , soutenu sur son milieu  $C$ , est supposé être étendu en sa plus grande longueur, sans qu'il se rompe en cette situation, il est, dit M. Galilée, le double du Prisme  $CB$ , qui

attaché par un de ses bouts en C, sera aussi étendu autant qu'il le puisse être pour se soutenir : Puisqu'en certe hypothese le contrepoids que fait toute la partie A C pour tenir en équilibre le Prisme C B, fait à son égard le même effet que si le susdit C B étoit fiché dans le mur en C, ne pouvant pas se mouvoir sur le point C, tant en l'un qu'en l'autre cas, sans se rompre.

Maintenant, si nous prenons la moitié du côté C B comme C E, & faisant abstraction de sa propre Gravité, que nous supposerons être entièrement ôtée ; si nous appliquons en E le poids I, qui soit égal à toute cette gravité du Cylindre C B ; il est constant qu'il fera le même effet qu'auparavant : Et si prenant tout autre point comme D, nous y mettons le poids K, qui soit au poids I, comme la ligne C E est à la ligne C D ; il est encore manifeste que les choses demeureront au premier état, & que le poids K agissant en D avec la distance C D, sera égal à la résistance du Prisme C D contenuë dans la surface C P, soit que le Prisme C D soit fiché dans le mur en C, soit qu'il soit arrêré sur le point C par le Prisme C A qui lui contrepese. Et que si l'on prend la ligne C F égale à C D, & le poids L égal à K, après avoir aussi fait abstraction de la propre Gravité du Prisme C A & C F, il arrivera encore la même chose : Et par conséquent, comme le poids K est la mesure du moment de la résistance du Prisme D C attaché en C, les deux poids égaux K & L seront aussi la mesure du moment de la résistance du Prisme F D appuyé en C, lorsque les puissances sont en D & F, ou appuyé en D & F, lorsque la puissance est en C.

Or est-il que, par la proposition de M. Galilée que nous avons rapportée cy-dessus sous la lettre B, la résistance absolue, qui est la même aux Prismes F D & C D, est au moment de la résistance du Prisme C D, comme la ligne C D est à C G. demidiаметre de la base ; & le moment de la résistance du Prisme C D, est au moment du

Prisme ou Cylindre  $FD$ , comme la ligne  $CG$  est à la ligne  $CP$ , (le moment de  $CD$  égal au poids  $K$ , étant la moitié du moment de  $FD$  qui est égal aux deux poids  $K$  &  $L$ , comme  $CG$  demidiаметre de la base est la moitié du diamètre  $CP$  :) Donc, par égalité, la résistance absolue sera au moment de la résistance du Prisme  $FD$  soutenu en  $C$ , comme la ligne  $CD$  est au diamètre  $CP$ . Ce qu'il faut remarquer.

Fig. 3. Tab. 10.

Voyons à présent ce qui arrive aux Prismes de même longueur & largeur, & qui ne different qu'en leur hauteur, c'est-à-dire, pour me servir de vos termes, dans lesquels il se fait diminution que d'une seule dimension : Comme  $ABFE$  &  $ABQL$ , dont les longueurs  $AB$  & largeur  $PI$  ou  $NO$  sont égales, mais les hauteurs  $CP$  &  $CN$  sont inégales : Je dis que le moment de la résistance du Prisme  $AE$  dans son milieu  $C$ , est au moment du Prisme  $AL$  dans le même point  $C$ , en même raison que le carré de la ligne  $CP$  est au carré de la ligne  $CN$ . Car la raison du moment de la résistance en  $C$  du Prisme  $AE$ , au moment de la résistance en  $C$  du Prisme  $AL$ , est composée des raisons du moment en  $C$  du Prisme  $AE$  à sa résistance absolue, de la résistance absolue du Prisme  $AE$  à la résistance absolue du Prisme  $AL$ , & de la résistance absolue du Prisme  $AL$  au moment de sa résistance en  $C$  ; Mais il vient d'être enseigné cy-dessus, que le moment de la résistance en  $C$  du Prisme  $AE$  est à sa résistance absolue, comme le diamètre  $CP$  est au côté  $CB$  & la résistance absolue du Prisme  $AE$ , par ce qui a été cy-dessus rapporté de M. Galilée sous la lettre  $C$ , à la résistance absolue du Prisme  $AL$ , comme la surface  $CI$  est à  $CO$ , c'est-à-dire, comme la ligne  $CP$  est à  $CN$  ; & la résistance absolue du Prisme  $AL$  est au moment de sa résistance en  $C$ , comme le côté  $CB$  est au diamètre de la base  $CN$ . Donc la raison du moment de la résistance en  $C$  du Prisme  $AE$ , au moment en  $C$  du Prisme  $AL$ , sera composée des rai-

sons du diamètre  $CP$  au côté  $CB$ , de la ligne  $CP$  à la ligne  $CN$ , & du côté  $CB$  au diamètre  $CN$  : Mais les raisons de  $CP$  à  $CB$  &  $CB$  à  $CN$  sont égales à la raison de  $CP$  à  $CN$ . Donc la raison du moment  $AE$  en  $C$  au moment de  $AL$  en  $C$ , sera composée des raisons de la ligne  $CP$  à  $CN$  &  $CP$  à  $CN$ , c'est-à-dire, comme le quarré de  $CP$  au quarré de  $CN$ .

Je dis bien davantage ; que si l'on prend quelque'autre point que ce puisse être comme  $H$ , le moment de la résistance du Prisme  $AE$  au point  $H$ , sera encore au moment de la résistance du Prisme  $AL$  au même point  $H$ , comme le quarré de  $HM$  ou  $CP$  au quarré de  $HK$  ou  $CN$ . Car la raison du moment de la résistance du Prisme  $AE$  au point  $H$ , au moment de la résistance du Prisme  $AL$  au même point, est composée des raisons du moment de  $AE$  en  $H$ , au moment du même  $AE$  en son milieu  $C$  ; du moment du Prisme  $AE$  en  $C$ , au moment du Prisme  $AL$  au même point  $C$  ; & du moment du Prisme  $AL$  en  $C$ , au moment du même Prisme  $AL$  au point  $H$ . Mais le moment de la résistance du Prisme  $AE$  au point  $H$ , est au moment du même Prisme  $AE$  en  $C$ , comme le rectangle  $ACB$  est au rectangle  $AHB$  ; le moment de la résistance du Prisme  $AE$  en  $C$ , est au moment du Prisme  $AL$  en  $C$ , comme le quarré du diamètre  $PC$ , est au quarré du diamètre  $CN$  ; & le moment de la résistance du Prisme  $AL$  en  $C$ , est à son moment en  $H$ , comme le rectangle  $AHB$  au rectangle  $ACB$ . Donc la raison du moment de la résistance du Prisme  $AE$  en  $H$ , au moment de la résistance du Prisme  $AL$  au même point  $H$ , sera composée des raisons du rectangle  $ACB$  au rectangle  $AHB$ , du quarré  $PC$  au quarré  $CN$ , & du rectangle  $AHB$  au rectangle  $ACB$ . Mais la raison de  $ACB$  à  $AHB$  détruit celle de  $AHB$  à  $ACB$ . Il ne reste donc plus que la raison du quarré  $PC$  au quarré  $CN$  ou du quarré  $HM$  au quarré  $HK$ , à laquelle soit égale la raison du moment de la résistance du

Prisme A E au point H , au moment de la résistance du  
Prisme A L au même point H.

*Fig. 3. Tab. 20.*

Maintenant , si l'on étend un Solide , quel qu'il puisse être , comme l'un de ceux que nous avons considéré A K P B R I S , qui soit inscrit dans la Poutre A E , en sorte qu'il soit de même longueur & largeur qu'elle , & qu'il passe par le point K , par où il faut s'imaginer une autre Poutre A L ; il paroît par les choses démontrées cy-dessus , que le moment de la résistance de ce Solide inscrit au point H , est le même que le moment de la Poutre A L au même point ; lequel étant au moment de la Poutre A E au point H , en la raison du quarré de H K au quarré de H M ; il s'ensuit que le moment de ce Solide inscrit en H , est au moment de la Poutre A E au même point , comme le quarré de H K à H M ou de C P à C N , & non pas en même raison que les lignes C P & C N , comme vous l'avez marqué. Et que je n'ai point fait de Paralogisme , quand sur cette proposition j'ai conclu que les momens des Solides Paraboliques , en quelque maniere qu'ils soient inscrits dans la Poutre selon sa hauteur , ne sont point égaux entre eux ; & que ceux du Demi-cercle & de l'Ellipse le sont en tous leurs points.

*Fig. 1. Tab. 21.*

Je dis des Solides Paraboliques inscrits dans la Poutre selon sa hauteur , parce que la même Poutre peut être coupée par une ligne Parabolique selon sa largeur , en sorte qu'étant soutenue par les deux bouts , les momens de la résistance soient égaux en toutes ses parties. Comme si la Poutre A E est coupée sur sa largeur G E par une Parabole G I F , dont l'axe soit la même largeur P I , le sommet I & l'amplitude toute la longueur de la Poutre G F , & qui fasse , dans la Poutre , le Solide Parabolique G I F B O A de même hauteur & longueur qu'elle.

Je dis que les momens de la résistance de ce Solide Parabolique soutenu sur ses extrêmes A & B , sont par tout égaux ; c'est-à-dire , que si ce Solide est rompu par une puissance

puissance ou un poids, agissant au point M ou H, il sera rompu par la même puissance ou le même poids, qui fera effort au point P ou C; & ainsi des autres.

Parce que le moment au point H du Solide Parabolique, est à son moment au point C, en raison composée de la raison du moment du Parabolique en H, au moment de la Poutre A C au même point H; de la raison du moment de la Poutre en H, à son moment en C; & de la raison du moment de la Poutre en C, au moment du Parabolique au même point C: Mais la raison du moment de la résistance du Solide Parabolique au point H, au moment de la Poutre A E au même point H, est la même que celle des Parties du Solide, qui se doivent séparer dans la surface H N, aux parties contenues dans la surface de la Poutre H K; c'est-à-dire, comme la même surface H N, est à la même surface H K, ou comme la ligne M N à M K ou P I (à cause que les surfaces H N & H K ont une même hauteur H M:) Et la raison du moment de la Poutre en H, à son moment en C, est la même que celle du rectangle A C B au rectangle A H B, & la raison du moment de la Poutre en C, au moment du Solide Parabolique au même point C, est celle d'égalité; puisque c'est le même moment en l'un & en l'autre, par ce qui a été dit ci-dessus. Et partant le moment de la résistance du Solide Parabolique en H, au moment du même Solide au point C, sera en raison composée des raisons de la ligne M N à la ligne P I, & du rectangle A C B au rectangle A H B. Mais par la propriété de la Parabole la ligne M N est à la ligne P I, comme le rectangle A H B est au rectangle A C B: Donc le moment de la résistance du Solide Parabolique au point H, sera au moment de la résistance du même Solide au point C, en raison composée de celles du rectangle A H B au rectangle A C B, & du rectangle A C B au rectangle A H B, c'est-à-dire, en raison d'égalité. Et la même chose pouvant être conclue de la même manière en tous les points



de la base AB, il s'ensuit que les momens du Solide Parabolique sont égaux, en quelque point que la puissance ou le poids agissent.

La même chose se peut encore démontrer d'une autre  
 Fig. 2. Tab. 21. Solide Parabolique double CRXQDP SO, qui sera fait dans la Poutre AE, si sa largeur GE est coupée par les deux Paraboles opposées en dedans DPS & DOS, dont les sommets sont aux points P & O, l'axe PO commun, aussi-bien que l'amplitude DS; parce qu'en ce cas, & supposé que ce Solide soit soutenu par ses extrêmes Q & R: Je dis que les momens de sa résistance sont par tout égaux.

Car si l'on entend que la puissance agisse au point K ou H, & puis au point N ou C; le moment de la résistance du double Parabolique en H, sera à son moment en C, en raison composée du moment du Parabolique en H, au moment du Prisme AE au même point H ou I; du moment du Prisme en I, à son moment en C; & du moment du Prisme en C, au moment du Parabolique au même point C. Mais la raison du moment du Solide Parabolique au point H, au moment de la Poutre AE au même point H ou I, est la même que celle de la surface HL à la surface IM, c'est-à-dire, (à cause de la commune hauteur FH) de la ligne HT ou FL à la ligne ZM ou PO; & la raison du moment de la Poutre AE en I à son moment en C, est la même que celle du rectangle ACB au rectangle AIB, c'est-à-dire, du rectangle DNS au rectangle DKS; & enfin la raison du moment de la Poutre en C, au moment du Solide Parabolique au même point C, est la raison d'égalité: Et partant la raison du moment de la résistance du Solide Parabolique au point H, au moment du même Solide au point C, sera composée des raisons de la ligne FL à la ligne PO, ou, prenant les moitiés, de la ligne FK à la ligne PN, & du rectangle DNS au rectangle DKS: Mais par la propriété de la Parabole, la ligne FK est à la ligne PN, comme le rectangle DKS est au rectangle DNS:

Donc le moment de la résistance du Solide Parabolique au point H, à son moment au point C, fera en raison composée des raisons du rectangle D K S au rectangle D N S, & du rectangle D N S au rectangle D K S, c'est-à-dire, en raison d'égalité. Ce qui se pouvant dire en la même manière de tous les points de la base du Solide Parabolique, on peut conclure que les momens de la résistance sont par tout égaux.

J'ai été bien-aise de vous rapporter les propriétés de ces Solides Paraboliques, afin de vous avertir en même temps, que cette égalité de momens de leurs résistances, ne fait rien du tout au Théorème de M. Galilée, qui est toujours faux en la manière qu'il l'a proposé, n'ayant jamais, en toutes les figures & en tous les raisonnemens, considéré les sections ou coupes des Prismes ou Poutres en autre manière que selon leur hauteur, & jamais selon leur largeur.

Et pour vous ôter le scrupule qui vous peut rester sur cette matière, en sorte que vous ne puissiez plus douter, comme vous faites, qu'un si grand Homme ait pû se méconter; je veux vous faire voir encore quelques exemples, que j'ai tirez de ses mêmes Dialogues mécaniques, qui me font peine, & que je souhaiterois avoir été plus clairement expliquez par leur Auteur.

Le premier est celui dont je vous ai dit un mot ci-dessus au texte-corré C, qui fait la 4. Prop. du 2. Dial. des Mech. où il dit, qu'aux Cylindres ou Prismes de même longueur, & de différentes grosseurs, les momens de la résistance croissent en raison triplée des diamètres de leurs bases; c'est-à-dire, que le moment de la résistance du Cylindre B, est au moment de la résistance du Cylindre A, comme le Cube de la ligne EF, est au Cube de la ligne CD.

Fig. 4. Tab. 20.

Ce qui ne peut pas être véritable, s'il ne fait abstraction du poids des Cylindres A & B, dont il ne parle pourtant point du tout; au contraire, par la liaison de cette Propo-

sition avec la précédente, il semble que les momens de la résistance doivent être confiderez, dans cette Proposition, comme les momens du poids ou de la puissance sont confiderez dans la 3<sup>e</sup> Prop. qu'il conclut en ces termes : *Concludasi per tanto, i momenti delle forze de i Prismi e Cilindri egualmente grossi, ma disegualmente lunghi esser trà di loro in duplicata proporzione di quella delle lor lunghezze, cioè esser come i quadrati delle lunghezze.*

*Monstreremo adesso nel secondo luogo, secondo qual proporzione cresca la resistenza all' esser spezzati ne i Prismi e Cilindri, mentre restino della medesima lunghezza, e si accresca la grossezza. E' qui dico che ( Prop. 4. ) Ne i Prismi e Cilindri egualmente lunghi, ma disegualmente grossi, la resistenza all' esser rotti cresce in triplicata proporzione de i diametri delle lor grossezza, cioè delle lor basi.*

Ce qui fait voir que les momens du poids, ou de la puissance, ayant été confiderez, dans la 3<sup>e</sup> Prop. relativement au moment de leur résistance ; les momens de la résistance doivent, par la même raison, être confiderez, dans la 4<sup>e</sup> Prop. avec relation aux momens des puissances.

Auquel cas, comme les momens des puissances, dans la 3<sup>e</sup> Prop. sont en raison doublée des côtes des Cylindres, à cause que le moment de la résistance est le même en l'un & en l'autre ; il faudroit de même, dans la 4<sup>e</sup> Prop. que les momens des poids des Cylindres de même longueur & de différente grosseur, fussent toujours égaux, pour conclure que les momens de leurs résistances, sont comme les Cubes des diamètres de leurs bases.

Mais comme les momens des poids de ces Cylindres ne sont point égaux, aussi les momens des résistances ne croissent pas, sur cette hypothese, en la même raison que les Cubes des diamètres de leurs bases, mais seulement en celle des mêmes diamètres. Ce que je démontre en cette manière, après avoir coupé les lignes D G & F H en deux également en K & L, aussi bien que les deux C D & E F en M & I, & fait F N égal à D M.

# DE LA COUPE DES POUTRES EGALEMENT RESIST. 521

La résistance absoluë du Cylindre A, est à la résistance absoluë du Cylindre B, comme la base C D est à la base E F: Et parce que les Cylindres sont de même longueur, ils seront aussi comme leurs bases, aussi-bien que leur poids, & partant le poids du Cylindre A, sera au poids du Cylindre B, comme la résistance absoluë du Cylindre A, est à la résistance absoluë du Cylindre B. Maintenant, comme le centre de l'action de la résistance absoluë du Cylindre A, fiché dans le mur à angles droits, est au centre de la base M; & le centre de l'action du poids du même Cylindre A est au point K, en sorte que la résistance absoluë résiste par la ligne D M, & le poids agit par la ligne D K: Si nous supposons que le centre de l'action de la résistance du Cylindre B soit au point N, comme le centre de l'action du poids du même Cylindre est au point L, en sorte que la résistance absoluë du Cylindre B résiste par la ligne F N, égale à la ligne D M, ainsi que le poids du même Cylindre B agit par la ligne F L, égale à la ligne D K, il n'y aura, dans cette supposition, aucun changement aux raisons des poids ni des résistances; & le moment de la résistance du Cylindre A en M, sera au moment de la résistance du Cylindre B en N, comme le moment du poids A en K, est au moment du poids B en L; & en permutant, la raison du moment de la résistance du Cylindre A en M, au moment du poids du même Cylindre A en K, sera égale à la raison du moment de la résistance du Cylindre B en N, au moment du poids du même Cylindre B en L. Mais parce que le centre de l'action de la résistance du Cylindre B est au point I, centre de la base E F; & le moment de la résistance au point I, est au moment de la résistance au point N, comme la ligne F I à la ligne F N, c'est-à-dire, D M; ou prenant leurs doubles, comme le diamètre E F est au diamètre C D; il s'ensuit que le moment de la résistance du Cylindre B en I, au regard du moment du poids B en L, est plus grand que le moment de la résistance du même

Cylindre B en N, au regard du même poids B en L; c'est-à-dire, (en prenant des raisons égales) plus grand que le moment de la résistance du Cylindre A en M, au regard du poids A en K; en la même raison que le diamètre EF est plus grand que le diamètre CD: & par conséquent que le moment de la résistance du Cylindre B au regard de son poids, s'est accru sur le moment de la résistance du Cylindre A au regard de son propre poids, en la raison de l'accroissement du diamètre de la base EF sur le diamètre de la base CD, & non pas en la raison des Cubes de ses diamètres. Ce qu'il falloit démontrer.

La même Proposition se peut démontrer encore d'une autre maniere, après avoir fait que comme le diamètre CD est au diamètre EF, ainsi FL soit à FO.

La raison du moment de la résistance du Cylindre A en M, au moment de la résistance du Cylindre B en I, est composée de la raison de la base CD à la base EF, & de celle du demi-diamètre DM au demi-diamètre FI, ou de la ligne CD à la ligne EF. Et la raison du moment du poids du Cylindre A en K, au moment du poids B en O, est composée des mêmes raisons, sçavoir de celle du poids A au poids B, qui est égale à celle de la base CD à la base EF; & de celle de la ligne DK ou FL à la ligne FO, qui par la construction est la même que celle de CD à EF: Donc le moment de la résistance du Cylindre A en M, sera au moment de la résistance du Cylindre B en I, comme le moment du poids du Cylindre A en K, est au moment du poids du Cylindre B en O: Et en permutant, le moment de la résistance du Cylindre A en M, sera au moment du poids A en K, comme le moment de la résistance du Cylindre B en I, est au moment du poids B en O.

Maintenant, par ce qui a été démontré par d'autres, que si deux raisons ont un même antécédent, elles seront entr'elles comme réciproquement les termes conséquens; il s'ensuit que la raison du moment de la résistance du Cy-

lindre B en I au moment du poids B en L, & la raison du même moment de la résistance du Cylindre B en I au moment du même poids B en O, ayant un même antécédent, sçavoir le moment de la résistance du Cylindre B en I; elles seront entr'elles comme réciproquement les termes conséquens, c'est-à-dire, que le moment de la résistance du Cylindre B en I au regard du moment du poids B en L, sera au moment de la même résistance du Cylindre B en I au regard du moment du poids B en O, comme le moment du poids B en O, est au moment du même poids B en L, c'est-à-dire, comme la ligne B O est à la ligne B L, ou comme le diamètre E F au diamètre C D; & partant que le moment de la résistance du Cylindre B en I au regard du moment du poids B en L, sera au moment de la résistance du Cylindre B en I au regard du moment du même poids B en O, comme la ligne E F est à la ligne C D. Mais il a été montré ci-dessus, que le moment de la résistance du Cylindre A en M au regard du moment du poids A en K, étoit égal au moment de la résistance du Cylindre B en I au regard du moment du poids B en O. Donc le moment de la résistance du Cylindre B en I au regard du moment du poids B en L, sera au moment de la résistance du Cylindre A en M au regard du moment du poids A en K, comme le diamètre E F est au diamètre C D. Ce qu'il falloit démontrer.

Au reste, la vérité du Corollaire qui suit la 4. Prop. & qui dit, que les résistances sont en raison sesquialtère des poids des Cylindres, n'en paroît pas moins, dans cette hypothèse de l'accroissement des résistances en raison des diamètres des bases des Cylindres par relation aux poids, que dans l'autre, où les résistances s'augmentent en raison des Cubes des mêmes diamètres; si l'on se souvient que les résistances absolues & les poids croissent l'un & l'autre en raison doublée des diamètres, & que les distances de l'action des poids, étant les mêmes à cause de la même

longueur des Cylindres, le moment des poids ne s'augmente point : Mais les distances de l'action des résistances s'augmentant en raison des diamètres, à cause de la différence des grosseurs, il s'ensuit qu'ajoutant cette raison des diamètres à celle des résistances absolues, c'est-à-dire, à celle des quarrés des mêmes diamètres, il se fera la raison triplée des diamètres pour celle des momens des résistances, qui par conséquent est sesquialtere de celle des momens des poids, qui est demeurée doublée des mêmes diamètres.

Ce que nous venons de dire de la 4. Prop. se peut encore assurer de la 5. du même Livre, laquelle dit, que *I Cilindri è Prismi di diversa lunghezza, e grossezza hanno le lor resistenze all' esser rotti di proporzione composta della proporzione de i Cubi de i diametri delle lor basi, e della proporzione delle lor lunghezze permutatament prese*; & qui ne peut être véritable, si l'on ne fait encore abstraction du propre poids des Cylindres, dont M. Galilée ne parle pourtant point du tout, non plus qu'aux précédentes, ni en celles qui suivent. Puisque si l'on considère les momens de la résistance des Cylindres de différentes longueurs & grosseurs relativement aux momens de leurs propres poids, elles ne seront pas, comme il dit, en raison composée de la proportion des Cubes des diamètres de leurs bases, & de celle de leurs côtes pris réciproquement; mais bien en raison composée de la proportion des diamètres des bases, & de celle des quarrés des côtes des Cylindres pris réciproquement. Ce que je démontre en cette manière, & sur la fig. de M. Galilée, qui fait la ligne EG égale à BC.

Fig. 5, Tab. 20.

La raison du moment de la résistance du Cylindre AC au regard du moment du poids du même Cylindre AC, au moment de la résistance du Cylindre DF au regard du moment du poids du même Cylindre DF, est composée de la raison du moment de la résistance de AC au regard du moment du poids du même AC, au moment de la résistance

sistance du Cylindre D G au regard du moment du poids D G , & de la raison du moment de la résistance D G au regard du moment du poids D G , au moment de la résistance du Cylindre D F au regard du moment du poids D F. Mais la raison du moment de la résistance de A C au regard du moment du poids de A C , au moment de la résistance de D G au regard du moment du poids D G , est la même que la raison du diamètre A B au diamètre D E , par ce qui a été démontré ci-dessus ; & la raison du moment de la résistance du Cylindre D G au regard du moment du poids de D G , au moment de la résistance du Cylindre D F au regard du moment du poids D F , est la même que celle du carré du côté E F au carré du côté E G ou B C , ainsi que je le démontrerai ci-dessous. Et partant la raison du moment de la résistance du Cylindre A C au regard du moment du poids A C , au moment de la résistance du Cylindre D F au regard du moment du poids D F , sera composée des raisons du diamètre A B au diamètre D E , & du carré du côté E F au carré du côté B C. Ce qu'il falloit démontrer.

Or pour faire voir que la raison du moment de la résistance du Cylindre D G au regard du moment du poids du même D G , au moment de la résistance du Cylindre D F au regard du moment du poids du même D F , est égale à celle du carré E F au carré E G ; je dis ainsi. Les raisons des momens de la résistance des deux Cylindres D G & D F aux momens de leurs poids , ayant un même antécédent , sçavoir le moment de la résistance , qui est le même en tous les Cylindres de même grosseur ; elles seront entr'elles comme les termes conséquens , pris réciproquement , ( par ce qui a été démontré par d'autres. ) C'est-à-dire , que la raison du moment de la résistance du Cylindre D G au moment du poids du même D G , sera à la raison du moment de la résistance du Cylindre D F au moment du poids du même D F , comme réciproquement le mo-



ment du poids du Cylindre D F, est au moment du poids du Cylindre D G. Mais par la 1<sup>e</sup> Prop. de M. Galilée, le moment du poids de D F, est au moment du poids de D G, comme le quarré du côté E F est au quarré du côté E G : Donc le moment de la résistance du Cylindre D G au regard du moment du poids du même D G, sera au moment de la résistance du Cylindre D F au regard du moment du poids du même D F, comme le quarré du côté E F, au quarré du côté E G ou B C.

Il y a encore une maniere de raisonner, qui fait peine ; dans son 3. Dial. où, après avoir fort bien dit, *Motum æqualiter seu uniformiter acceleratum dico illum, qui à quiete recedens, temporibus æqualibus æqualia celeritatis momenta sibi superaddit.* Il fait un discours excellent pour l'explication de cette définition, contre laquelle ensuite il se fait faire une objection, qu'il résout en cette sorte.

Sagr. *Per quanto per ora mi si rappresenta all intelletto, mi pare che con chiarezza forse maggiore si fusse potuto definire senza variare il concetto : Moto uniformemente accelerato esser quello nel quale la velocità andasse crescendo secondo che cresce lo spazio che si v'è passando : si che per essempio il grado di velocità acquistato dal mobile nella scesa di quattro braccia, fusse doppio di quello che gli hebbe, sceso che fù lo spazio di due, è questo doppio del conseguito nello spazio del primo braccio. Perche non mi par che sia dà dubitare, che quel grave, che viene dall' altezza di sei braccia, non habbia, è perquota con impeto doppio di quello che hebbe, sceso che fù trè braccia, è triplo di quello che hebbe alle due, è scesuplo dell' havuto nello spazio di uno. Salu. Io mi consolo assai d'haver havuto un tanto compagno nell' errore ; è più vi dirò, che il vostro discorso hà tanto del verisimile, è del probabile, che il nostro medesimo Autore non mi negò, quando glielo proposi, d'esser' egli ancora stato per qualche tempo nella medesima fallacia. Ma quello, di che io poi sommamente mi maravigliai, fu il vedere scoprir con quattro semplicissime parole, non pur false, mà impossibili*

due proposizioni, che hanno del verisimile tanto, che havendole io proposte à molti, non hò trovato, chi liberamente non me l'ammettesse. Simpl. Veramente io sarei del numero de i conceditori, è che il grave descendente, Viresacquirat eundo, crescendo la velocità à ragion dello spatio, è chel momento dell' istesso percutiente sia doppio venendo da doppia altezza, mi paiono proposizioni da concedersi senza repugnanza, ò controversia. Salu. E' pur son tanto falso e impossibili, quanto che il moto si faccia in un instante. Et eccòvene chiarissima dimostrazione. Quando le velocità hanno la medesima proporzione, che gli spazii passati ò da passarli, tali spazii vengon passati in tempi eguali; se dunque le velocità, con le quali il cadente passò lo spazio di quattro braccia, furono doppie delle velocità, con le quali passò le due prime braccia ( si come lo spazio è doppio dello spazio ) adunque i tempi di tali passaggi sono eguali; mà passare il medesimo mobile le quattro braccia, e le due nell' istesso tempo, non può haver luogo fuor che nel moto instantaneo. Mà noi veggiamo, che il grave cadente fa suo moto in tempo, & in minore passa le due braccia, che le quattro. Adunque è falso, che la velocità sua cresca come lo spazio. L'altra proposizione si dimostra falsa con la medesima chiarezza, &c. Sagr. Troppa evidenza, Troppa agevolezza è questa, con la quale manifestato conclusioni ascoste; Questa somma facilità, &c.

Qui fait paroître que la solution de cette objection lui plaît extraordinairement; & il en fait tant de cas, qu'il ne peut quasi se lasser d'en exagérer la beauté.

Et cependant je vous avouë franchement la foiblesse de mon esprit, qui ne l'a pû jusqu'ici comprendre en aucune maniere, quelque soin que j'aye pris de méditer sur son raisonnement, lequel au contraire m'a toujours paru faux, & paralogistique en sa forme, quoiqu'il soit très-veritable en sa matiere.

Et pour vous faire voir mon sentiment, je vous dirai que pour avoir démontré, dans la 2<sup>e</sup> Prop. du même Dial.

E e e ij

au commencement , lorsqu'il a expliqué les propriétés du mouvement égal & uniforme , que *si spatia sint ut velocitates , tempora erant equalia*. Je ne vois pas pour cela , que parlant des propriétés du mouvement accéléré , ( permettez-moi de me servir de ce terme ) il ait pû dire , que *quando le velocità hanno la medesima proporzione che gli spazii passati, ò da passarfi, tali spazii vengono passati in tempi equali*. Ce qui peut être absolument nié , puisque ces mouvemens sont si différens , qu'il n'y a aucune connexité entre ces deux Propositions , & ce qui convient à l'un , peut absolument ne pas convenir à l'autre. Et cependant c'est de cette Majeure , que M. Galilée tire ces conséquences qui ravissent M. Sagredo , & qui font qu'il s'écrie avec tant d'emportement , *Troppa Evidenza , troppa agevolezza* , &c.

Que si l'on veut dire qu'il a pû argumenter sur les propriétés du mouvement accéléré , comme il a fait sur celles du mouvement égal & uniforme , par ce qu'il démontre un peu au-dessous dans la 1. Prop. de l'accélééré , que *Tempus in quo aliquod spatium à mobili conficitur latrone ex quiete uniformiter acceleratè , est æquale tempore , in quo idem spatium conficeretur ab eodem mobili motu æquabili delato , cujus velocitatis gradus subduplus sit , ad summam ultimam gradum velocitatis prioris motus uniformiter accelerati*. Qui fait voir la relation qu'il y a entre les deux mouvemens ; & que pour ce qui regarde les temps & les espaces , ce qui se dit de l'un , peut être proportionnellement entendu de l'autre.

Je répondrai que ce discours , quelque véritable qu'il soit en soi-même , ou , comme on dit dans les Ecoles , par sa matiere , il est toujours faux dans sa forme ; & le Paralogisme ne fait que changer de nom , en ce que ci-dessus on pouvoit l'appeller , comme on dit en Logique , à *non causa tanquam à causa* , & ici à *petitione Principii*. Puisque cette première proposition du mouvement accéléré , sup-

DE LA COÙPE DES POUTRES ÉGALEMENT RESIST. 529  
posant & étant fondée sur la définition contestée, il n'est pas juste de vouloir démontrer celle-ci par l'autre.

Voilà donc les Observations que j'ai faites sur ces matieres, que je ne vous rapporte point avec un esprit de critique, ou d'un homme qui ne cherche que ce qui peut être repris dans les plus beaux Ouvrages, puisqu'il n'y a peut-être personne au monde, qui ait plus d'amour & d'estime pour tout ce qui vient de M. Galilée que moi, qui ai eu l'honneur d'être de ses derniers Disciples, & qui ai travaillé depuis tant d'années à étendre cette Doctrine de la résistance des Solides dont il est l'Inventeur, & qu'il a renfermée dans un si petit nombre de propositions, ayant pour ce sujet composé le Livre que vous avez vû prêt à être donné au public il y a plus de douze ans, que j'appelle *Galilæus Promotus de resistentia Solidorum*; & qui pouvant quelque jour être mis en lumiere, fera assez connoître ma reconnoissance, & le respect que je porte à la memoire de ce grand Homme, que notre bon Ami M. Gassendi appelloit ordinairement le Platon de notre siècle.

Ce n'est donc pas dans le dessein de rien censurer dans ses Ecrits que je vous ai marqué mes sentimens; mais seulement pour vous faire voir que ce n'est pas miracle, que dans le nombre infini de méditations toutes divines, dont il a rempli ses Ouvrages, quelques petites bagatelles comme celles-ci, lui soient échappées sans y avoir pris garde.

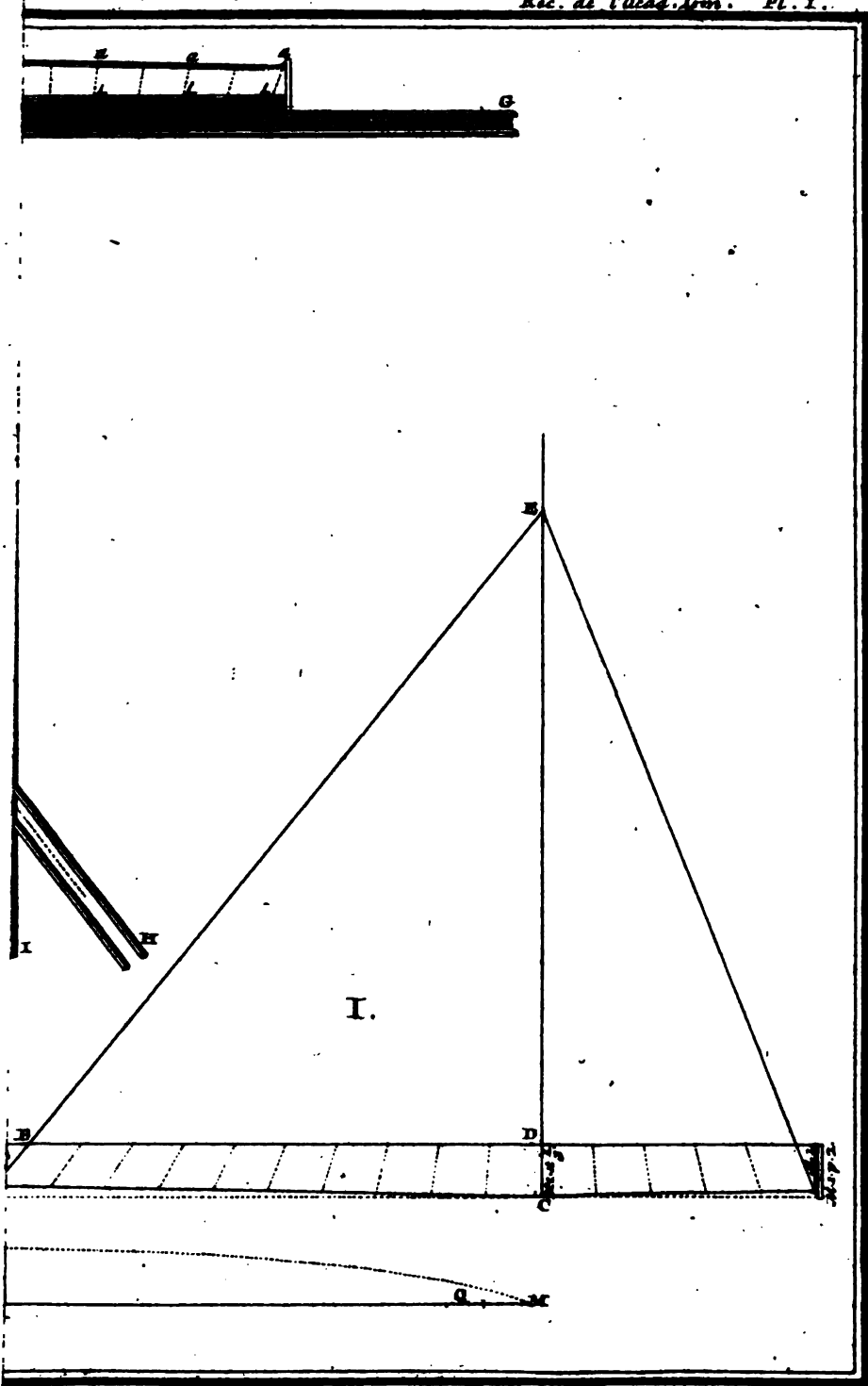
Ce qui est, à mon avis, tout ce que je devois vous dire, pour vous tirer des doutes qui vous étoient venus sur la lecture de mon écrit: Et si dans tout ce discours vous trouvez encore quelque chose qui ne vous satisfasse pas entièrement, il faudra que nous nous en entretenions plus particulièrement ensemble; & que sur le Livre même de M. Galilée j'essaye de me mieux expliquer que je n'ai pû faire dans les raisonnemens que je vous ai communiqués, où j'ai eu le malheur de ne me sçavoir pas si nettement faire entendre.

Et c'est une des principales raisons qui m'ont fait étendre un peu plus au long dans cette Lettre, & rapporter quantité de passages aux mêmes termes de M. Galilée; puisque dans cette question il seroit toujours fâcheux de tomber dans l'inconvenient, où une autre de pareille nature a jetté dans ces derniers temps les plus beaux esprits de l'Europe. Adieu, Monsieur; conservez-moi toujours l'honneur de vos bonnes grâces. A Paris, ce 18. Juillet 1661.

F I N.





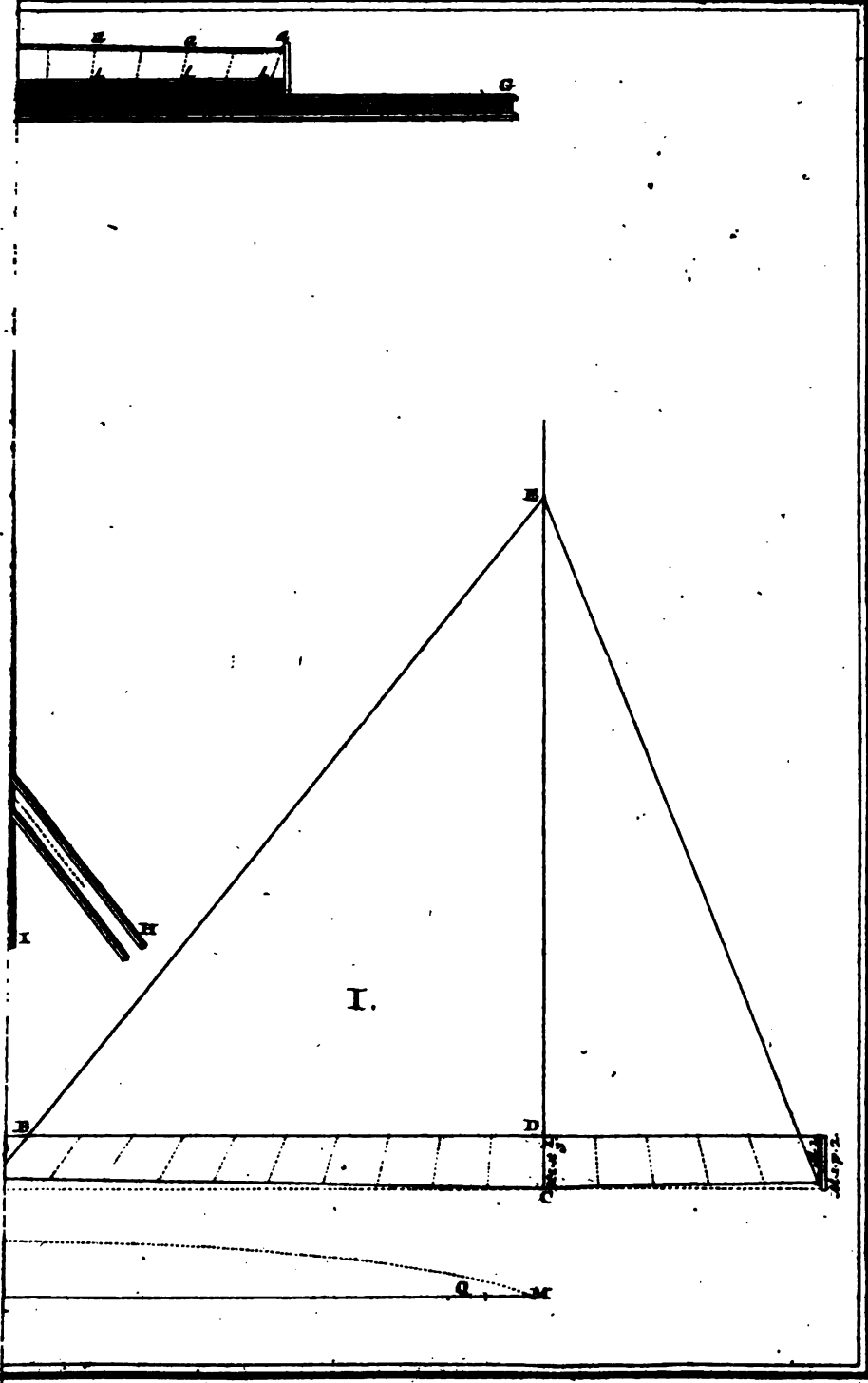


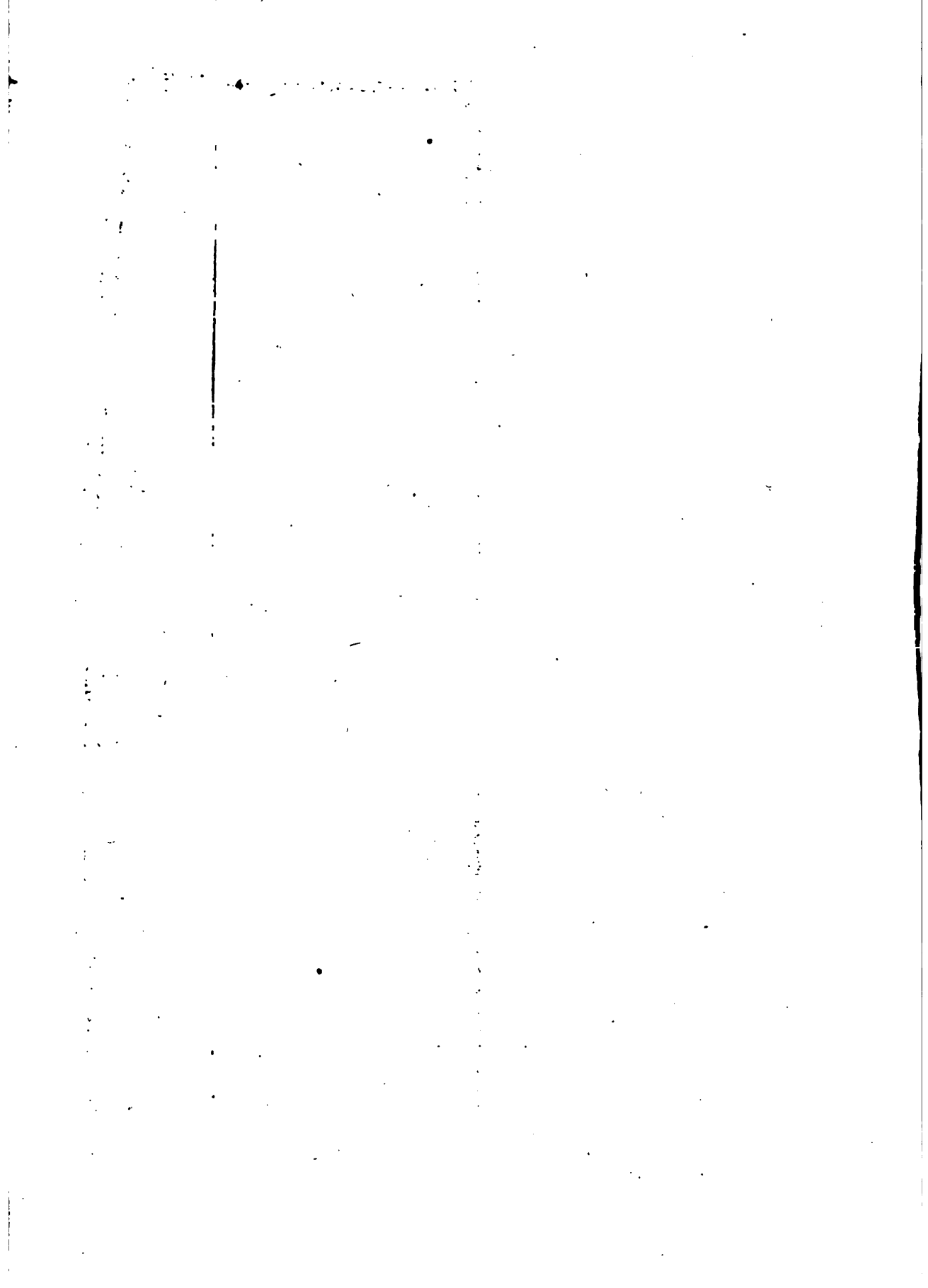


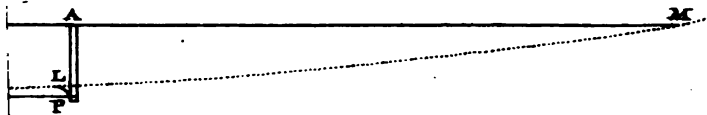
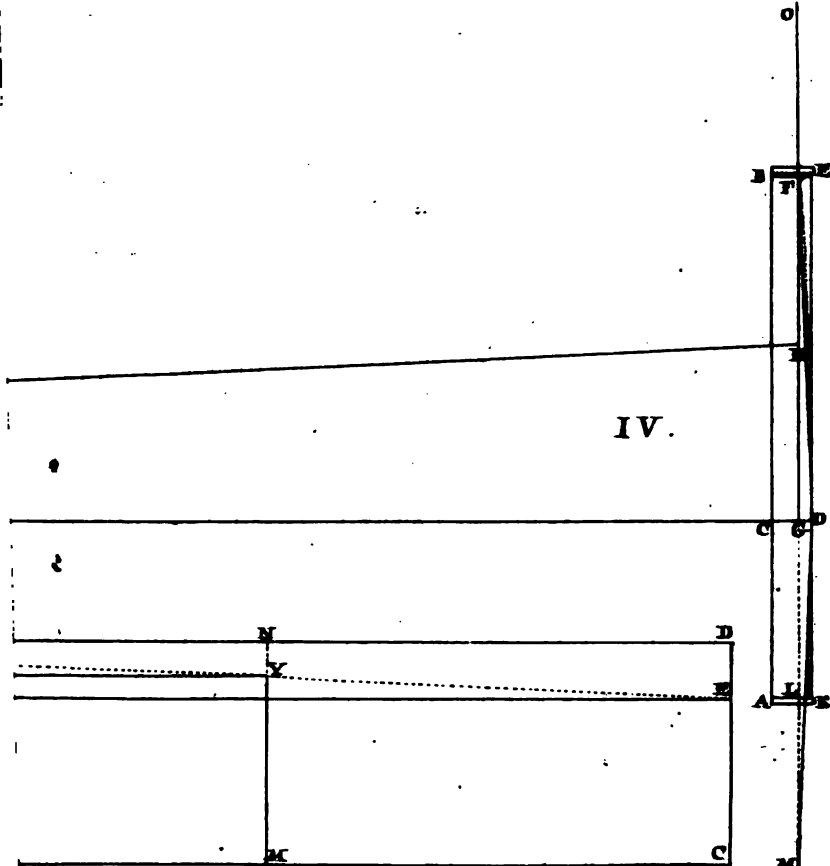
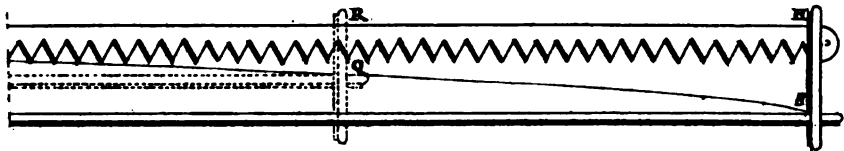


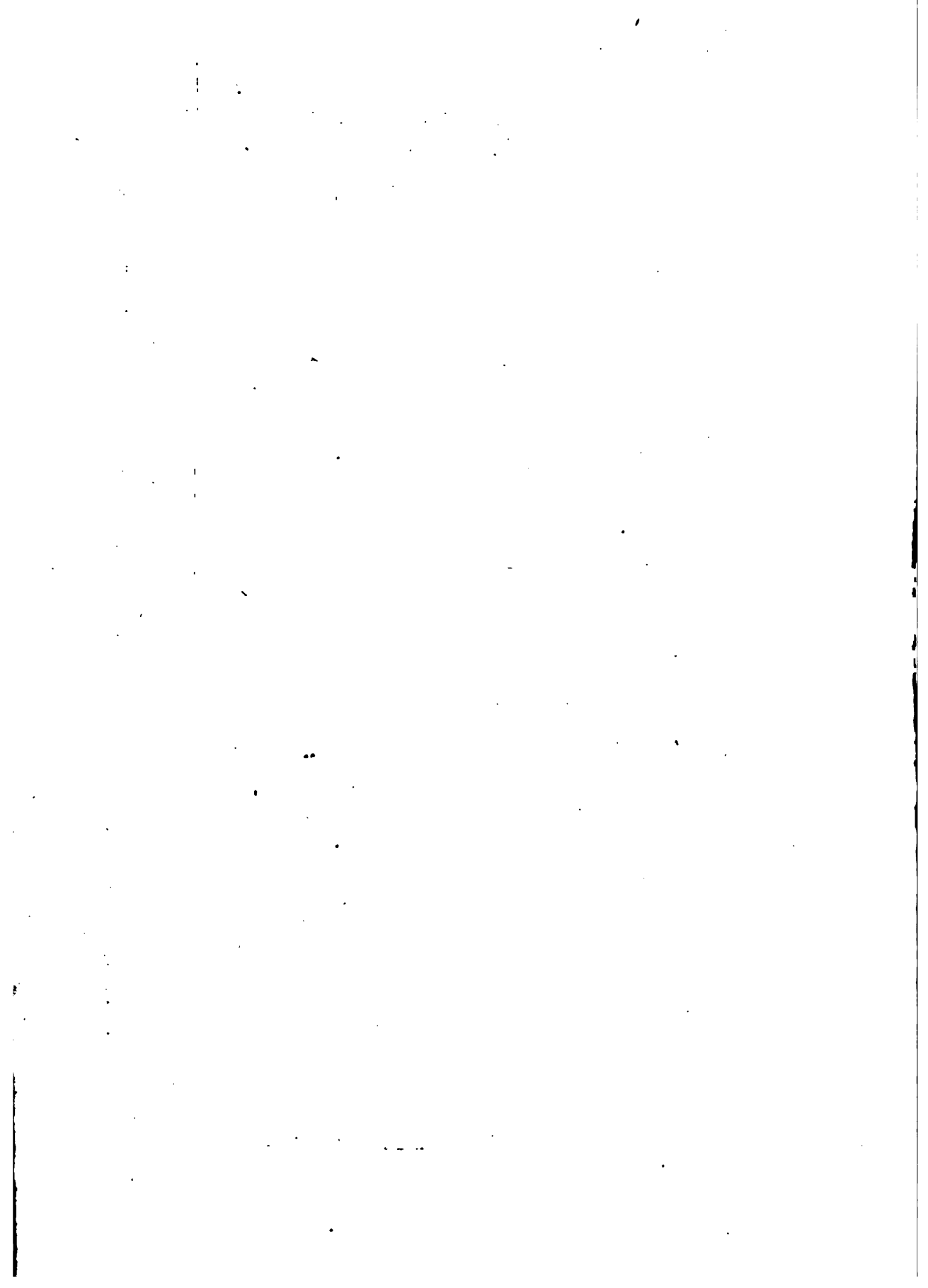






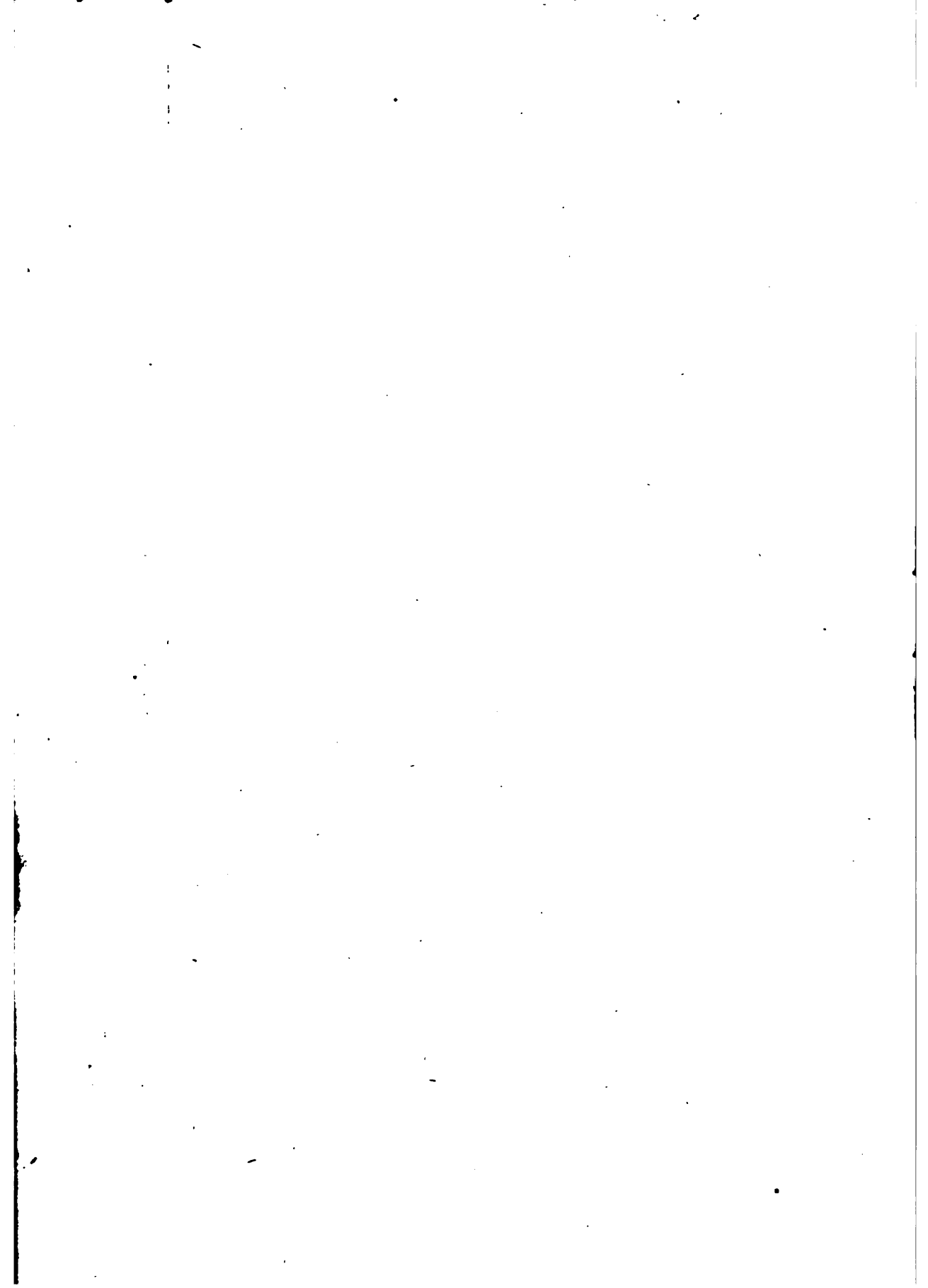


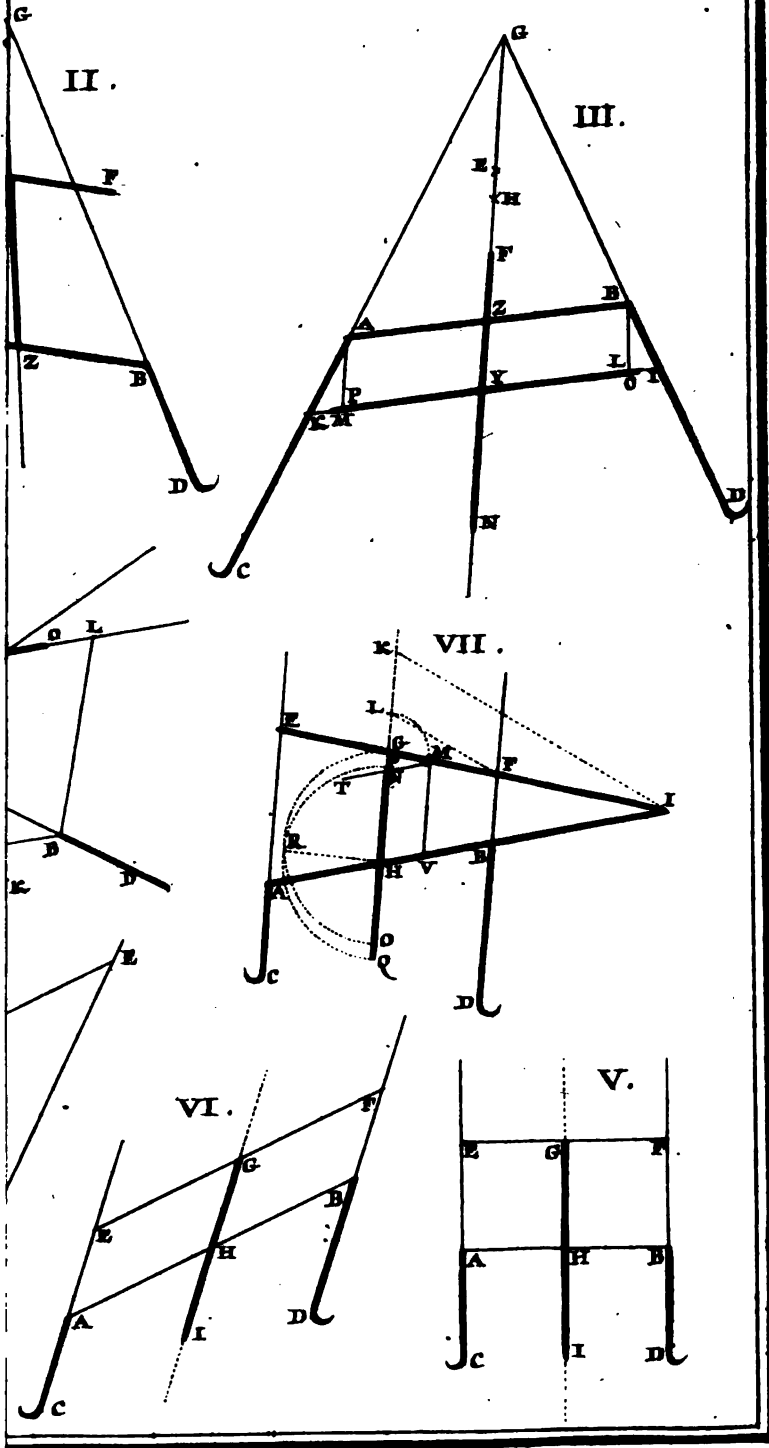


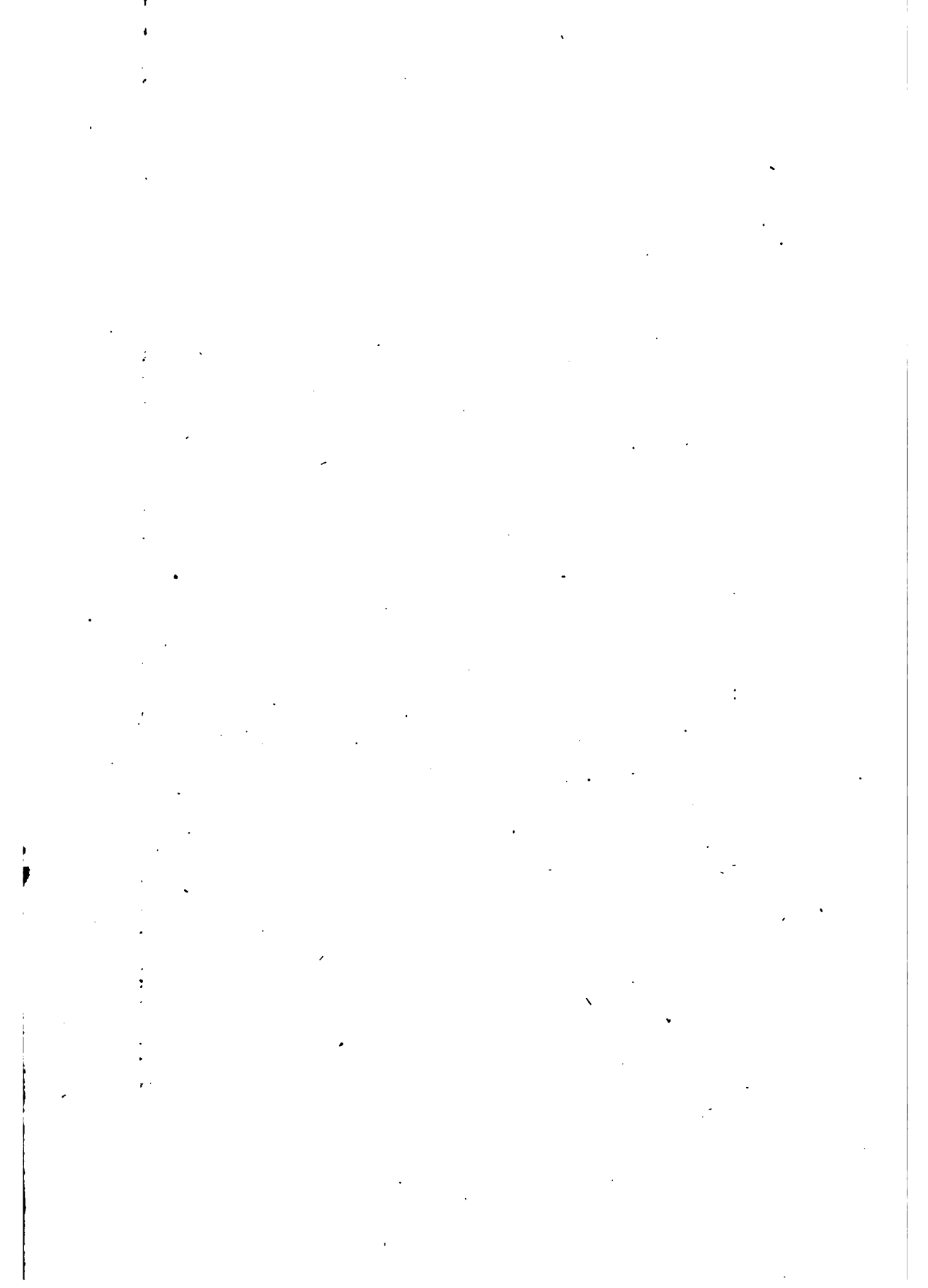


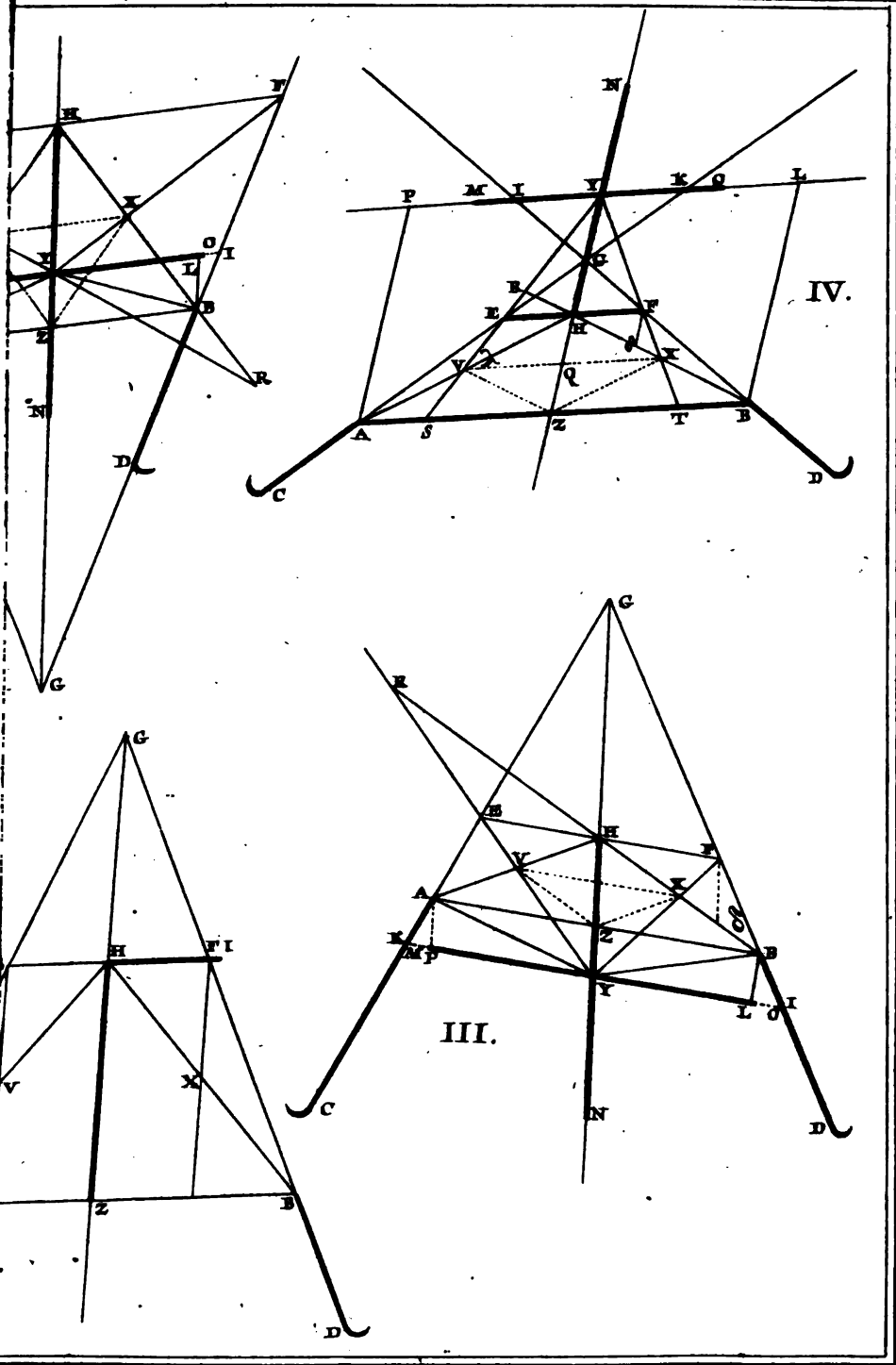


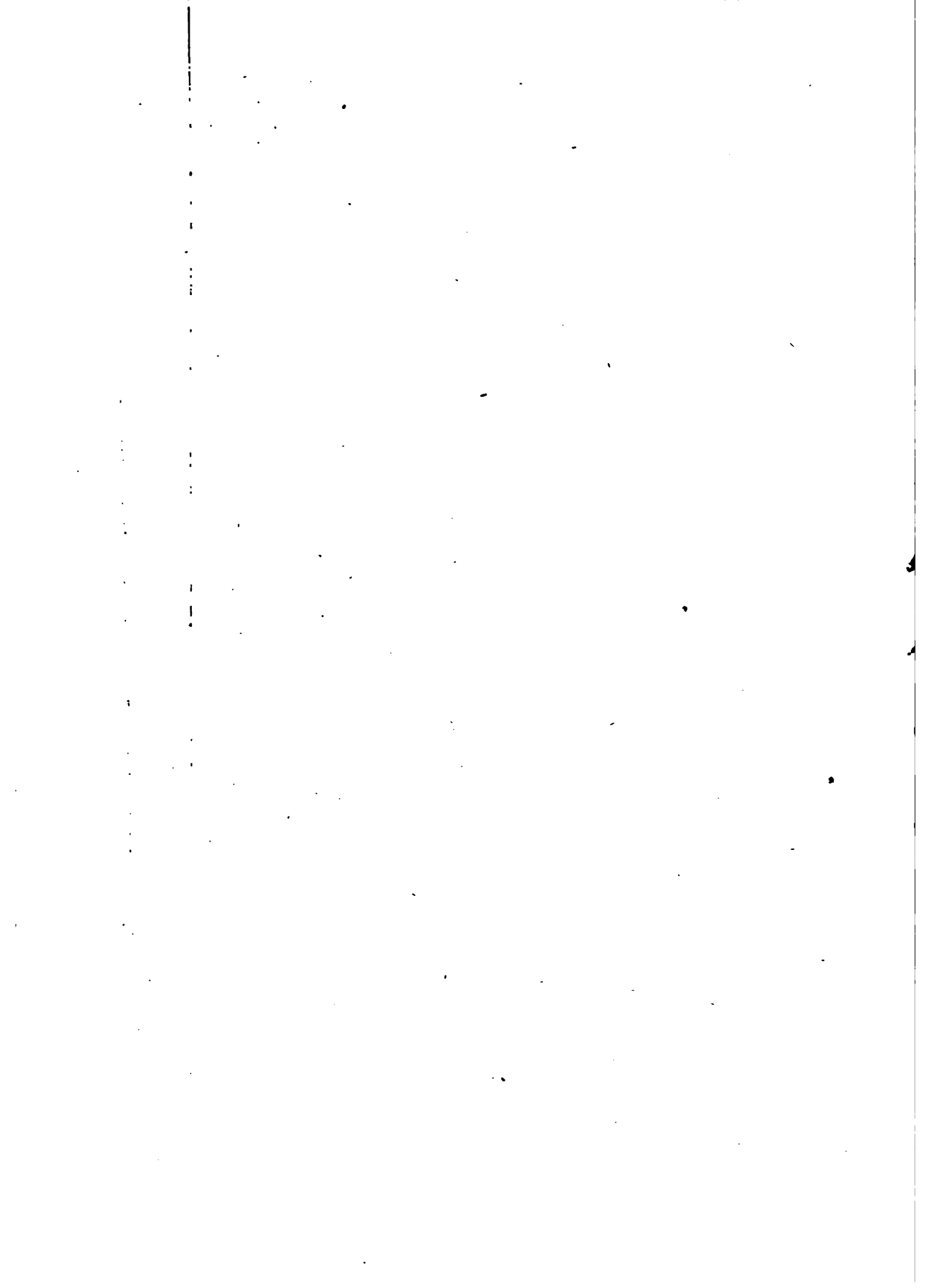




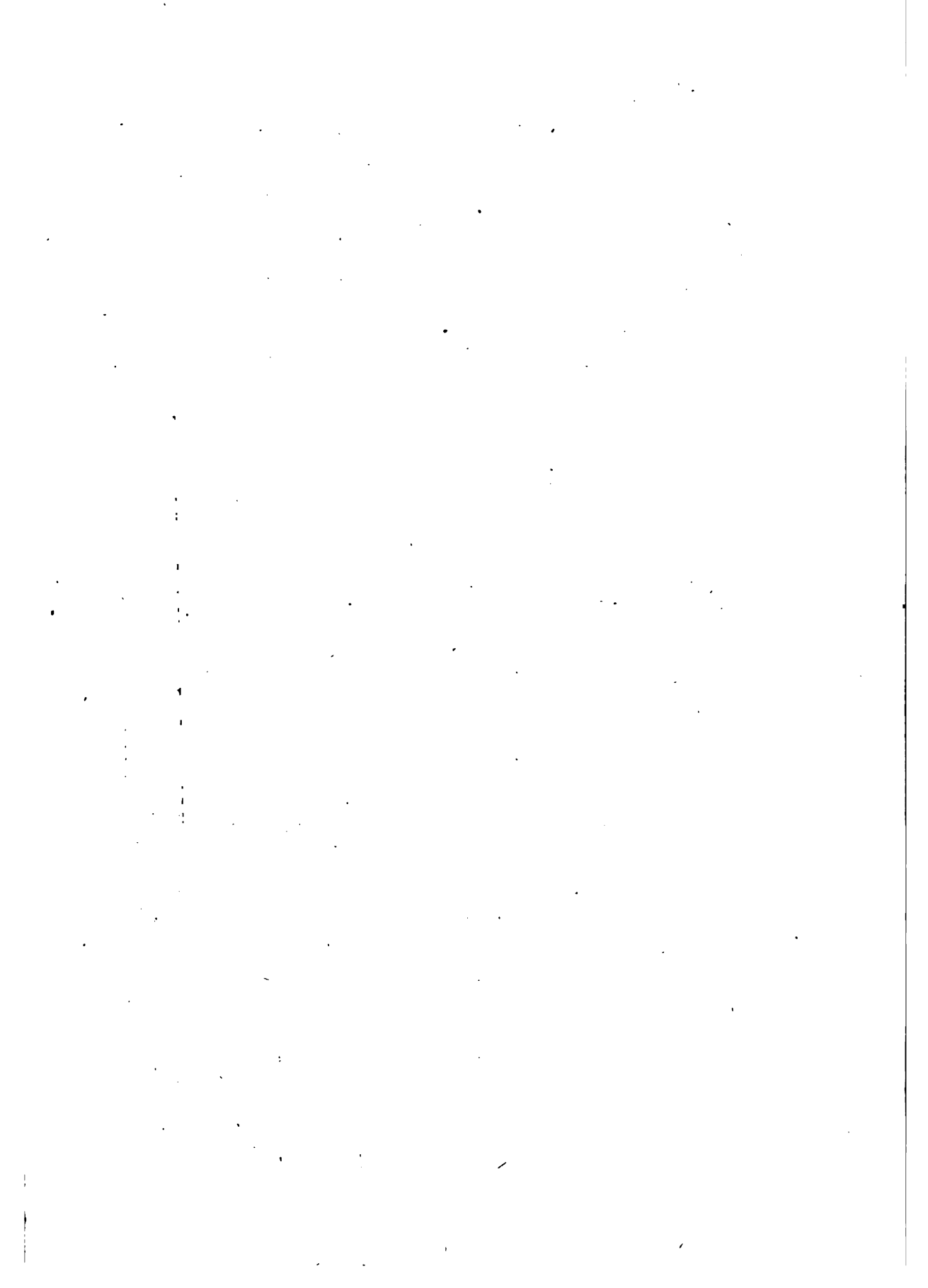


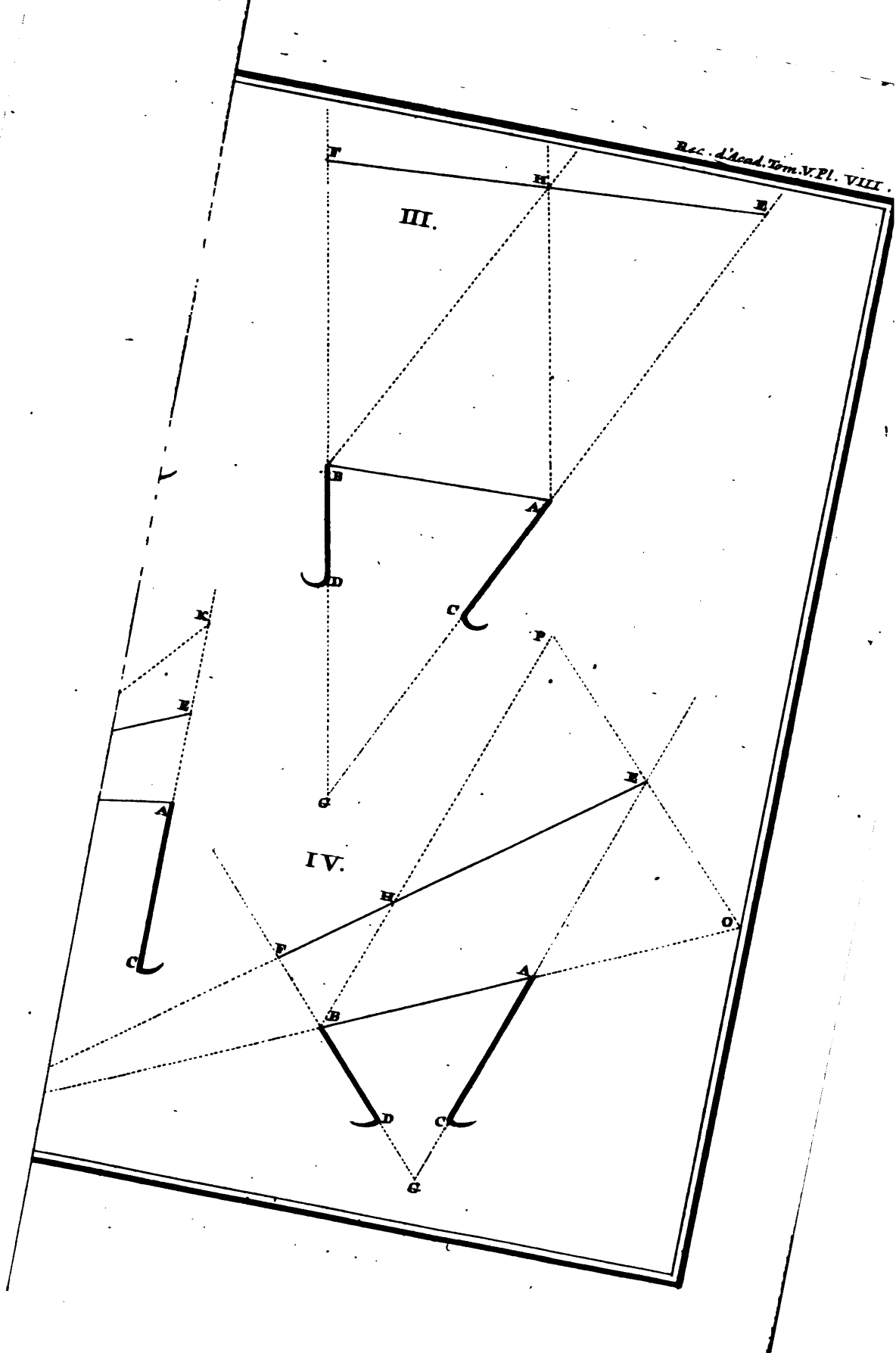




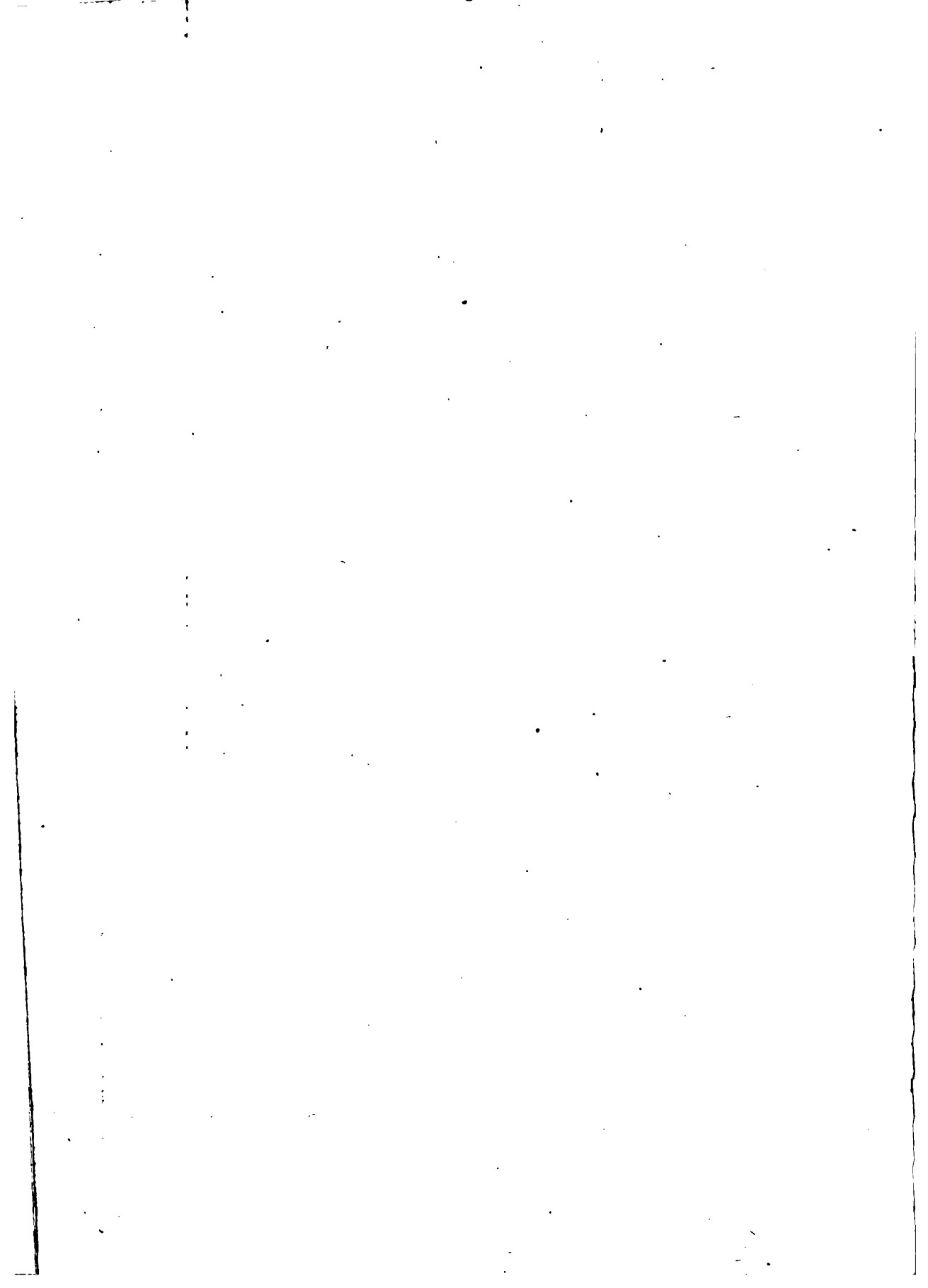






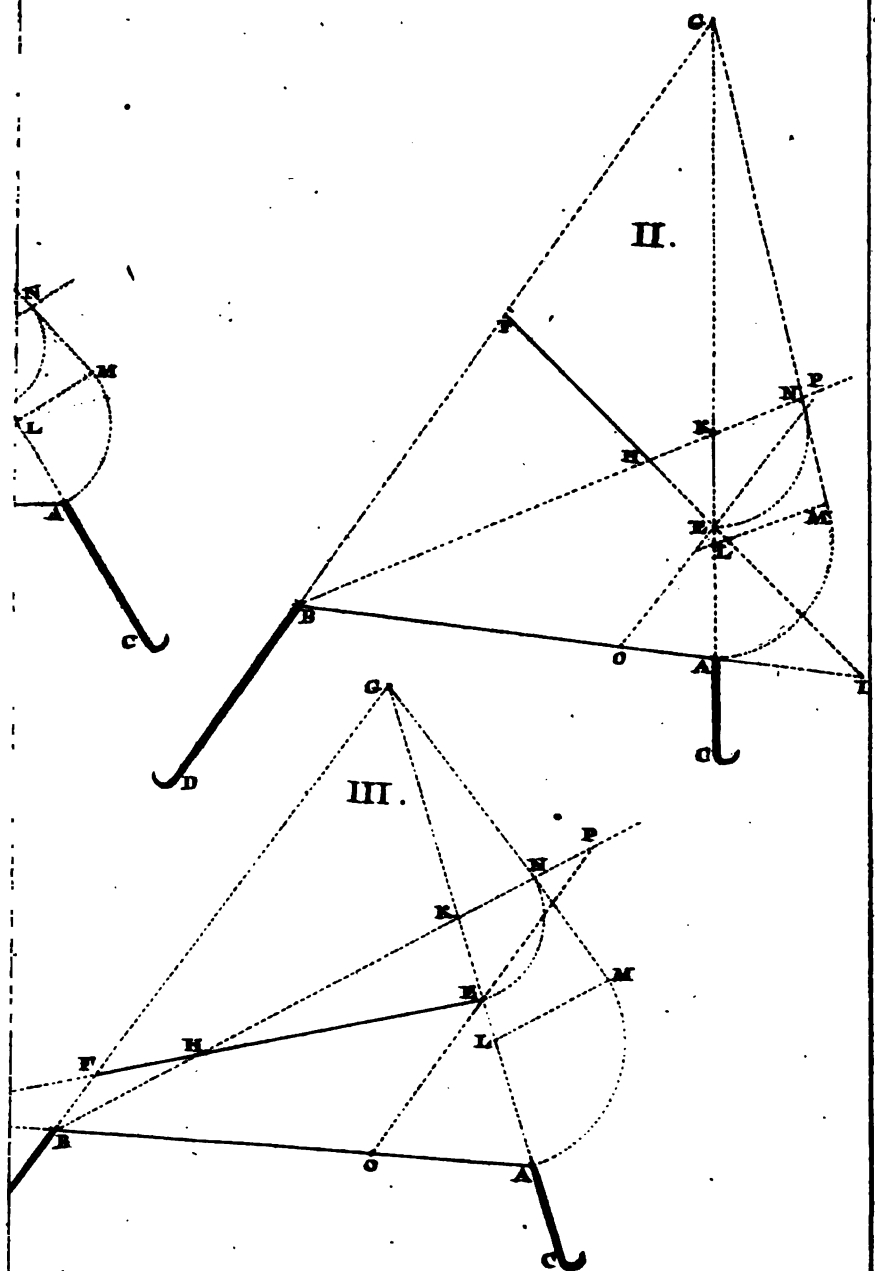


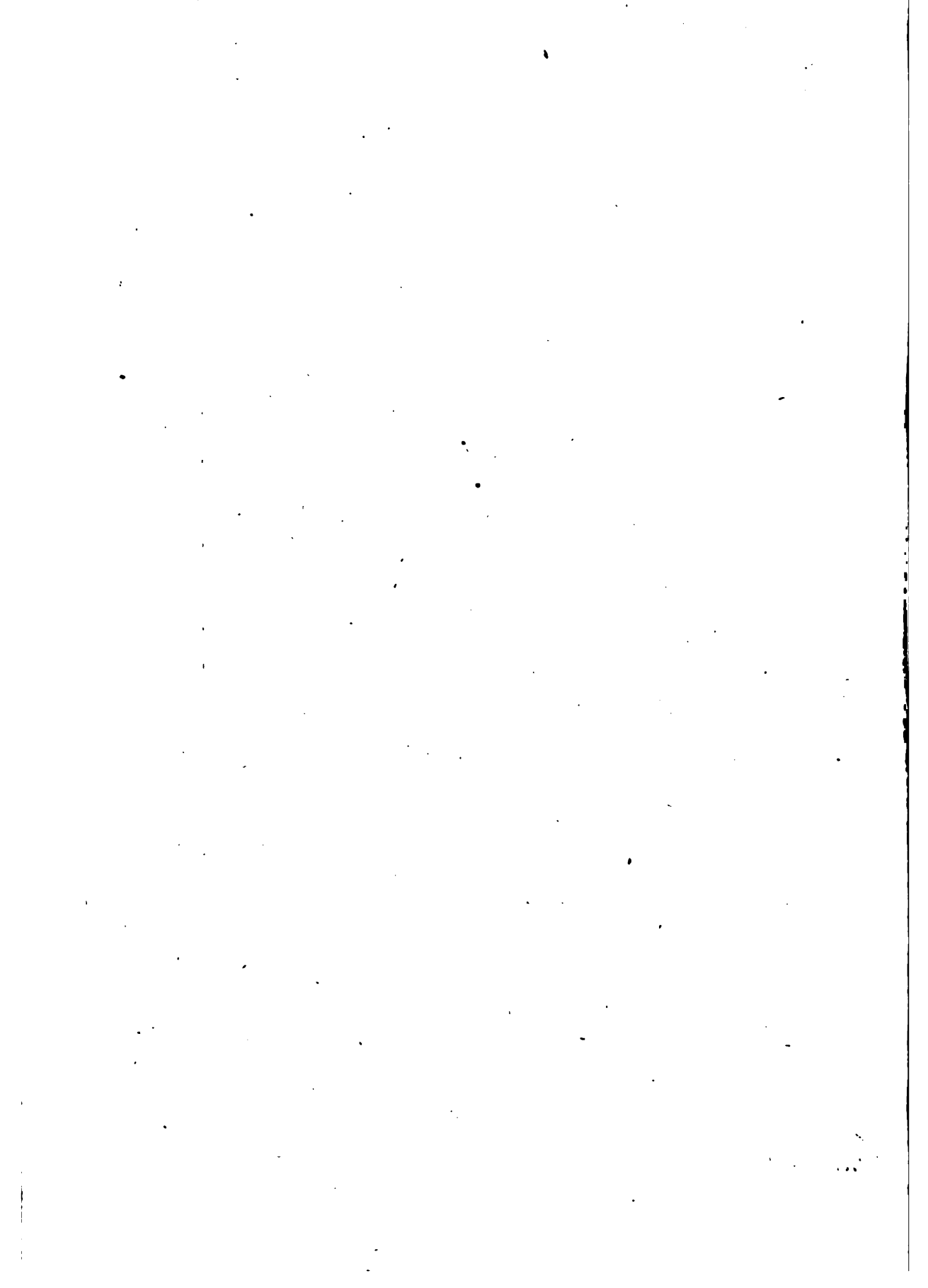


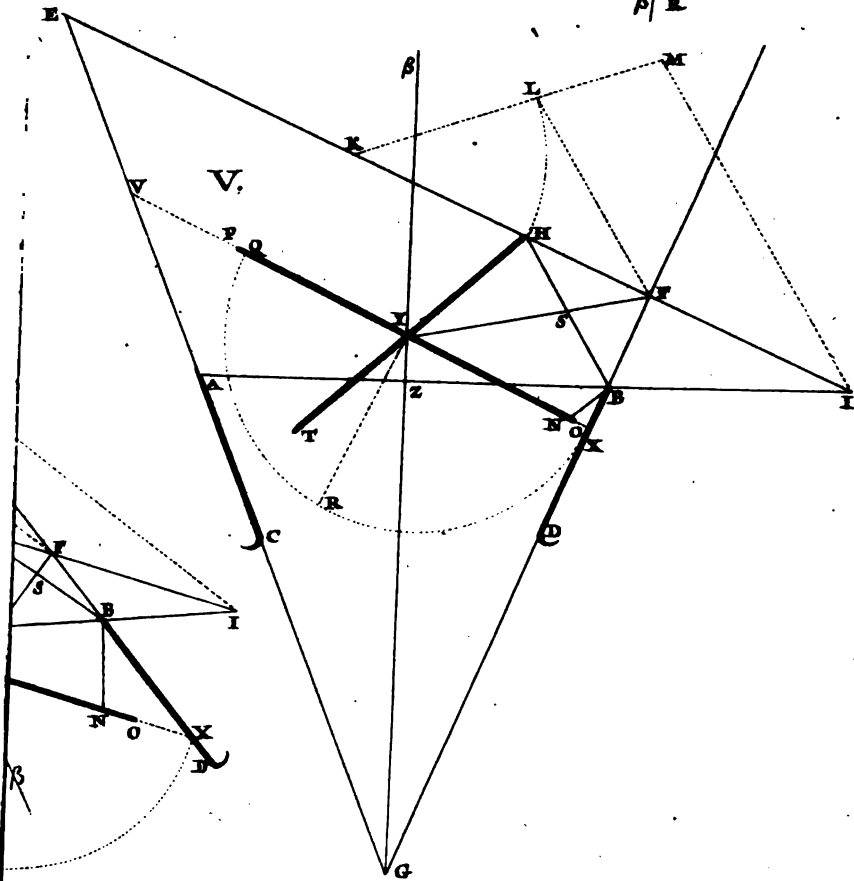
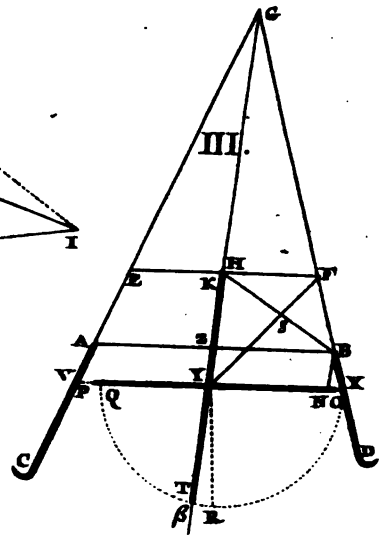
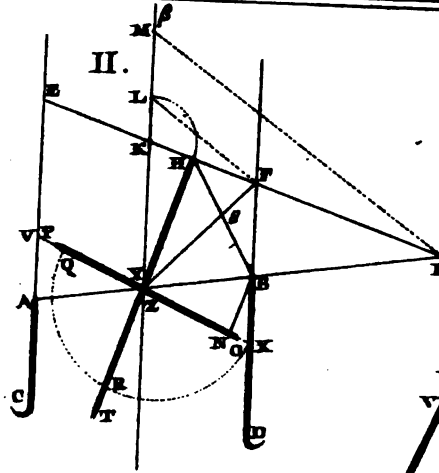


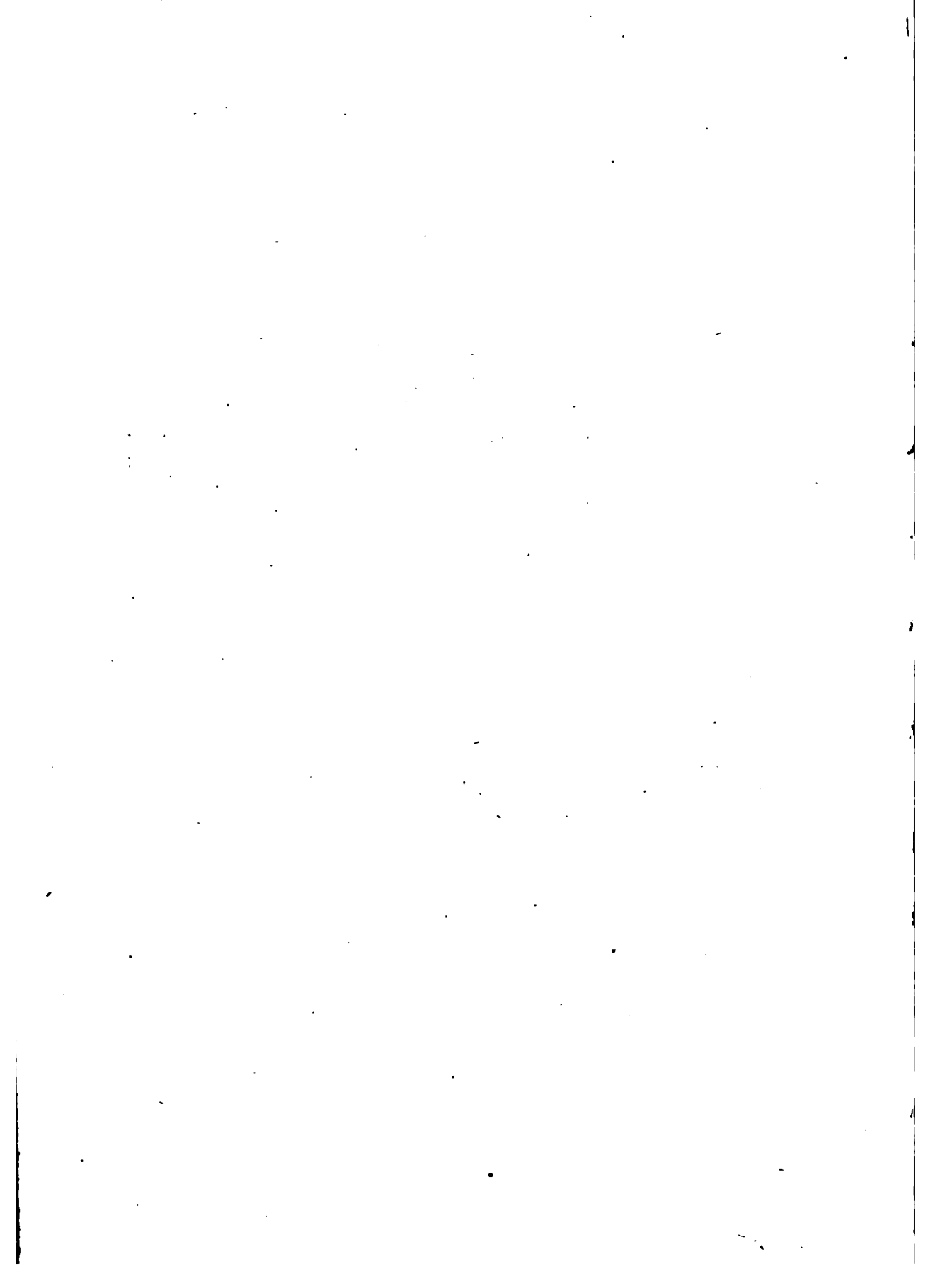












1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

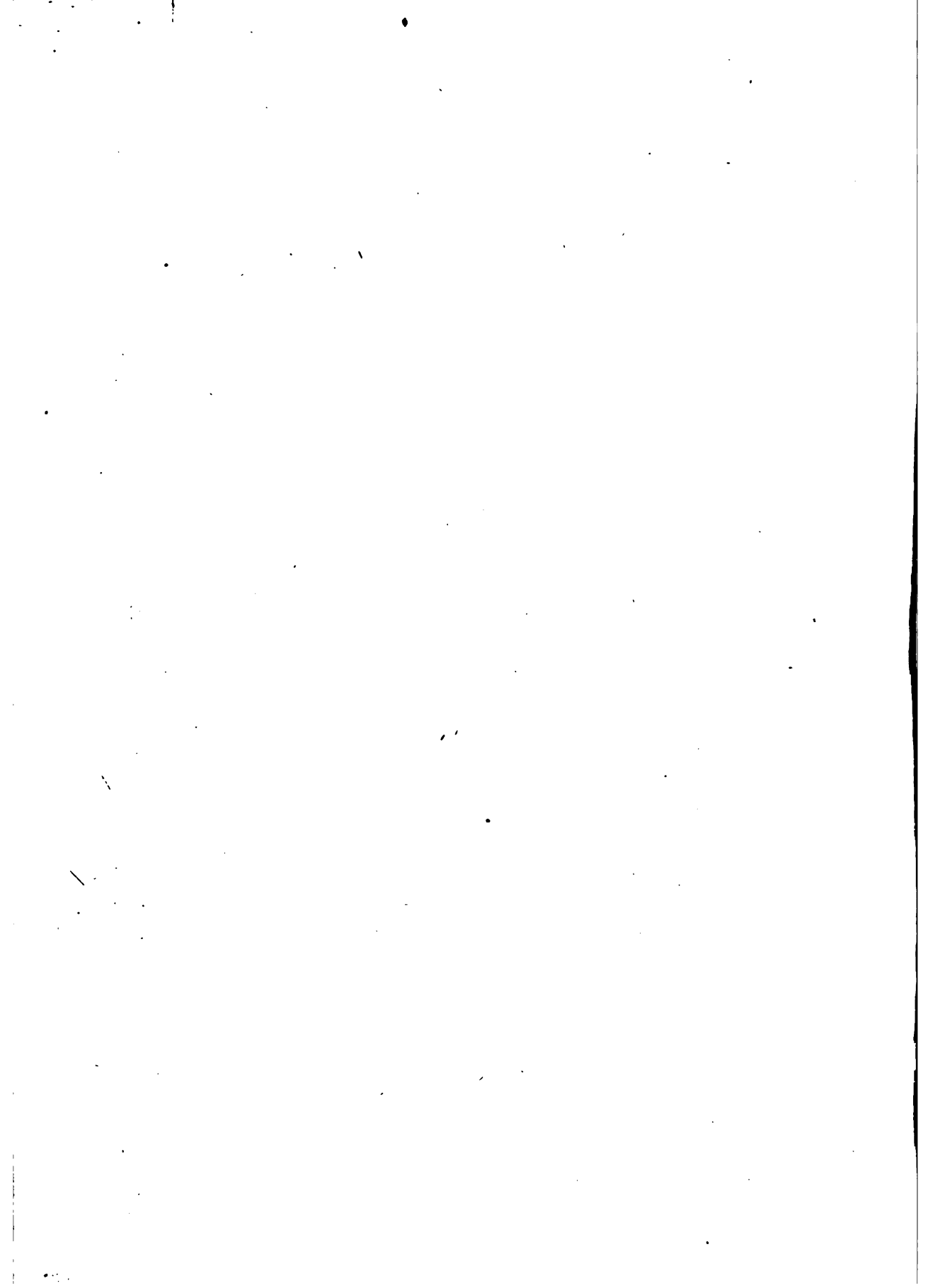




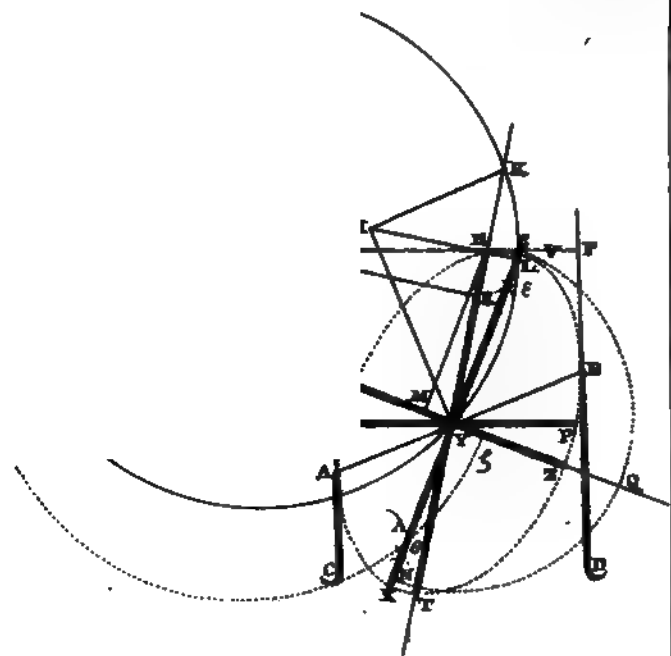
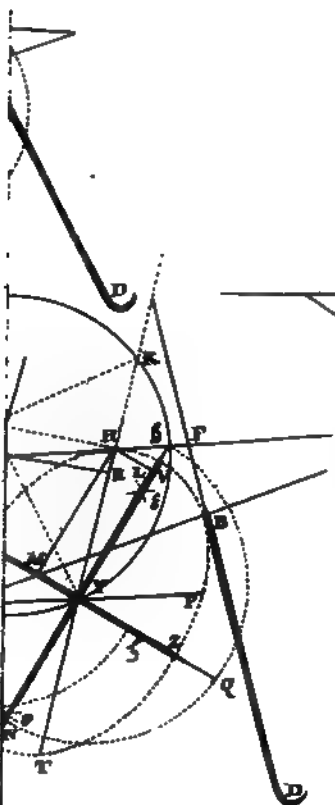
W

III.

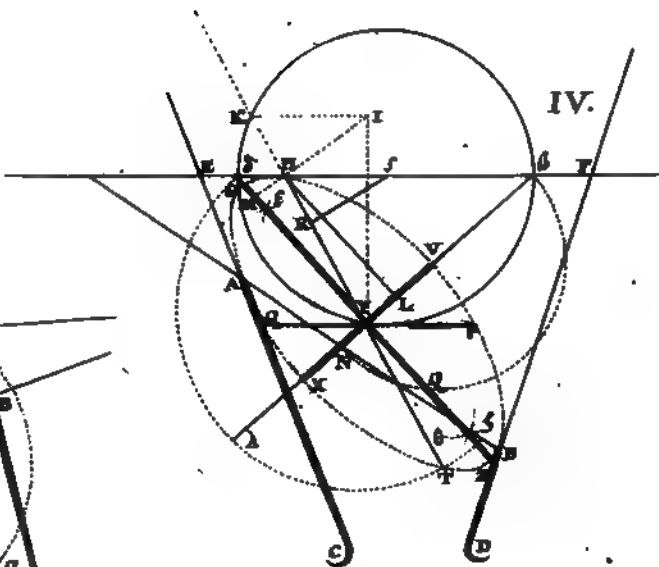


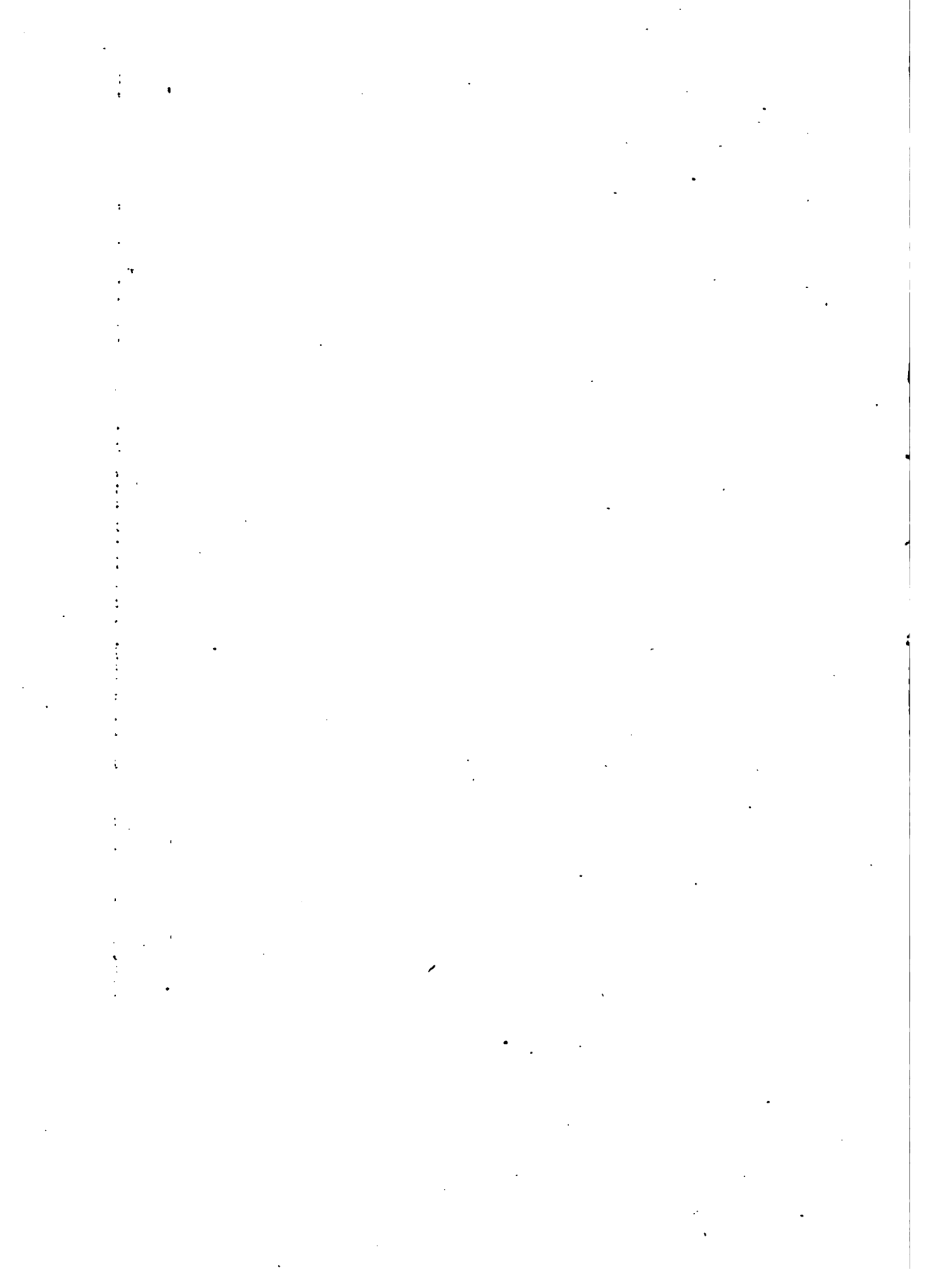


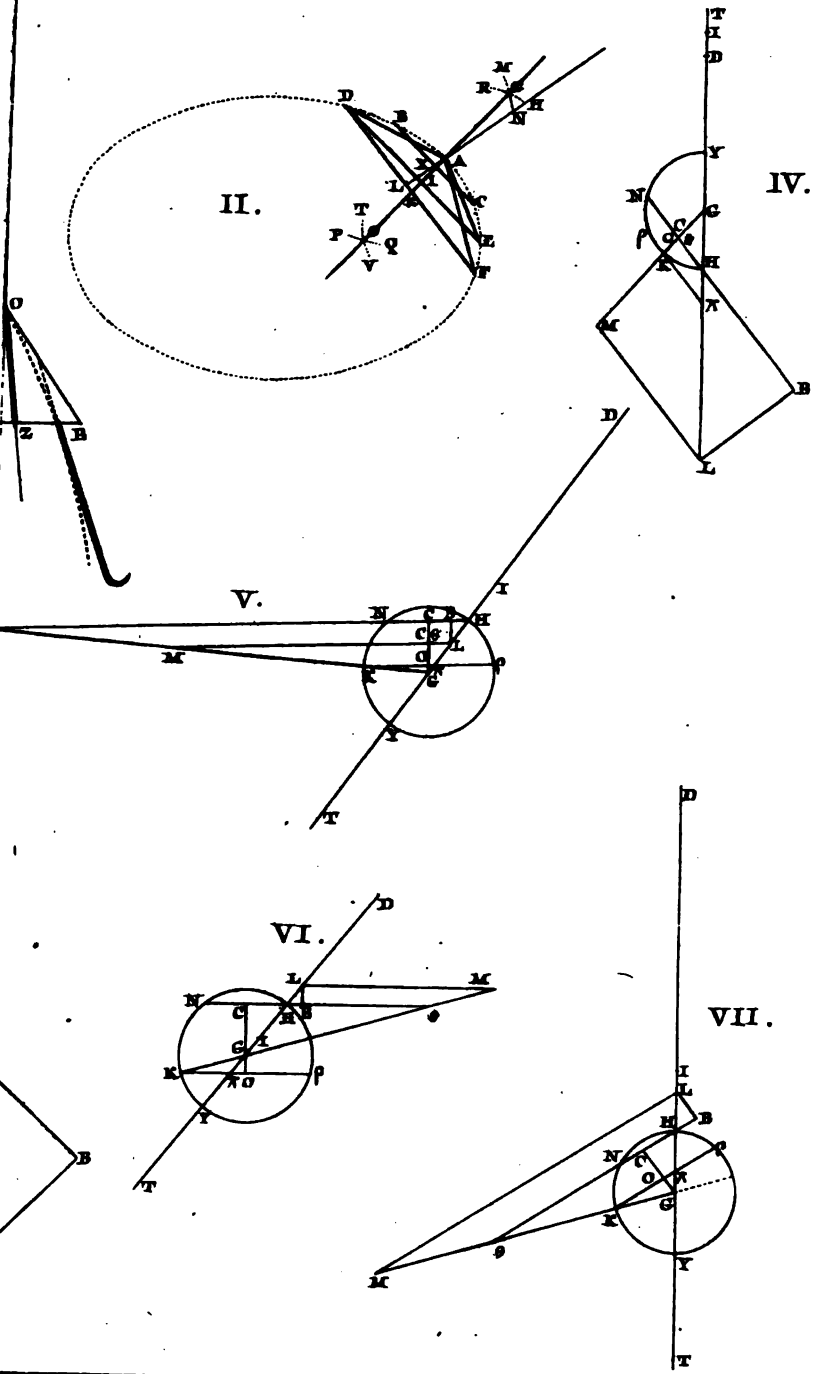
III.



IV.

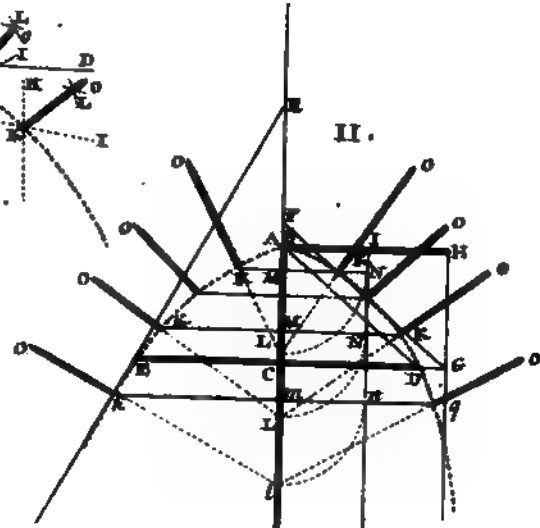
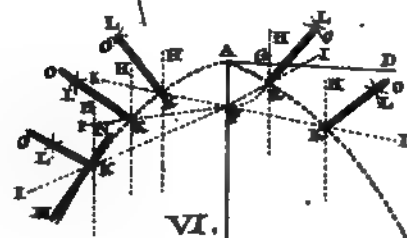
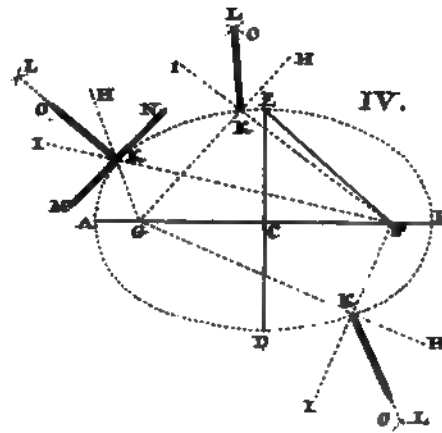
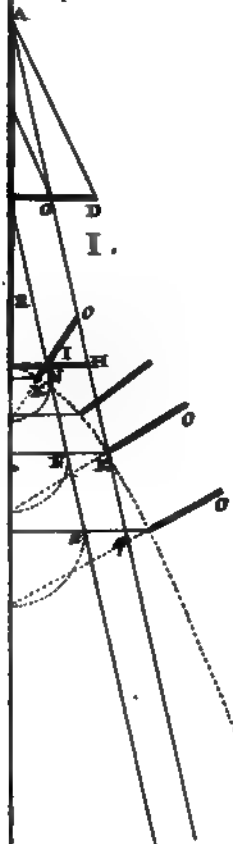




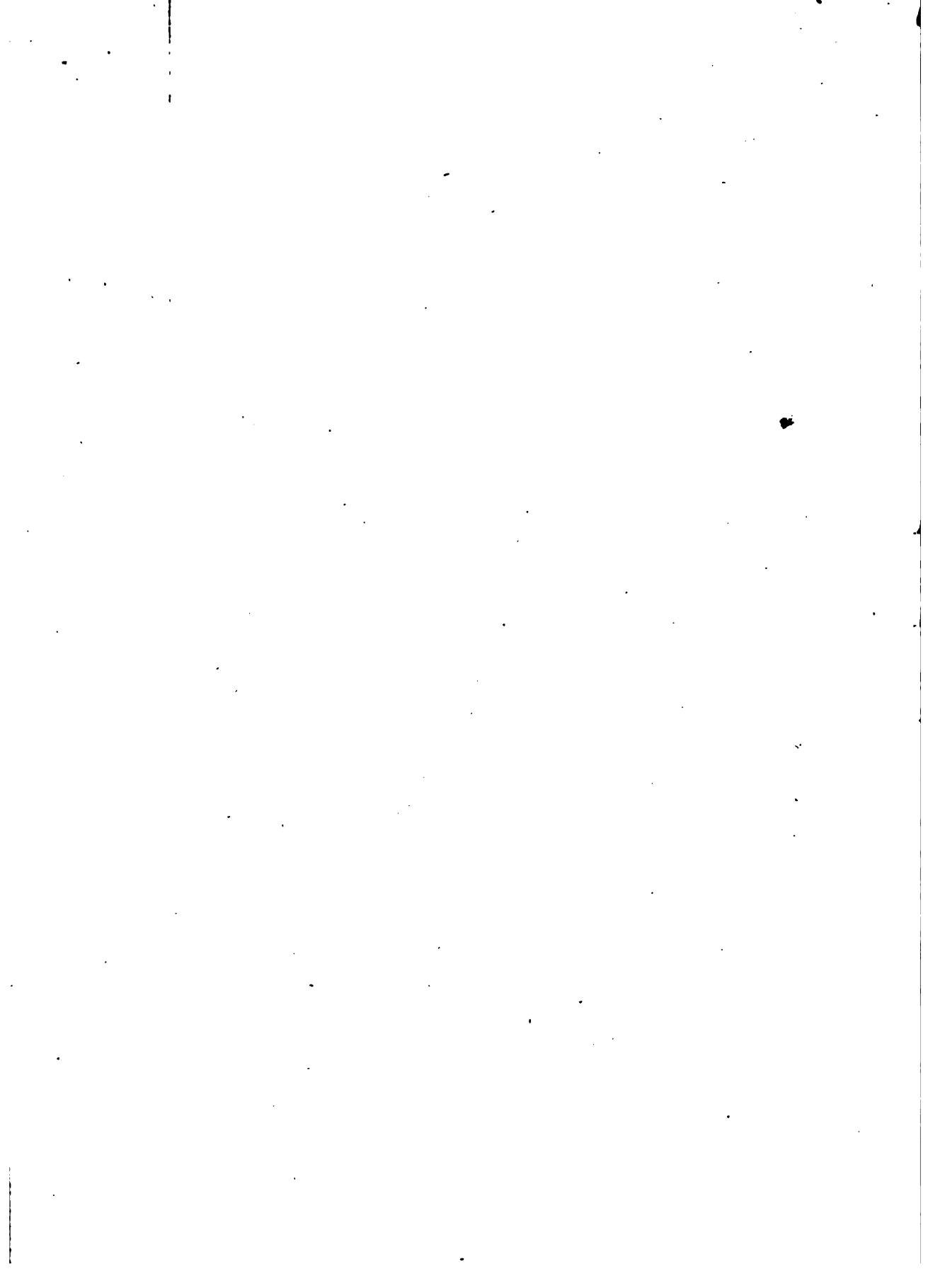


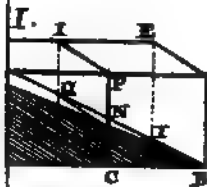
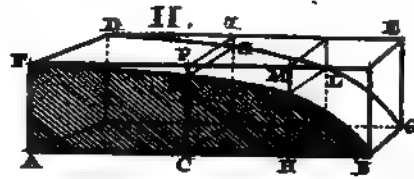
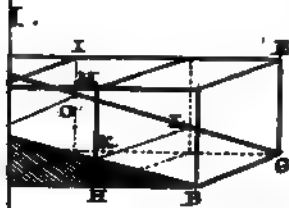


III









IV

